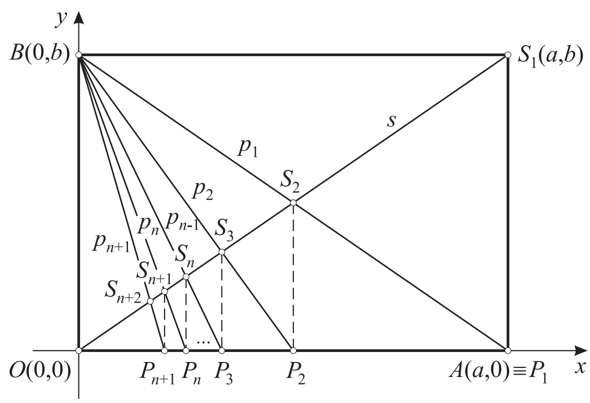
Primjena matematičke indukcije u konstruktivnoj geometriji

Petar Svirčević[1]

Dobro je poznato, kako se može bilo koja dužina podijeliti, u smislu konstruktivne geometrije, na bilo koji broj jednakih dužina. Naime, tu konstrukciju je iskazao i dokazao Eulkid u *Propoziciji 10.* u *Knjizi 6.*, koja je sastavni dio njegovih *Elemenata*. Ta jedina metoda podjele dužine na jednake dijelove se u matematici, i ne samo u njoj, primjenjivala tijekom dvadeset tri stoljeća, sve dok nije objavljen članak *Eulkid-Fibonacci-Sketchpad*, čiji su autori Daniel Litchfield i David Goldenheim uz potporu Charlesa H. Dietricha. Članak je objavljen u časopisu *The Mathematics Teacher* u broju iz prvog mjeseca 1997. Tamo je taj teorem konstruktivne podjele razdvojen na dva slučaja; na slučaj neparnog i na slučaj parnog broja jednakih dijelova. Navedene konstrukcije se zovu GLaD-*ove konstrukcije*. Vidimo da je akronim izveden od prvih slova prezimena autora tih konstrukcija. *No, mi ćemo sada dati poopćenje tih konstrukcija, tako da nećemo razlikovati podjelu na parni ili neparni broj jednakih dijelova, i to ćemo dokazati matematičkom indukcijom.*

Konstrukcija 1. *Bilo koja dužina* $\overline{OA}$ *se dijeli na bilo koji broj* n, $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$, *jednakih dužina, kako je prikazano na slici 1, gdje je*

$$|OP_n| = \frac{1}{n}|OA|. \tag{1}$$



Slika 1.

Dokaz. Neka je zadana dužina $\overline{OA}$, čija je duljina $|OA| = a$. Sada ćemo ju podijeliti, ovom neeuklidovom metodom, na n dužina jednakih duljina. Konstruirajmo pravokutnik OAS_1B, tako da $|OA| = |BS_1| = a$ i $|OB| = |AS_1| = b$. Povucimo dijagonale $\overline{OS_1}$ i $\overline{AB}$, koje se sjeku u točki S_2. Dakle $S_2 = OS_1 \cap AB$. Postavimo taj pravokutnik u koordinatni sustav kao na slici 1. Da ne bi bilo zabune recimo, da $\overline{OS_1}$ predstavlja dijagonalu pravokutnika koja leži na pravcu s. Analogno ćemo crtati i dijelove pravaca: p_1, $p_2, \ldots$, $p_n, \ldots$, također unutar pravokutnika. Odatle slijedi, da je apscisa od P_2 jednaka $\dfrac{a}{2}$; odnosno $P_2\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$, jer je P_2 ortogonalna projekcija točke S_2 na $\overline{OA}$. Sada

