Više dokaza jedne trigonometrijske nejednakosti

Šefket Arslanagić[1]*, Ingmar Lehmann*

Dokazivanje nejednakosti ima vrlo važnu ulogu u nastavi matematike raznih nivoa. Tu često dolaze do izražaja razne ideje te veoma zanimljivi dokazi nejednakosti u kojima se koriste nejednakosti o sredinama, nejednakost Cauchy-Schwartz-Bunjakovskog kao i nejednakosti Čebiševa, Höldera, Minkovskog, Schura, Jensena, Huygensa i ostale.

U ovom članku ćemo dati više raznih dokaza jedne trigonometrijske nejednakosti koja glasi

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)>5; \quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \tag{1}$$

Dokaz 1. Za $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ vrijedi $0<\sin x<1$, $0<\cos x<1$, te:

$$\frac{1}{\sin x}>1 \tag{2}$$

Dalje imamo, zbog nejednakosti $A \geqslant G$, između aritmetičke i geometrijske sredine,

$$\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\geqslant 2\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}}=2$$

tj.

$$\frac{1}{\sin x\cos x}\geqslant 2 \tag{3}$$

Sada zbog (2) i (3) dobivamo:

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)=1+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x\cos x}>1+1+1+2=5.$$

Dokaz 2. Opet, koristeći nejednakost $A \geqslant G$ dobivamo,

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)>\sqrt{1\cdot\frac{1}{\sin x}} \iff 1+\frac{1}{\sin x}>2\sqrt{\frac{1}{\sin x}} \tag{4}$$

te slično

$$1+\frac{1}{\cos x}>2\sqrt{\frac{1}{\cos x}} \tag{5}$$

Ovdje vrijedi samo znak $>$, a ne $\geqslant$ jer je $1\neq\frac{1}{\sin x}$ i $1\neq\frac{1}{\cos x}$, tj. $\sin x\neq 1$ i $\cos x\neq 1$ za $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Nakon množenja (4) i (5) imamo:

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)>4\sqrt{\frac{1}{\sin x\cos x}}>4\sqrt{\frac{2}{\sin 2x}}. \tag{6}$$

[1] Izvanredni je profesor u miru s Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Sarajevu;
e-pošta: asefket@pmf.unsa.ba

Kako je $0 < \sin 2x < 1$ za $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, imamo:

$$\frac{1}{\sin 2x} > 1 \iff \frac{2}{\sin 2x} > 2 \iff \sqrt{\frac{2}{\sin 2x}} > \sqrt{2} \iff 4\sqrt{\frac{2}{\sin 2x}} > 4\sqrt{2} > 5. \quad (7)$$

Sada iz (6) i (7) vrijedi (1).

Dokaz 3. Dana nejednakost je ekvivalentna nejednakosti (nakon množenja na lijevoj strani od (1)):

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} > 4 \iff \frac{\sin x + \cos x + 1}{\sin x \cos x} > 4 \qquad (8)$$

Koristeći supstituciju $\sin x + \cos x = t$, te odavde

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = t^2 \iff \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2},$$

nejednakost (8) postaje:

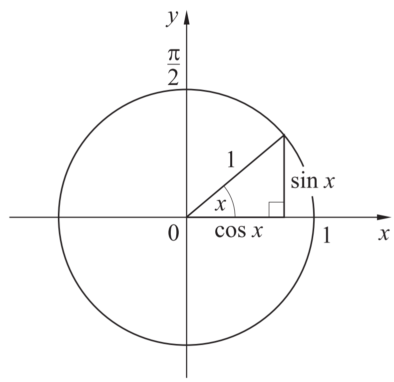
$$\frac{t+1}{\frac{t^2-1}{2}} > 4 \iff \frac{1}{t-1} > 2 \iff \frac{2t-3}{t-1} < 0 \iff 1 < t < \frac{3}{2}. \qquad (9)$$

Dalje imamo

$$t = \sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$
$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2} < \frac{3}{2},$$

te

$$t = \sin x + \cos x > 1.$$



Zbog nejednakosti trokuta to znači da nejednakost (9) vrijedi, tj. i (8) vrijedi, pa onda i (1).

