59. Međunarodna matematička olimpijada 2018. g.

Od 3. do 14. srpnja 2018. u gradu Cluj-Napoca u Rumunjskoj održavala se 59. Međunarodna matematička olimpijada (MMO). Na natjecanju je sudjelovalo 594 učenika iz 107 država. Hrvatsku su predstavljali: *Petar Nizić-Nikolac* i *Tadej Petar Tukara* (XV. gimnazija, Zagreb), *Ivan Novak* (Srednja škola Vrbovec), *Borna Šimić* (Gimnazija Matije Mesića, Slavonski Brod), *Ilja Uzelac-Bujišić* (Matematička gimnazija, Beograd) i *Marin Varivoda* (Gimnazija Franje Petrića, Zadar). Voditelji ekipe su bili *Matija Bucić*, s ETH u Zürichu, Švicarska, i *Petar Bakić*, s Matematičkog odsjeka PMF-a u Zagrebu.

Na ceremoniji otvaranja učenike je pozdravio i zaželio im uspjeh i ugodan boravak rumunjski predsjednik *Klaus Iohannis*. Natjecanje je trajalo dva dana, a svakog dana imali su četiri i pol sata za rješavanje po tri zadatka. Nakon natjecanja uslijedilo je pregledavanje rješenja i koordinacija. Za to vrijeme učenici su imali priliku uživati u izletima u rudnik soli Salina Turda i grad Alba Iulia. Ceremoniju zatvaranja uživo je popratila rumunjska nacionalna televizija. Na kraju je najavljeno da će se iduća MMO održati u mjestu Bath u Engleskoj. Srebrne medalje za hrvatsku su osvojili *Ivan Novak*, *Tadej Petar Tukara*, *Ilja Uzelac-Bujišić* i *Marin Varivoda*, dok je brončanu medalju ponio *Petar Nizić-Nikolac*. Ekipno je Hrvatska zauzela 22. mjesto, što je drugi najveći uspjeh u povijesti sudjelovanja Hrvatske na MMO.

natjecatelj	P1	P2	P3	P4	P5	P6	ukupno	osvojeno
M. Varivoda	7	7	0	7	7	2	30	srebrna
I. Novak	7	6	0	7	7	0	27	srebrna
T. P. Tukara	7	5	0	7	7	0	26	srebrna
I. Uzelac Bujišić	7	7	0	7	4	0	25	srebrna
P. Nizić-Nikolac	5	7	0	4	7	1	24	brončana
B. Šimić	2	1	0	4	6	0	13	
ekipni rezultat	35	33	0	36	38	3	145	S,S,S,S,B

Od prvog dana boravka u Cluj-Napoci bilo nam je jasno da rumunjski organizatori nisu nimalo podcijenili značaj ovog događaja. Po cijelom su gradu bili razasuti plakati olimpijade na razno-raznim mjestima, na klupama i u autobusima. Natjecatelji su bili smješteni u nekoliko hotela. Voditelji u hotelu Grand Italia, a hrvatska ekipa u hotelu Victoria. Natjecanje se održavalo za vrijeme Svjetskog nogometnog prvenstva u Rusiji, te smo vatrene u četvrtfinalu i polufinalu bodrili iz lokalnih kafića. Zadaci na natjecanju su ove godine bili znatno lakši nego proteklih godina. Nije bilo velikog skoka u težini između prvog i drugog, niti četvrtog i petog, te je većina naših učenika riješila po tri ili četiri zadatka. Zbog toga je prag za srebro bio veoma visok i puno je toga ovisilo o parcijalnim bodovima. Zahvaljujući trudu naših voditelja svi su članovi ekipe ostvarili bodove kojima su se nadali i postigli izvrsne rezultate.

Tadej Petar Tukara

Zadatci

Prvi dan, Cluj-Napoca, ponedjeljak, 9. srpnja 2018.

Zadatak 1. Neka je Γ opisana kružnica šiljastokutnog trokuta ABC. Točke D i E se nalaze na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, redom, tako da je $|AD| = |AE|$. Simetrale dužina $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ sijeku kraće lukove AB i AC kružnice Γ u točkama F i G, redom. Dokaži da su pravci DE i FG paralelni (ili se poklapaju).

Zadatak 2. Pronađi sve prirodne brojeve $n \geq 3$ za koje postoje realni brojevi a_1, $a_2, \ldots, a_{n+2}$, takvi da je $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ i $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$.

Zadatak 3. *Anti-Pascalov trokut* je tablica u obliku jednakostraničnog trokuta koja se sastoji od brojeva tako da, osim za brojeve u posljednjem retku, svaki je broj jednak apsolutnoj vrijednosti razlike dva broja koji su neposredno ispod njega. Na primjer, sljedeća tablica je anti-Pascalov trokut s četiri retka, koji se sastoji od svih prirodnih brojeva od 1 do 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Postoji li anti-Pascalov trokut s 2018 redaka, koji se sastoji od svih prirodnih brojeva od 1 do $1 + 2 + \ldots + 2018$?

Drugi dan, Cluj-Napoca, utorak, 10. srpnja 2018.

