ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 28. veljače 2019. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. $4/276$.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 144.

A) Zadatci iz matematike

3665. Bez korištenja računala dokaži

$$\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=4.$$

3666. Promatrajući brojeve $S_n = n! - 1$, $n \in \mathbf{N}$, dokaži da među njima ima beskonačno mnogo prostih brojeva.

3667. U skupu realnih brojeva odredi sva rješenja sustava jednadžbi

$$x+y^2=y^3$$
$$y+x^2=x^3.$$

3668. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi, dokaži nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{16}{1+abc}.$$

Kada vrijedi jednakost?

3669. U konveksnom četverokutu $ABCD$ točka K je unutar trokuta ABD tako da su trokuti ABD i KCD slični. Dokaži da su trokuti BCD i AKD slični.

3670. Točka A je polovište dužine $\overline{PB}$. Iz točke P povučena je tangenta PC na kružnicu koja prolazi točkama A i B. Simetrala kuta $\sphericalangle CPA$ siječe stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama D i E. Dokaži $|BE| = 2|AD|$.

3671. Neka su a, b, c duljine stranica trokuta. Ako je njegova površina jednaka $(a-b+c)(a+b-c)$, dokaži da je duljina simetrale kuta iz vrha A jednaka

$$d=\frac{8bc}{\sqrt{17}(b+c)}.$$

3672. Ako su K, L, M sjecišta simetrala unutarnjih kutova α, β, γ trokuta ABC redom s nasuprotnim stranicama, dokaži nejednakost

$$\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2}+\frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2}\geq 3.$$

3673. Ako su zbrojevi površina kvadrata nad nasuprotnim stranicama konveksnog četverokuta jednaki, dokaži da su spojnice nasuprotnih stranica jednakih duljina.

3674. Odredi jednadžbu kružnice upisane u trokut čije stranice leže na pravcima

$$\begin{aligned} m_1 &\quad \ldots \quad 2x-3y+21=0\\ m_2 &\quad \ldots \quad 3x-2y-6=0\\ m_3 &\quad \ldots \quad 2x+3y+9=0. \end{aligned}$$

3675. Dana je točka P unutar trokuta ABC tako da je $\varphi = \sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA$. Ako su α, β, γ kutovi trokuta, dokaži jednakost

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}=\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}.$$

3676. Niz (a_n) definiran je s $a_1 = 1$,

$$a_n=\frac{n+1}{n-1}(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}),\quad n>1$$

Odredi a_{2019}.

3677. Dokaži da je za svaki neparan $n \geq 5$ broj

$$\binom{n}{0}\cdot 5^{n-1}-\binom{n}{1}\cdot 5^{n-2}+\binom{n}{2}\cdot 5^{n-3}-\ldots-\binom{n}{n-2}\cdot 5+\binom{n}{n-1}$$

složen.

3678. Bridovi iz jednog vrha tetraedra su međusobno okomiti. Ako su njihove duljine redom jednake 9, 12 i 16 cm, izračunaj visinu tetraedra iz promatranog vrha.

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 446. Učenici su na satu fizike napravili kosinu dugačku 120 i visoku 40 centimetara. Po njoj su vukli valjke mase 300 grama. Kad su valjak vukli uz kosinu, tako da se on mogao kotrljati, sila vučenja je iznosila 1 njutn, a kad je valjak klizio po kosini sila je bila 1.4 njutna. S koje visine treba pustiti valjak koji kliže da u podnožje dođe istovremeno s valjkom koji se kotrlja i koji je u istom trenutku pušten s vrha kosine?

OŠ – 447. Bronca je legura bakra i kositra. Komad bronce ima obujam 500 kubnih centimetara i masu 4307 grama. Koliko grama bakra, a koliko kositra ima u tom komadu? Gustoća bakra je $8940\ \mathrm{kg/m^3}$, a kositra $7310\ \mathrm{kg/m^3}$.

OŠ – 448. Kad izgori kilogram alkohola oslobodi se $3\cdot 10^7$ džula topline. Učenici su na satu ulili u konzervu $5\ \mathrm{cm^3}$ 70-postotnog alkohola i zapalivši ga zagrijavali $200\ \mathrm{cm^3}$ vode. Temperatura vode se povećala s $20\,^\circ\mathrm{C}$ na $36\,^\circ\mathrm{C}$. Kolika je korisnost ovakvog načina zagrijavanja? Gustoća alkohola je $790\ \mathrm{kg/m^3}$. Specifični toplinski kapacitet vode je $4200\ \mathrm{J/kgK}$, a gustoća vode $1000\ \mathrm{kg/m^3}$.