Dokaz 4. Koristit ćemo supstituciju:

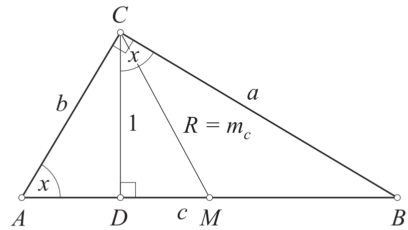
$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}; \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Sada nejednakost (1), uzimajući $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t$, ima oblik:

$$\left(1 + \frac{1+t^2}{2t}\right)\left(1 + \frac{1+t^2}{1-t^2}\right) > 5 \iff \frac{t^2+2t+1}{2t} \cdot \frac{2}{1-t^2} > 5$$

$$\iff \frac{t+1}{t(1-t)} - 5 > 0 \iff \frac{5t^2 - 4t + 1}{t(1-t)} > 0 \iff \frac{5\left[\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{25}\right]}{t(1-t)} > 0,$$

što vrijedi zbog $0 < t < 1$. Dakle, dana nejednakst (1) vrijedi.



Dokaz 5. Koristit ćemo pravokutni trokut ABC kod kojeg je $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, a jedan od šijastih kutova je jednak x; $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ i visina iz vrha C pravog kuta iznosi $|CD| = 1$.

Neka je $\sphericalangle CAD = x$ kao i $\sphericalangle BCD = x$ (jer su trokuti ACD i CBD slični). Tada je:

$$\triangle ACD : \sin x = \frac{1}{b} \implies b = \frac{1}{\sin x},$$
$$\triangle BCD : \cos x = \frac{1}{a} \implies a = \frac{1}{\cos x}$$

kao i

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 = b^2 + a^2 = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\implies |AB|^2 = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \implies c(= |AB|) = \frac{1}{\sin x \cos x}.$$

Dana nejednakost (1) je ekvivalentna sa

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} > 4. \tag{10}$$

Radi nejednakosti trokuta imamo

$$a + b > c \tag{11}$$

odnosno

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} > \frac{1}{\sin x \cos x}.$$

Kako je $\overline{CM}$ (točka M je polovište hipotenuze trokuta ABC) težišnica tog trokuta, a ujedno i polumjer opisane kružnice trokuta ABC, imamo $|AB| = 2|CM|$, tj. $c = 2m_c(= 2R)$. Iz pravokutnog trokuta CDM slijedi $|CM| \geqslant |CD|$, a odavde $|CM| \geqslant 1$ ili $m_c(= R) \geqslant 1$. Dakle, dobivamo

$$c \geqslant 2. \tag{12}$$

Sada iz (11) i (12) dobivamo

$$a + b + c > 4 \iff \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x} > 4,$$

a ovo je nejednakost (10). Ovime je nejednakost (1) dokazana.

Dokaz 6. Koristeći nejednakost Cauchy-Schwartz-Bunjakovskog imamo

$$\begin{aligned} &\left[1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\right)^2\right]\left[1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\cos x}}\right)^2\right] \geqslant \left(1 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x}}\right)^2 \\ &\iff \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) \geqslant \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\sin x \cos x}}\right)^2 \end{aligned} \tag{13}$$

Kako je $\sin 2x < 1$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, to je $\sqrt{\sin 2x} < 1$, a odavde $\dfrac{1}{\sqrt{\sin 2x}} > 1$ i

$$\frac{1}{\sqrt{\sin x \cos x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 \sin x \cos x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}} > \sqrt{2}. \tag{14}$$

Sada iz (13) i (14) dobivamo:

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right) \geqslant (1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}, \tag{15}$$

a odavde zbog $3+2\sqrt{2} > 5$ ($\iff$ $\sqrt{2} > 1$) slijedi nejednakost (1).

Napomena 1. Uočimo da je nejednakost (15) bolja od dane nejednakosti (1). Jednakost u (15) vrijedi ako i samo ako je $\dfrac{1}{1} = \dfrac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\cos x}} \implies \operatorname{ctg} x = 1 \implies x = \dfrac{\pi}{4}$.

Dokaz 7. Za ovaj dokaz ćemo koristiti diferencijalni račun. Promatrajmo funkciju

$$f(x) = 1+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x\cos x}-5, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Imamo

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x},$$

tj.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\cos^3 x+\sin^3 x-\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{-(\cos^3 x-\sin^3 x)-(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\sin^2 x\cos^2 x}, \\ &= \frac{(\sin x-\cos x)(\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos x+\sin x)}{\sin^2 x\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Iz $f'(x) = 0$ dobivamo:

$$\sin x-\cos x = 0,$$

a odavde

$$\operatorname{tg} x = 1 \implies x = \frac{\pi}{4}.$$

Imamo sada

$$f'(x)\begin{cases} < 0, & x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \quad f \text{ pada} \\ = 0, & x = \frac{\pi}{4}, \text{ min} \\ > 0, & x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \quad f \text{ raste,} \end{cases}$$

te

$$f_{\min} = f\left(x = \frac{\pi}{4}\right) = 1+\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3+2\sqrt{2} > 5,$$

tj.