Zadatak 4. *Pozicija* je bilo koja točka (x, y) u ravnini takva da su x i y prirodni brojeva manji ili jednaki 20.

Na početku, svaka od 400 pozicija je slobodna. Ana i Borna igraju igru u kojoj naizmjenično povlače poteze, pri čemu Ana igra prva. U svakom svom potezu Ana postavlja novi crveni kamenčić na slobodnu poziciju tako da je udaljenost bilo koje dvije pozicije na kojima se nalaze crveni kamenčići različita od $\sqrt{5}$. U svakom svom potezu Borna postavlja novi plavi kamenčić na neku slobodnu poziciju. (Pozicija na kojoj se nalazi plavi kamenčić može biti na bilo kojoj udaljenosti od drugih pozicija na kojima se nalazi neki kamenčić.) Igra završava kad neki igrač više ne može povući potez.

Odredi najveći broj K takav da Ana sigurno može postaviti barem K crvenih kamenčića, bez obzira na to kako Borna postavlja svoje plave kamenčiće.

Zadatak 5. Neka je a_1, $a_2, \ldots$ beskonačan niz prirodnih brojeva. Pretpostavimo da postoji prirodan broj $N > 1$ takav da je za sve prirodne brojeve $n \geqslant N$

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

cijeli broj. Dokaži da postoji prirodan broj M takav da je $a_m = a_{m+1}$ za sve $m \geqslant M$.

Zadatak 6. Neka je $ABCD$ konveksan četverokut takav da je $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$. Točka X leži unutar $ABCD$ tako da vrijedi

$$|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle XCD| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle XBC| = |\sphericalangle XDA|.$$

Dokaži da je $|\sphericalangle BXA| + |\sphericalangle DXC| = 180^\circ$.

Vrijeme rješavanja svakog dana: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Rang-lista

	nagrade I	II	III	poh.	broj bod.
SAD	5	1			212
Rusija	5	1			201
Kina	4	2			199
Ukrajina	4	2			186
Tajland	3	3			183
Tajvan	3	1	2		179
Južna Koreja	3	3			177
Singapur	2	3	1		175
Poljska	1	5			174
Indonezija	1	5			171
Australija	2	3	1		169
Velika Britanija	1	4		1	161
Japan	1	3	2		158
Srbija	2	2	2		158
Mađarska		4	2		157
Kanada		5	1		156
Italija		4	2		154
Kazahstan		4	2		151
Iran	1	3	1	1	150
Vijetnam	1	2	3		148
Bugarska	1	3	1	1	146
Hrvatska		4	1		145
Slovačka		3	3		140
Švedska	1	2	2	1	138
Turska	1	1	4		138
Izrael		2	4		136
Gruzija		1	5		133
Brazil	1		4	1	132
Indija		3	2	1	132
Mongolija		1	5		132
Njemačka	1	2	1	2	131
Armenija		2	4		130
Francuska	1	1	4		129
Rumunjska	1	1	2	2	129
Peru		2	3	1	125
Meksiko		1	4	1	123
Nizozemska		1	4	1	123
Filipini	1	1	2	2	121
Argentina		1	4		115
Češka		2	2	2	115
Bangladeš	1		3	2	114
Slovenija		1	1	4	104
Bosna i Hercegovina			4	2	103
Tađikistan			5	1	103
Bjelorusija			4	1	102
Novi Zeland		1	2	3	102
Belgija			4	1	92
Malezija			2	3	90
Hong Kong			2	4	89
Moldavija			3	3	86
Estonija		1		3	80
Litva			2	3	77
Portugal			2	3	77
Grčka			2	3	74

	nagrade I	II	III	poh.	broj bod.
Španjolska			2	4	74
Norveška			2	1	73
Austrija			3	1	72
Danska			3		71
Finska			2	2	70
Saudijska Arabija		1	1	1	69
Sirija			2	2	69
Južnoafrička Republika			1	4	66
Kostarika (5)			2	2	65
Turkmenistan			1	4	65
Makao			1	3	61
Kolumbija			1	2	59
Island			1	3	56
Švicarska			1	1	52
Azerbajdžan				5	50
Tunis				3	49
Ekvador				3	48
Šri Lanka			1	3	47
Maroko				3	46
Portoriko			1	1	46
Cipar (5)			1	1	45
Island			1	1	43
Kirgistan				4	41
Latvija				2	40
Albanija				1	37
Pakistan				3	35
Bolivija				3	33
Makedonija				2	27
Nigerija (3)				2	26
Trinidad i Tobago (3)				1	26
Mianmar				2	23
Kosovo				2	21
Panama (4)				2	21
Uzbekistan (3)				2	21
Crna Gora (4)				1	20
Salvador (2)				2	20
Čile (4)				2	19
Alžir (4)					18
Luksemburg (2)				1	14
Gana (5)					13
Bocvana				1	12
Paragvaj					12
Gvatemala (3)				1	11
Kambodža					11
Egipat (4)				1	10
Irak					9
Uganda (4)					9
Obala Bjelokosti				1	8
Urugvaj (4)					7
Honduras (3)					6
Nepal					5
Venecuela (1)					2
Tanzanija (3)					1

Broj u zagradi je broj natjecatelja kada je on manji od 6.