OŠ – 449. Učenik je na bateriju od 3.5 volta paralelno spojio dva otpornika $R_1 = 2\ \Omega$ i $R_2 = 6\ \Omega$. Izmjerio je napon na krajevima te paralele i začudio se kad je utvrdio da on iznosi samo 1.5 volta. Tada se sjetio da baterije imaju unutarnji otpor. Koliki je unutarnji otpor njegove baterije? Usporedite struju kroz otpornik R_2 u ovom spoju sa strujom kroz njega kad bi ga se serijski spojilo s R_1 na istu bateriju.

1686. Serijski *LCR* titrajni krug pri rezonantnoj frekvenciji ima ukupnu impedanciju $500\ \Omega$, a pri dvostruko većoj frekvenciji $1300\ \Omega$. Odredi induktivni i kapacitivni otpor pri rezonantnoj frekvenciji.

1687. Dva patuljasta planeta, oba sferno simetrična imaju sličnu masu i veličinu. Prvi ima 2% veću prosječnu gustoću od drugog. Na površini prvog je ubrzanje sile teže 12% veće nego na površini drugog. Radijus prvog je 80 km veći od radijusa drugog. Odredi radijuse oba patuljasta planeta.

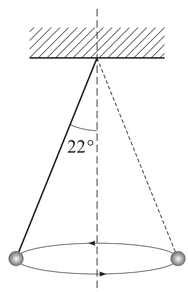
1688. Na 3000 m nadmorske visine, tlak zraka iznosi 69.2% tlaka na razini mora. Ako kisika u zraku ima 21% (na obje visine), koliki je parcijalni tlak kisika na 3000 m? Apsolutni tlak zraka na razini mora je 101 325 Pa.

1689. Aktivacijom žive u nuklearnom reaktoru može se proizvesti zlato, reakcijom ${}^{196}\mathrm{Hg}+n\to\gamma+{}^{197}\mathrm{Hg}$, ${}^{197}\mathrm{Hg}\xrightarrow{\beta+}{}^{197}\mathrm{Au}$. Ako na taj način stvorimo milijardu atoma zlata svake sekunde, koliko je vremena potrebno da bi stvorili 1 gram zlata?

1690. Na Novu godinu, 1. 1. 2019. sonda *New Horizons* proletjet će pored objekta Kuiperovog pojasa *2014MU69*. Brzina letjelice u odnosu na Sunce će iznositi $14.07\ \mathrm{km/s}$, a u odnosu na objekt $14.43\ \mathrm{km/s}$. Letjelica će proći na 3500 km udaljenosti, a objekt je (očekivanog) promjera 30 km. Kolika je prividna veličina objekta pri proletu? Koliko minuta prije (i nakon) najvećeg približenja će prividna veličina biti veća od jedne lučne minute?

1691. Galij je metal koji nakon žive i cezija ima najniže talište, $+30\,^\circ\mathrm{C}$. Gustoća krutog galija je $5904\ \mathrm{kg/m^3}$, a tekućeg $6093\ \mathrm{kg/m^3}$. Koliko će se smanjiti volumen galija ako rastalimo 120 grama tog metala? Ako u tekući galij ubacimo 5 grama krutog galija, koliki će volumen viriti iznad površine?

1692. Uteg na niti jednoliko *rotira* u horizontalnoj ravnini, kao na slici. Kut otklona iznosi 22°, a period rotacije 1.3 sekunde. Odredi duljinu niti. Koliki bi bio period njihanja malog otklona?



C) Rješenja iz matematike

3637. *Riješi jednadžbu*

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x.$$

Rješenje. Jednadžbu možemo napisati u obliku

$$(\sqrt{x-1})^2+(\sqrt{x+3})^2+2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 6-(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})$$

i dalje sređivati

$$(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})^2+(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})+\frac{1}{4}=\frac{25}{4}$$
$$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{4}$$
$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$
$$\sqrt{x+3}=2-\sqrt{x-1}$$
$$x+3=4-4\sqrt{x-1}+x-1$$
$$\sqrt{x-1}=0 \implies x=1.$$

Admir Pozderac (4),
Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH

3638. *Nađi sva realna rješenja x, y, z sustava jednadžbi*
$$\frac{4x^2}{4x^2+1}=y, \quad \frac{4y^2}{4y^2+1}=z, \quad \frac{4z^2}{4z^2+1}=x.$$

Rješenje. Ako je $x=0$, tada je $y=0$, $z=0$ i $(x,y,z)=(0,0,0)$ je jedno rješenje. Za $x\neq 0$ je $y\neq 0$ i $z\neq 0$, pa možemo sustav jednadžbi zapisati u obliku
$$1+\frac{1}{4x^2}=\frac{1}{y}, \quad 1+\frac{1}{4y^2}=\frac{1}{z}, \quad 1+\frac{1}{4z^2}=\frac{1}{x}.$$
Zbrajanjem ovih triju jednadžbi i sređivanjem dobivamo
$$\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^2}\right)+\left(1-\frac{1}{y}+\frac{1}{4y^2}\right)+\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{4z^2}\right)=0.$$
Ovo je ekvivalentno sa
$$\left(1-\frac{1}{2x}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2y}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2z}\right)^2=0.$$
Odavde slijedi $\frac{1}{2x}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2z}=1$ pa dobivamo rješenje $(z,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Obje trojke zadovoljavaju sustav jednadžbi.

