Još jedan dokaz Eulerove nejednakosti za trokut

Šefket Arslanagić[1]

U matematičkoj literaturi u vezi nejednakosti zapaženu ulogu igra geometrijska *Eulerova*[2] *nejednakost* za trokut koja glasi:

$$R \geqslant 2r, \tag{1}$$

gdje su R i r polumjeri opisane i upisane kružnice trokuta ABC. Nekoliko raznih dokaza ove značajne nejednakosti može se naći u [1], [2], [3] i [4]. Ona ima veliku primjenu kod dokazivanja drugih nejednakosti koje se odnose na trokut. Recimo još da se u [3], [4] i [5] nalazi više poboljšanja ove nejednakosti koja glase:

$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \tag{2}$$

$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{2}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \tag{3}$$

$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} \tag{4}$$

$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4abc} \tag{5}$$

$$\frac{R}{2r} \geqslant \frac{m_a}{h_a} \tag{6}$$

$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}{2abc} \tag{7}$$

(za šiljastokutni trokut)

gdje su a, b, c duljine stranica $\triangle ABC$, a m_a i h_a duljine visine i težišnice trokuta povučene iz vrha A. Sada ćemo dati još jedan dokaz nejednakosti (1). Prethodno ćemo dokazati jednu geometrijsku jednakost.

Lema. *Za svaki trokut vrijedi jednakost*

$$\frac{R}{r} = \frac{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}}{2\sin\gamma}, \tag{8}$$

gdje su α, β, γ unutarnji kutovi $\triangle ABC$, a R i r redom polumjeri opisane i upisane kružnice trokuta.

Dokaz. Zbog poučka o sinusima, imamo

$$c = 2R\sin\gamma. \tag{9}$$

S druge strane promatramo li sliku, možemo zapisati $c = |AM| + |MB|$.

---

[1] Autor je profesor u miru na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Sarajevu;
e-pošta: `asefket@pmf.unsa.ba`

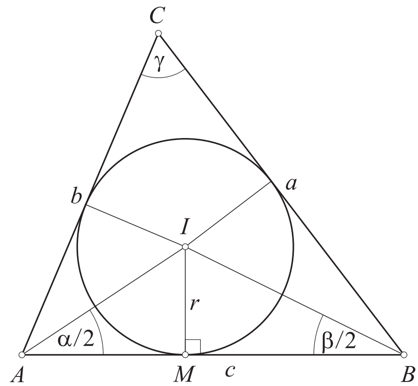
[2] Leonard Euler (1707. – 1783.), poznati švicarski matematičar.

Neka su AI i BI simetrale unutarnjih kutova α i β trokuta ABC, a točka I središte upisane mu kružnice. Iz pravokutnih trokuta AIM i BIM, gdje je M nožište okomice iz I na stranicu $\overline{AB}$, imamo

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{|AM|}{r} \quad \text{i} \quad \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{|MB|}{r},$$

a odavde

$$c=r\Big(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\Big). \tag{10}$$



Slika 1.

Iz (9) i (10) dobivamo

$$2R\sin\gamma=r\Big(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\Big),$$

a odavde

$$\frac{R}{r}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{2\sin\gamma}.$$

□

Sada je dovoljno dokazati ovu nejednakost:

$$\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{2\sin\gamma}\geqslant 2 &(11)\\
\iff\ &\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\geqslant 4\sin\gamma\\
\iff\ &\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\geqslant 4\sin[180^\circ-(\alpha+\beta)]\\
\iff\ &\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\geqslant 4\sin(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} \geqslant 8\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} \geqslant 8\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\\
&\Longleftrightarrow 8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) \leqslant 1\\
&\Longleftrightarrow 2\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}-8\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} \leqslant 1\\
&\Longleftrightarrow 2\sin\alpha\sin\beta-8\cdot\frac{1-\cos\alpha}{2}\cdot\frac{1-\cos\beta}{2} \leqslant 1\\
&\Longleftrightarrow 2\sin\alpha\sin\beta-2(1-\cos\alpha-\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta) \leqslant 1\\
&\Longleftrightarrow \cos\alpha+\cos\beta-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta) \leqslant \frac{3}{2}\\
&\Longleftrightarrow \cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta) \leqslant \frac{3}{2}\\
&\Longleftrightarrow \cos\alpha+\cos\beta-\cos(180^\circ-\gamma) \leqslant \frac{3}{2}\\
&\Longleftrightarrow \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

a ovo je poznata trigonometrijska nejednakost čijih se dvanaest dokaza može naći u [3] i još pet u [6]. Dakle, nejednakost (11) vrijedi. Sada iz (8) i (11) dobivamo (1), gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$, tj. $a=b=c$, te $R=2r$ (jednakostranični trokut).

Literatura

[1] Šefket Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] Šefket Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

[3] Šefket Arslanagić, *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.

[4] Šefket Arslanagić, *Matematička čitanka 6*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2013.

[5] Šefket Arslanagić, *Matematička čitanka 2*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2010.

[6] Šefket Arslanagić, *Matematička čitanka 5*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2013.