[1] Autor je profesor u miru iz Željezničke škole u Zagrebu; e-pošta: `petar.svircevic@zg.t-com.hr`

kroz točke $P_2\left(\frac{a}{2},0\right)$ i $B(0,b)$ postavimo pravac p_2 čija je jednadžba

$$p_2 \ \ldots \ y=-\frac{2b}{a}x+b. \tag{2}$$

Rekli smo, da je s pravac kroz točke O i S_1, čija je jednadžba

$$s \ \ldots \ y=\frac{b}{a}x. \tag{3}$$

Pravci s i p_2 se sijeku u točki S_3, dakle $S_3 \equiv s \cap p_2$, pa iz (2) i (3) dobivamo $S_3\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3}\right)$, a odatle slijedi da je apscisa točke P_3 jednaka $\frac{a}{3}$, dakle $P_3\left(\frac{a}{3},0\right)$. Slično bismo dobili da je $P_4\left(\frac{a}{4},0\right)$ itd. Pretpostavimo, da smo tako računali sve do $P_n\left(\frac{a}{n},0\right)$. Sada primijenimo matematičku indukciju, pa ćemo kroz tu točku $P_n\left(\frac{a}{n},0\right)$ i točku $B(0,b)$ postaviti pravac, čija je jednadžba

$$p_n \ \ldots \ y=-\frac{nb}{a}x+b. \tag{4}$$

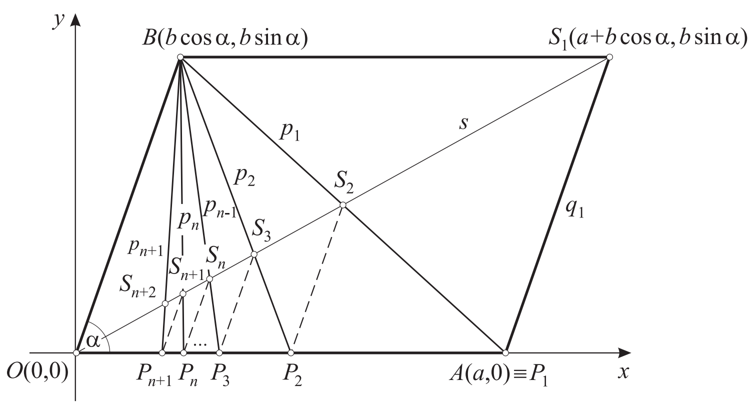
Pravci p_n i s se sjeku u točki $S_n\left(\frac{a}{n+1},\frac{b}{n+1}\right)$, čije smo koordinate dobili iz (3) i (4), te odatle točku $P_{n+1}\left(\frac{a}{n+1},0\right)$, a to znači da je $|OP_{n+1}|=\frac{1}{n+1}|OA|$, pa je time K.1., odnosno konstrukcija na slici 1, u potpunosti dokazana. Napomenimo da korak za P_3 nismo morali ni raditi, već smo mogli odmah primijeniti matematičku indukciju.

Sada ćemo izvršiti poopćenje te konstrukcije, tako da pravokutnik zamijenimo s paralelogramom.

Konstrukcija 2. *Bilo koja dužina $\overline{OA}$ dijeli se na bilo koji broj n, $n \in \{2,3,4,\ldots\}$, jednakih dužina konstrukcijom prikazanom na slici 2, gdje je*

$$|OP_n|=\frac{1}{n}|OA|. \tag{5}$$

Dokaz. Neka je zadana dužina $\overline{OA}$ čija je duljina $|OA|=a$. Tu dužinu treba podijeliti na n dužina jednakih duljina. Kostruirajmo paralelogram OAS_1B tako da je $|OA|=|BS_1|=a$, $|OB|=|AS_1|=b$ i $\alpha=\sphericalangle BOA$, gdje je $0<\alpha<\pi$. Povucimo dijagonale $\overline{OS_1}$ i $\overline{AB}$ koje se sjeku u točki $S_2 \equiv \overline{OS_1} \cap \overline{AB}$. Postavimo taj paralelogram u koordinatni sustav kao na slici 2.



Slika 2.