Hamza Begić (4),
Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH

3639. *Ako su a, b, $c>0$ dokaži nejednakost*
$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq a+b+c.$$

Rješenje.
$$\frac{a^3}{b^2}+b+b\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^2}\cdot b\cdot b}=3a$$
$$\frac{b^3}{c^2}+c+c\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{c^2}\cdot c\cdot c}=3b$$
$$\frac{c^3}{a^2}+a+a\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{a^2}\cdot a\cdot a}=3c$$
$$\implies \frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}+2(a+b+c)$$
$$\geq 3(a+b+c).$$
Jednadžba vrijedi ako i samo ako je $a=b=c>0$.

Ur.

Napomena. Došlo je do pogreške u formulaciji zadatka. Onako kako je bilo zadano
$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq a+b+c$$
nejednakost ne vrijedi za $a=b=c\neq 1$, kako je primijetila *Maja Drmač*.

3640. *Neka je $p(x)$ polinom trećeg stupnja čije su nultočke r_1, r_2, r_3. Ako je*
$$\frac{p(0.5)+p(-0.5)}{p(0)}=1011,$$
odredi
$$\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_3r_1}.$$

Rješenje. Neka je polinom
$$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d.$$
Podijelimo li koeficijente s a dobijemo
$$p'(x)=x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}.$$
Sada je dani polinom normiran pa po Vièteovim formulama imamo:
$$r_1+r_2+r_3=-\frac{b}{a}$$
$$r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=\frac{c}{a}$$
$$r_1r_2r_3=-\frac{d}{a}.$$
Ako pogledamo izraz čiju vrijednost moramo odrediti, imamo:
$$\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_3r_1}=\frac{r_3+r_1+r_2}{r_1r_2r_3}=\frac{b}{d}.$$

Vratimo se na danu jednakost

$$\frac{p(0.5)+p(-0.5)}{p(0)}=1011.$$

Uvrstimo li umjesto $p(x)$ izraze polinoma ax^3+bx^2+cx+d, imamo:

$$\frac{1}{d}[(a\cdot 0.5^3+b\cdot 0.5^2+c\cdot 0.5+d)$$
$$+(a\cdot(-0.5)^3+b\cdot(-0.5)^2+c\cdot(-0.5)+d)]$$
$$=1011$$

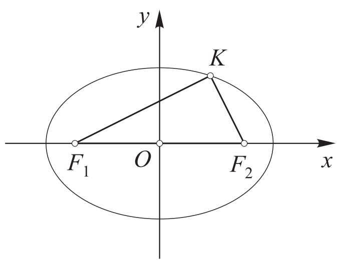
$$\frac{2d+2b\cdot 0.5^2}{d}=1011$$
$$2+\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{d}=1011$$
$$\frac{b}{d}=2018,$$

što je ujedno i tražena vrijednost.

Maja Drmač (2),
XV. gimnazija, Zagreb

3641. *Neka su* F_1 *i* F_2 *žarišta elipse* $4x^2+9y^2=36$*, a* K *je točka na elipsi takva da je* $|KF_1|:|KF_2|=2$*. Kolika je površina trokuta* KF_1F_2*?*

Rješenje. Kod dane elipse imamo $a=3$, $b=2$ i $|KF_1|+|KF_2|=2a=6$.



Kako je $|KF_1|:|KF_2|=2$ dobivamo $|KF_1|=4$, $|KF_2|=2$. Nadalje,

$$|F_1F_2|=2c=2\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{5}.$$

Treba odrediti površinu trokuta sa stranicama $a_1=4$, $b_1=2$, $c_1=2\sqrt{5}$. To možemo izračunati pomoću Heronove formule

$$P_{KF_1F_2}=\sqrt{s(s-a_1)(s-b_1)(s-c_1)}$$

gdje je $s=\dfrac{a_1+b_1+c_1}{2}=3+\sqrt{5}$. Dobivamo $P_{KF_1F_2}=4$.