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right) > 5.$$

Dokaz 8. Koristit ćemo Huygensovu[3] nejednakost koja glasi:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n) \geqslant (1+\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n})^n; \quad (x_i > 0, \quad i = 1,\ldots,n) \tag{16}$$

[3] Cristian Huygens (1639. – 1695.), poznati nizozemski matematičar i fizičar (dugo vremena je živio u Parizu).

Za $x_1 = \dfrac{1}{\sin x}$, $x_2 = \dfrac{1}{\cos x}$ i $n = 2$, iz (13) dobivamo:

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right) \geqslant \left(1+\sqrt{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}}\right)^2$$

$$\iff \left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right) \geqslant \left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}}\right)^2,$$

a odavde, zbog objašnjenja danog u dokazu 6, imamo

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right) \geqslant (1+\sqrt{2})^2,$$

tj.

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right) \geqslant 3+2\sqrt{2}\ (> 5).$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2$, tj. $\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{\cos x} \implies \cos x = \sin x \implies x = \dfrac{\pi}{4}$ jer $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Na kraju ćemo dati još jedno zanimljivo poopćenje nejednakosti (1).

Ako je kut x šiljast, tj. $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ te $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$, tada vrijedi

$$\left(a+\frac{b}{\sin x}\right)\left(b+\frac{a}{\cos x}\right) > a^2+b^2+3ab.$$

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{b}{\sin x}\right)\left(b+\frac{a}{\cos x}\right) &= ab+\frac{a^2}{\cos x}+\frac{b^2}{\sin x}+\frac{ab}{\sin x\cos x}\\ &= ab+\frac{a^2}{\cos x}+\frac{b^2}{\sin x}+\frac{2ab}{\sin 2x}.\end{aligned} \tag{17}$$

Kako je za $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$0 < \sin x < 1, \quad 0 < \cos x < 1 \quad \text{i} \quad 0 < \sin 2x < 1,$$

to je

$$\frac{1}{\sin x} > 1, \quad \frac{1}{\cos x} > 1 \quad \text{i} \quad \frac{1}{\sin 2x} > 1,$$

odnosno

$$\frac{a^2}{\cos x} > a^2, \quad \frac{b^2}{\sin x} > b^2 \quad \text{i} \quad \frac{2ab}{\sin 2x} > 2ab,$$

pa iz (17) dobivamo:

$$\left(a+\frac{b}{\sin x}\right)\left(b+\frac{a}{\cos x}\right) > a^2+b^2+3ab.$$

Za $a = b = 1$, dobivamo nejednakost (1).

Dat ćemo na kraju još jedno bolje poopćenje dane nejednakosti (1). Ono glasi:

Ako je kut x šiljast, tj. $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i $n \in \mathbb{N}$, tada vrijedi nejednakost:

$$\left(1+\frac{1}{\sin^n x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^n x}\right) \geqslant \left(1+2^{\frac{n}{2}}\right)^2.$$

Dokaz. Nakon množenja i kvadriranja nejednakost je ekvivalentna s

$$\frac{1}{\sin^n x}+\frac{1}{\cos^n x}+\frac{1}{\sin^n x \cdot \cos^n x} \geqslant 2 \cdot 2^{\frac{n}{2}}+2^n. \tag{18}$$

Sada je zbog $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{1}{\sin^n x \cdot \cos^n x}=\frac{2^n}{(2\sin x \cos x)^n}=\frac{2^n}{\sin^n 2x} \geqslant 2^n \tag{19}$$

te na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja:

$$\frac{1}{\sin^n x}+\frac{1}{\cos^n x} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{\sin^n x \cdot \cos^n x}} \geqslant 2\sqrt{2^n}=2 \cdot 2^{\frac{n}{2}}. \tag{20}$$

Nakon zbrajanja nejednakosti (19) i (20), dobivamo nejednakost (18), odnosno danu nejednakost.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\sin^n 2x = 1$ te $\frac{1}{\sin^n x}=\frac{1}{\cos^n x}$, a odavde $\sin 2x = 1$ te $\sin x = \cos x$, tj. za $x=\frac{\pi}{4}$.

Za $n=1$ dana nejednakost glasi:

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right) \geqslant (1+\sqrt{2})^2,$$

tj.

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right) \geqslant 3+2\sqrt{2} > 5.$$

Jednakost vrijedi za $x=\frac{\pi}{4}$.

Mišljenja smo da se u ovih sedam dokaza i dva poopćenja koristi više zanimljivih i korisnih ideja, kako smo to tvrdili u početku, koje će biti od interesa budućim čitateljima ovog članka, pogotovo učenicima (a i studentima) koji pokazuju veći interes za matematiku kao i nastavnicima koji s njima rade.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

[3] A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, New York, 1998.