Jasno je da je apscisa točke P_2 jednaka $\frac{a}{2}$, odnosno $P_2\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, jer je to sjecište pravca OA, koji prolazi kroz S_2, a paralelan je s OB. Slično bismo računanjem prema slici 2 dobili $P_3\left(\frac{a}{3}, 0\right), \ldots, P_n\left(\frac{a}{n}, 0\right)$. Sada ćemo kroz $P_n\left(\frac{a}{n}, 0\right)$ i $B(b\cos\alpha, b\sin\alpha)$ postaviti pravac

$$p_n \ \ldots \ y = \frac{b\sin\alpha}{nb\cos\alpha - a}(nx - a), \tag{6}$$

a kroz $O(0,0)$ i $S_1(a + b\cos\alpha, b\sin\alpha)$ pravac

$$s \ \ldots \ y = \frac{b\sin\alpha}{a + b\cos\alpha}x. \tag{7}$$

Ti se pravci sijeku u točki S_{n+1}, a iz (6) i (7) imamo

$$S_{n+1}\left(\frac{a + b\cos\alpha}{n+1}, \frac{b\sin\alpha}{n+1}\right). \tag{8}$$

Postavimo li sada pravac q_{n+1} kroz točku S_{n+1} paralelno s OB, dobit ćemo

$$q_{n+1} \ \ldots \ y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{a\operatorname{tg}\alpha}{n+1},$$

a taj pravac siječe os x u točki $P_{n+1}\left(\frac{a}{n+1}, 0\right)$, te je $|OP_{n+1}| = \frac{1}{n+1}|OA|$, čime je K.2., odnosno konstrukcija na slici 2, u potpunosti dokazana.

Napomena 1. Mogla bi se dati primjedba, da je suvišno što smo iskazali i dokazali K.1. Naime, da smo dokazali samo K.2, tada bi iz nje slijedila K.1. ako bi načinili specijalizaciju $\alpha = 90^\circ$. No, to smo napravili zbog toga tako, da ovo mogu pratiti i oni čitatelji, koji još nisu upoznati s gradivom iz trigonometrije. Drugim riječima, K.1 bi bila specijalizacija od K.2. Konačno, i učenici osnovne škole bi nakon nekoliko konstrukcionih koraka heuristički zaključili da vrijedi K.1, dakle ne moraju znati ni princip matematičke indukcije, pa zato smo i dali jedan “suvišni korak” u dokazu te konstrukcije. Svakako, bez matematičke indukcije ne radi se o strogom dokazu.

Napomena 2. Euklid (oko 330. – 275. godine p. n. e.) pripada grupi tri najveća matematičara stare ere (Euklid, Arhimed i Apolonije). Bio je sljedbenik Platonove filozofije, pa je vjerojatno obrazovan u Ateni kod Platonovih učenika. Svoju naučnu djelatnost je razvio u aleksandrijskoj matematičkoj školi *Museion*, koju je i utemeljio. Ta ustanova je bila centar nauke tog doba. Euklid je svoje *Elemente* objavio oko 300. godine p. n. e. Značenje tog djela je u tome, jer je ono koncipirano na aksiomatskoj osnovi, da se kao takvo koristi sve do danas, uz napomenu, da je Hilbert načinio korekciju tog djela početkon dvadesetog stoljeća u djelu *Grundlagen der Geometrie*. Naime, Hilbert je dao strogu aksiomatiku geometrije (aksiomi su potpuni, nadalje, oni su međusobno nezavisni i nekontradiktorni), s tim da neke pojmove nije definirao, već ih je prihvatio ad hoc (npr.: točka, pravac, ravnina,...). Iz V. postulata Euklidovih *Elemenata* je proizašla i neeuklidska geometrija (Geometrija Lobačevskog), koja je bila pretpostavka u izgradnji *Einsteinove specijalne teorije relativnosti*.

Literatura

[1] D. C. Litchfield, D. A. Goldenheim, *Euklid, Fibonacci, Sketchpad*, The Mathematics Teacher, 90 br. 1, 8–12, 1997.

[2] Petar Svirčević, *Opća podjela dužine na jednake dijelove*, Poučak br. 10, 15–25, HMD, Zagreb 2002.

[3] (Euklidovi Elementi), `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html`.