Napomena. Iz

$$|KF_1|^2+|KF_2|^2=4^2+2^2=20=|F_1F_2|^2$$

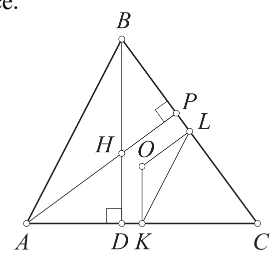
vidimo da je trokut KF_1F_2 pravokutan s katetama $|KF_1|=4$ i $|KF_2|=2$. Zato je

$$P_{KF_1F_2}=\frac{1}{2}|KF_1|\cdot|KF_2|=4.$$

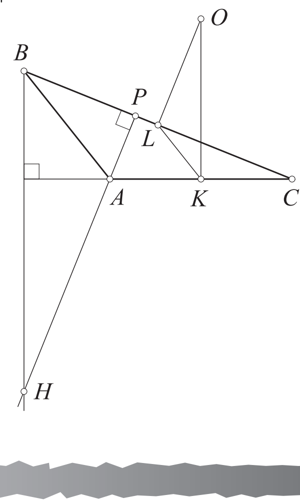
Emina Hadžić (4),
Gimnazija "Visoko", Visoko, BiH

3642. *Dokaži da je u svakom trokutu* ABC *udaljenost od sjecišta visina do vrha* B *jednaka dvostrukoj udaljenosti od središta trokutu opisane kružnice do stranice* $\overline{AC}$*.*

Rješenje. Neka je ABC šiljastokutan trokut, H sjecište visina i O središte opisane mu kružnice, $\overline{BD}$ i $\overline{AD}$ visine, K i L polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, te OK i OL okomice na te stranice.



Trokuti ABH i LKO su slični ($BH\|OK$, $AH\|OL$, $AB\|LK$), pa je $\dfrac{|BH|}{|OK|}=\dfrac{|AB|}{|LK|}$. Kako je $\overline{LK}$ srednjica $\triangle ABC$ imamo $\dfrac{|AB|}{|LK|}=2$, pa je $\dfrac{|BH|}{|OK|}=2$, što je i trebalo pokazati.



Neka je ABC tupokutan trokut, uz iste oznake kao prije. Iz sličnosti trokuta ABH i LKO imamo $\frac{|BH|}{|OK|} = \frac{|AB|}{|LK|} = 2$ i $|BH| = 2|OK|$.

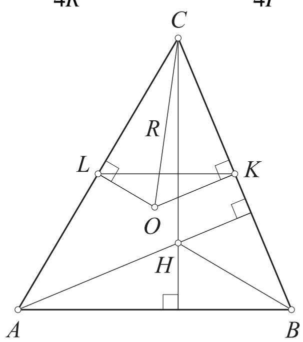
Ahmedin Hasanović (4), Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH

3643. *Točka H je sjecište visina trokuta ABC. Ako je $|AB| = 13$ cm, $|BC| = 14$ cm, $|CA| = 15$ cm, izračunaj duljinu $|BH|$.*

Rješenje. Po Heronovoj formuli površina trokuta ABC je

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

gdje je $a = 14$ cm, $b = 15$ cm, $c = 13$ cm, $s = \frac{a+b+c}{2} = 21$ cm. Dakle, $P = 84\ \text{cm}^2$. Kako je $P = \frac{abc}{4R}$, dobivamo $R = \frac{abc}{4P} = \frac{65}{8}$ cm.



Neka je O središte opisane kružnice trokuta ABC, $OK \perp BC$, $OL \perp AC$, $LK \| AB$, H je sjecište visina. Tada je $\triangle OKL \sim \triangle HAB$. Kako je $\overline{LK}$ srednjica $\triangle ABC$, koeficijent sličnosti je $|AB| : |KL| = 2$. Tada je $|BH| = 2|OL|$ te iz $\triangle OCL$ imamo

$$|OL| = \sqrt{|OC|^2 - |CL|^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{65}{8}\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2} = \frac{25}{8}\ \text{cm}.$$

Sada je $|BH| = 2|OL| = \frac{25}{4}$ cm.

Admir Pozderac (4), Sarajevo

3644. *Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi*

$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x.$$

Rješenje. Neka je $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ako je $x = -a$, imamo:

$$-\frac{1}{a} f(a) + f\left(-\frac{1}{a}\right) = -a.$$

Ako je $x = \frac{1}{a}$, imamo

$$af\left(-\frac{1}{a}\right) + f(a) = \frac{1}{a}.$$

Sada imamo svije jednadžbe s dvije nepoznanice i riješit ćemo ih tako da prvo odredimo $f(a)$.

Iz prve jednadžbe dobijemo

$$f\left(-\frac{1}{a}\right) = -a + \frac{1}{a} f(a),$$

a iz druge

$$a \cdot \left(-a + \frac{1}{a} f(a)\right) + f(a) = \frac{1}{a}$$
$$-a^2 + f(a) + f(a) = \frac{1}{a}$$

tj.

$$f(a) = \frac{a^3 + 1}{2a}.$$

Jedina funkcija koja zadovoljava uvjet je $f(x) = \frac{x^3 + 1}{2x}$.

Maja Drmač (2), Zagreb

3645. *Dan je niz brojeva koji zadovoljava uvjet*

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$$

za nenegativne cijele brojeve m i n takve da je $m \geq n$. Ako je $a_1 = 1$, odredi a_{2018}.

Rješenje. Iz drugog uvjeta za $m = n$ imamo

$$a_{2m} + a_{2n} = 2(a_{2m} + a_0),$$

odakle je $a_0 = 0$. Za $n = 0$ imamo

$$a_{2m} + a_0 = 2(a_m + a_m)$$

odakle je $a_{2m} = 4a_m$. Sada imamo $a_2 = 4$, $a_4 = 16$. Nadalje

$$a_3 + a_1 = \frac{1}{2}(a_4 + a_2) = 10$$

tj. $a_3 = 9$.

Pretpostavimo $a_n = n^2$ za svako $n \geqslant 0$. Ovo ćemo dokazati metodom matematičke indukcije.

Za $n = 0$ je $a_0 = 0$, a za $n = 1$ je $a_1 = 1$.

Za $n > 1$ pretpostavimo $a_i = i^2$ za $i < n$. Tada imamo

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}(a_{2n-2} + a_2) - a_{n-2} \\ &= 2a_{n-1} + 2a_1 - a_{n-2} \\ &= 2(n^2 - 2n + 1) + 2 - (n^2 - 4n + 4) \\ &= n^2. \end{aligned}$$

Dakle, $a_n = n^2$ i konačno, $a_{2018} = 2018^2$

Maja Drmač (2), Zagreb

3646. *Neka su x, y, z realni brojevi takvi da je*

$$\sin x + \sin y + \sin z \geq 2.$$

Dokaži nejednakost

$$\cos x + \cos y + \cos z \leq \sqrt{5}.$$

Rješenje. Lako dokažemo da za realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$(a + b + c)^2 \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Odavde je

$$\begin{aligned} &(\sin x + \sin y + \sin z)^2 + (\cos x + \cos y + \cos z)^2 \\ &\leqslant 3(\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z \\ &\quad + \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z) = 9 \\ &\cos x + \cos y + \cos z \\ &\leqslant \sqrt{9 - \sin x + \sin y + \sin z} \ / \ ^2. \end{aligned}$$

Kako je $\sin x + \sin y + \sin z \geqslant 2$, imamo

$$\cos x + \cos y + \cos z \leqslant \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

Adna Medošević (4),
Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH

3647. *Odredi sumu*

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Rješenje. Opći član sume je $\dfrac{1}{k+1}\dbinom{n}{k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Pomnožimo sumu s $n + 1$ i promatrajmo opći član nove sume.

$$\begin{aligned} (n+1) \cdot \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} &= \frac{n+1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)} \\ &= \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

Sada dobivamo

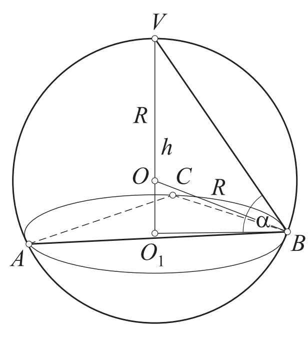
$$\begin{aligned} (n+1)S &= (n+1)\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0} \\ &= 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Konačno je $S = \dfrac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

Ahmedin Hasanović (4), Sarajevo

3648. *Uspravna trostrana piramida ima bazu stranice a kojoj su bočni bridovi pod kutom α prema bazi. Koliki je volumen kugle opisane toj piramidi?*

Rješenje. Neka je $VABC$ piramida, O središte opisane sfere, O_1 središte kružnice opisane trokutu ABC.



Tada je $|VO| = |OB| = R$. Tada je $V = \dfrac{4}{3}R^3\pi$.

Nadalje, $|VO_1| = h$. Imamo

$$|O_1B| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$h = |O_1B| \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\alpha$$

$$|OO_1| = h - R$$

$$(h-R)^2 = R^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\Longrightarrow R = \frac{a}{\sqrt{3}\sin 2\alpha}$$

$$V = \frac{4\sqrt{3}a^3\pi}{27\sin^3 2\alpha}.$$

Alen Mrdović (4), Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH

3649. *Ako su α, β, γ rješenja jednadžbe $x^3 + px + q = 0$ izračunaj vrijednost determinante*

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Neka je $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$.

Dodamo prvom retku drugi i treći i sređujemo:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}.$$

Radi Vièteovih formula je $\alpha + \beta + \gamma = 0$, pa je $D = 0$.

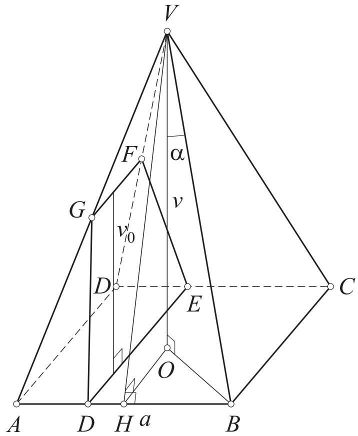
Alen Mrdović (4), Sarajevo

3650. *Stranica baze pravilne četverostrane piramide je a, dok je kut između visine i bočnog brida jednak α. Kroz točku koja dijeli stranicu baze u omjeru $1:3$ povučena je ravnina okomita na bazu koja je paralelna jednoj stranici baze. Odredi površinu presjeka piramide i ravnine.*

Rješenje. Kako je $|AD| = \frac{1}{4}a$, $|AG| = \frac{1}{2}|AV| = |DF|$ pa je $|GF| = \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{2}a$. Nadalje,

$$v = |VO| = |OB| \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg}\alpha$$

$$v_0 = \frac{1}{2}v = \frac{a\sqrt{2}}{4}\operatorname{ctg}\alpha.$$



Četverokut $DEFG$ je trapez, $|DE| = a$, $|GF| = \frac{a}{2}$, $v_0 = \frac{a\sqrt{2}}{4}\operatorname{ctg}\alpha$ odakle je

$$P = \frac{|DE| + |GF|}{2} \cdot v_0$$

$$= \frac{a + \frac{v}{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3a^2\sqrt{2}}{16}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ahmedin Hasanović (4), Sarajevo

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 438. *Prosječna gustoća zraka u blizini tla iznosi 1.295 kg/m^3 i s nadmorskom se visinom smanjuje. Tlak zraka na razini mora iznosi 1013 hPa. Kolika bi bila debljina Zemljine atmosfere kad bi gustoća zraka bila na svim visinama jednaka onoj u blizini tla?*

Rješenje.

$$\rho = 1.295 \text{ kg/m}^3$$

$$p = 1013 \text{ hPa} = 101\,300 \text{ Pa}$$

$$\underline{g = 10 \text{ m/s}^2}$$

$$h = ?$$

Iz $p = \rho g h$ slijedi

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{101\,300 \text{ Pa}}{1.295 \ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 7822.4 \text{ m}.$$

Borna Cesarec (8), OŠ Augusta Cesarca, Krapina

OŠ – 439. *Automobil mase 1.2 tone vozi brzinom 54 km/h i pred njega, na udaljenosti 30 metara, odjednom istrči pas. Kolikom prosječnom silom kočenja treba vozač djelovati da ne bi pregazio psa?*

Rješenje.

$m = 1.2\ \text{t} = 1200\ \text{kg}$

$v = 54\ \text{km/h} = 15\ \text{m/s}$

$\underline{s = 30\ \text{m}}$

$f = ?$

$v^2 = 2as$

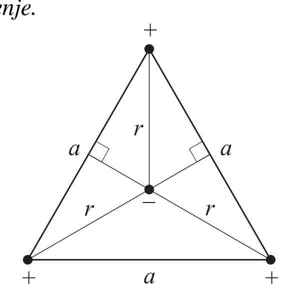
$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{\left(15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 30\ \text{m}} = \frac{15}{8}\ \text{m/s}^2$$
$$= 1.875\ \text{m/s}^2$$

$F = ma = 1200\ \text{kg} \cdot 1.875\ \text{m/s}^2 = 2250\ \text{N}.$

Borna Cesarec (8), Krapina

OŠ – 440. *Električna je sila između dva nabijena tijela proporcionalna umnošku njihovih naboja i obrnuto proporcionalna kvadratu njihove udaljenosti. Ako se u vrhove jednakostraničnog trokuta postave tri tijela s jednakim pozitivnim nabojem kamo treba postaviti jedno negativno nabijeno tijelo da rezultantna sila na sva tijela bude jednaka nuli? Koliki bi po iznosu trebao biti taj negativni naboj u odnosu na naboje pozitivnih tijela?*

Rješenje.



Označimo iznos pozitivnog naboja s Q_1, a iznos negativnog naboja s Q_2. Električna sila između pozitivnih naboja jednaka je

$$F = k\frac{Q_1 Q_1}{a^2},$$

a električna sila između negativnog i pozitivnog naboja jednaka je

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2},$$

gdje je r polumjer opisane kružnice jednakostraničnog trokuta, pa je

$$r = \frac{a}{3}\sqrt{3}.$$

Iz jednakosti

$$k\frac{Q_1 Q_1}{a^2} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

slijedi

$$\frac{Q_1}{a^2} = \frac{Q_2}{r^2}, \quad a^2 Q_2 = r^2 Q_1.$$

Sada ćemo r zamijeniti s $\frac{a}{3}\sqrt{3}$

$$a^2 Q_2 = \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 Q_1,$$

pa slijedi

$$a^2 Q_2 = \frac{a^2 \cdot 3}{9} Q_1$$

odnosno

$$Q_2 = \frac{1}{3} Q_1.$$

Po iznosu negativan naboj je jednak $\frac{1}{3}$ iznosa pozitivnog naboja i treba biti postavljen u središte tom trokutu opisane kružnice.

Borna Cesarec (8), Krapina

OŠ – 441. *Grički top je jedna od zagrebačkih znamenitosti i od 1877. godine puca svakog dana točno u podne. Brzina zvuka u zraku ovisi o temperaturi, $v = 20\sqrt{T}$, gdje je T temperatura u kelvinima. Hrvojev je dom udaljen 700 metara zračne udaljenosti od kule Lotrščaka gdje je smješten top. Koliko dulje putuje zvuk pucnja do njegovog stana zimi, kad je temperatura $-10\,^\circ C$, nego ljeti, kad je ona $30\,^\circ C$?*

Rješenje.

$v = 20\sqrt{T}$

$s = 700$ m

$t_1 = -10\,^\circ$C

$T_1 = 263$ K

$t_2 = 30\,^\circ$C

$\underline{T = 303 \text{ K}}$

$\Delta t = ?$

$v_1 = 20\sqrt{T} = 20\sqrt{263}$ m/s

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{700 \text{ m}}{20\sqrt{263} \text{ m/s}} = 2.16 \text{ s}$$

$v_2 = 20\sqrt{T}$

$v_2 = 20\sqrt{303}$ m/s

$$t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{700 \text{ m}}{20\sqrt{303} \text{ m/s}} = 2.01 \text{ s}$$

$\Delta t = t_1 - t_2 = 2.16 \text{ s} - 2.01 \text{ s} = 0.15$ s.

Borna Cesarec (8), Krapina

1672. *Odredi ubrzanje tijela koje se nakon 100 prevaljenih metara giba 120 % brže nego na početku gibanja. Tijelo se udaljilo tih 100 m u 25 sekundi od početka gibanja. Gibanje je pravocrtno i jednoliko ubrzano.*

Rješenje. Ako s v_0 označimo početnu, a s v brzinu nakon 100 metara, imamo

$$v = v_0 + 120\ \% v_0 = 2.2v_0.$$

Kako je gibanje jednoliko ubrzano, prevaljeni put je

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{v_0 + 2.2v_0}{2} \cdot t = 1.6v_0t.$$

Odatle izračunamo početnu brzinu

$$v_0 = \frac{s}{1.6t} = \frac{100}{1.6 \cdot 25} = 2.5 \text{ m/s}.$$

Iz $v = v_0 + at$ slijedi

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{1.2v_0}{t} = \frac{1.2 \cdot 2.5}{25} = 0.12 \text{ m/s}^2.$$

Borna Cesarec (1),
Srednja škola Krapina, Krapina

1673. *Kojom se brzinom giba zvuk u čistom heliju pri sobnoj temperaturi $T = 20\,^\circ C$? Koliko je puta ta brzina veća od brzine zvuka u zraku pri istoj temperaturi?*

Rješenje. Brzinu zvuka u idealnom plinu možemo odrediti jednadžbom

$$v^2 = \frac{\gamma RT}{M},$$

gdje je γ koeficijent adijabatske ekspanzije ($\frac{7}{5}$ za zrak i $\frac{5}{3}$ za helij), T je apsolutna temperatura, a M masa čestice plina u (kg/mol). Za helij dobivamo

$$v_{\text{He}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 8.314 \cdot 293.15}{3 \cdot 0.004}} = 1007.7 \text{ m/s},$$

a za zrak

$$v_{\text{zrak}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 8.314 \cdot 293.15}{5 \cdot 0.029}} = 343.0 \text{ m/s}.$$

Omjer brzina je 2.9379, tj. zvuk je u heliju 2.9379 puta brži nego u zraku.

Ur.

1674. *Asteroid mase $3 \cdot 10^{18}$ kg ima satelit zanemarive mase koji napravi jednu orbitu oko asteroida u 32 sata. Odredi prosječnu udaljenost satelita od težišta asteroida.*

Rješenje. Primijenimo treći Keplerov zakon na gibanje:

$$a^3 = \frac{Gm_A}{4\pi^2} \cdot T^2,$$

gdje je a duljina velike poluosi elipse putanje satelita, m_A je masa asteroida, a T ophodno vrijeme. Uvrstimo li zadane brojeve u gornji izraz, dobivamo

$$a^3 = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 10^{18}}{39.4784} \cdot 115\,200^2,$$

što daje $a = 406.772$ km. Kod Keplerovih orbita, duljina velike poluosi je ujedno i prosječna udaljenost.

Ur.

1675. *Nedavno lansirani Tesla Roadster giba se po elipsi oko Sunca, tako da napravi 36 orbita u 55 godina. Ako uzmemo da mu je točka lansiranja perihel putanje, udaljen 1 astronomsku jedinicu od Sunca, odredi koliko će biti udaljen od Sunca u ahelu, najdaljoj točki putanje. Koliki je ekscentricitet te putanje?*

Rješenje. Ako znamo da je Zemlja prosječno udaljena 1 a.j. od Sunca i da je ophodno vrijeme jednu godinu, za svako tijelo koje orbitira oko Sunca vrijedi $a^3 = T^2$, uz odabir astronomske jedinice za a i godine za T. Primjenjeno na *Tesla Roadster*, za veliku poluos dobivamo

$$a = T^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{55}{36}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.3265 \text{ a.j.}$$

Za udaljenost u perihelu $r_{\min}$ i udaljenost u ahelu $r_{\max}$ vrijedi

$$r_{\min} + r_{\max} = 2a,$$

a s obzirom da je $r_{\min} = 1$, slijedi $r_{\max} = 1.653$ a.j. Za numerički ekscentricitet elipse ε znamo da je

$$r_{\min} = a(1-\varepsilon),$$
$$r_{\max} = a(1+\varepsilon).$$

Iz bilo koje od te dvije jednadžbe dobivamo $\varepsilon = 0.25658$.

Ur.

1676. *Ljudsko tijelo sadrži 0.25 % kalija (maseni udio), a prirodni kalij sadrži 0.0117 % radioaktivnog izotopa ^{40}K, vremena poluraspada 1.277 milijardi godina. Odredi ukupan broj jezgri ^{40}K u ljudskom tijelu mase 80 kg, te aktivnost (broj raspada u sekundi) u tom tijelu.*

Rješenje. 0.25 % kalija iznosi $m(\mathrm{K}) = 200$ g, a izotopa $^{40}\mathrm{K}$ tada ima $m(^{40}\mathrm{K}) = 0.0234$ g. Iz Avogadrovog broja i molarne mase (40 g/mol) odredimo da je broj atoma $^{40}\mathrm{K}$ jednak $3.52287 \cdot 10^{20}$, naravno uz jednak broj jezgri $^{40}\mathrm{K}$. Aktivnost dobijemo iz izraza (derivacije zakona radioaktivnog raspada):

$$A = \frac{N}{T} \cdot \ln 2 = \frac{3.52287 \cdot 10^{20}}{4.0299 \cdot 10^{16}} \cdot 0.693147 = 6059.4 \text{ Bq}.$$

Dakle iako prosječno žive preko milijardu godina, svake nam se sekunde u tijelu raspadne 6000 atoma kalija-40. To je zato što ih ima tisućama puta više, nego što je sekundi u milijardi godina!

Ur.

1677. *U kalorimetru je kocka leda temperature $0\,^\circ C$. Ulijemo 0.419 kg vode, temperature $43\,^\circ C$. Ravnotežna temperatura se uspostavi na $5\,^\circ C$. Odredi početnu masu leda u kalorimetru i porast entropije do postizanja ravnoteže. ($c_v = 4190$ J/kgK, $\lambda_l = 330$ kJ/kg.)*

Rješenje. Ulivena voda hlađenjem s $T_1 = 43\,^\circ\mathrm{C}$ na $\tau = 5\,^\circ\mathrm{C}$ daje toplinsku energiju

$$Q = m_v c_v \Delta T_v = 0.419 \cdot 4190 \cdot 38 = 66713.18 \text{ J},$$

koja je jednaka energiji koju primi led, to jest

$$Q = m_l(\lambda_l + c_v \Delta T_l),$$
$$66\,713.18 = m_l(330\,000 + 4190 \cdot 5)$$

odatle je početna masa leda $m_l = 0.190093$ kg. Entropija ulivene vode S_1 se smanjila hlađenjem,

$$S_1 = m_v c_v \ln\left(\frac{\tau}{T_1}\right) = -224.931 \text{ J/K}.$$

Entropija leda S_2 se povećala zbog otapanja leda, i zagrijavanja nastale vode do τ,

$$S_2 = \frac{m_l \lambda_l}{T_2} + m_l c_v \ln\left(\frac{\tau}{T_2}\right) = 229.783 + 14.456 \text{ J/K}.$$

Ukupan porast entropije je

$$S = S_1 + S_2 = 19.308 \text{ J/K}.$$

Ur.

1678. *Sabirna leća daje realnu sliku, obrnutu i 14 % umanjenu. Ako leću približimo predmetu za 20 cm, slika je virtualna, uspravna i 70 % uvećana. Odredi jačinu leće u dioptrijama.*

Rješenje. Ako je prvobitna udaljenost leće i predmeta a, leće i slike b, a jačina leće J, iz jednadžbe leće imamo

$$J = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad \frac{b}{a} = 1 - 0.14 = 0.86.$$

Za drugi slučaj vrijedi

$$a' = a - 0.2 \text{ m},$$
$$J = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'}, \quad \frac{b'}{a'} = -1.7.$$

Omjeri udaljenosti nam omogućuju da sve izrazimo pomoću a, i izjednačimo jakost u oba slučaja:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{0.86a} = \frac{1}{a-0.2} - \frac{1}{1.7(a-0.2)}.$$

Odatle dobijemo

$$a = \frac{15.81}{64} = 0.247 \text{ m},$$

što uz $b = 0.86a$ iz prve jednadžbe daje

$$J = \frac{198\,400}{22\,661} = 8.755 \text{ dpt}.$$

Ur.