12. Srednjoeuropska matematička olimpijada 2018. g.

MEMO
The 12th Middle European Mathematical Olympiad

Na upravo završenoj 12. Srednjoeuropskoj matematičkoj olimpijadi u Bielsko-Białi, u Poljskoj (27. kolovoza – 2. rujna 2018. g.), sudjelovalo je 66 učenika iz 11 srednjoeuropskih država: Austrije, Češke, Hrvatske, Litve, Mađarske, Njemačke, Poljske, Slovačke, Slovenije, Švicarske i Ukrajine.

Hrvatsku olimpijsku ekipu predstavljali su učenici: *Luka Bulić Bračulj* (III. gimnazija, Split), *Noel Lakić* (Gimnazija Franje Petrića, Zadar), *Krunoslav Ivanović*, *Krešimir Nežmah*, *Andrija Tomorad*, *Ivan Vojvodić* (XV. gimnazija, Zagreb). Voditelji ekipe bili su *Ivan Krijan* i *Ivan Kokan*.

Učenici su se, kao i obično, natjecali pojedinačno i ekipno rješavajući zadatke olimpijskog tipa iz algebre, kombinatorike, geometrije i teorije brojeva.

Petu godinu zaredom jedan od hrvatskih natjecatelja osvojio je zlatnu medalju na pojedinačnom natjecanju. Ove godine taj izniman uspjeh postigao je *Noel Lakić*, uz stopostotnu riješenost zadataka. I ostali članovi ekipe ostvarili su odličan rezultat osvajanjem medalja: *Krunoslav Ivanović* srebrnu, a *Andrija Tomorad*, *Luka Bulić Bračulj*, *Ivan Vojvodić* i *Krešimir Nežmah* brončane.

Na još uzbudljivijem i neizvjesnijem ekipnom natjecanju, Hrvatska je ostvarila izvrstan uspjeh osvojivši drugo mjesto – ispred Mađarske, a iza Ukrajine (koja je na ovom natjecanju sudjelovala kao gost na poziv domaćina Poljske).

Put na olimpijadu i pripreme natjecatelja organiziralo je i provelo Hrvatsko matematičko društvo uz pomoć udruge Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić", a financiralo Ministarstvo znanosti i obrazovanja.

Više informacija o natjecanju, zadatcima i rezultatima može se naći na službenoj web-stranici ovogodišnje Srednjoeuropske matematičke olimpijade:

`http://www.memo2018.abel.bielsko.pl/`

Put u Poljsku, natjecanje na olimpijadi i druženje s matematičarima iz desetak država iz Europe u kasnovečernjim satima završilo je na zagrebačkom Glavnom kolodvoru.

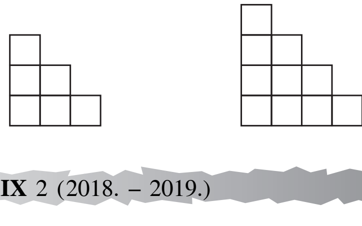
Voditelji ekipe: *Ivan Krijan* i *Ivan Kokan*

Zadatci s pojedinačnog natjecanja, 29. kolovoza 2018.

I-1. Neka je $\mathbb{Q}^+$ skup svih pozitivnih racionalnih brojeva i neka je $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{Q}^+ \to \langle \alpha, +\infty \rangle$ takve da je

$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{\alpha}, \qquad \text{za sve } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

I-2. Dva oblika prikazana na slici ispod, koja se sastoje od redom 6 i 10 jediničnih kvadratića, nazivamo *stepenicama*.



Promatrajmo ploču dimenzija 2018×2018 koja se sastoji od 2018^2 polja, od kojih je svako jedinični kvadratić. Dva proizvoljna polja su uklonjena iz nekog retka ploče. Dokaži da se ostatak ploče ne može izrezati (uzduž rubova polja) u stepenice (moguće rotirane).

I-3. Neka je ABC šiljastokutni trokut u kojem je $|AB| < |AC|$ i neka je D nožište njegove visine iz vrha A. Neka su R i Q redom težišta trokuta ABD i ACD. Neka je P točka na dužini $\overline{BC}$ takva da je $P \neq D$ i da su točke P, Q, R i D konciklične. Dokaži da se pravci AP, BQ i CR sijeku u jednoj točki.

I-4. a) Dokaži da za svaki prirodni broj m postoji prirodni broj $n \geqslant m$ takav da je

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m}. \tag{$*$}$$

b) Označimo s $p(m)$ najmanji prirodni broj $n \geqslant m$ za koji vrijedi jednakost $(*)$. Dokaži da je $p(2018) = p(2019)$.

Napomena. Za realni broj x, $\lfloor x \rfloor$ označava najveći cijeli broj koji nije veći od x.

Zadatci s ekipnog natjecanja, 30. kolovoza 2018.

T-1. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokažite da je

$$\frac{a^2-b^2}{a+bc} + \frac{b^2-c^2}{b+ca} + \frac{c^2-a^2}{c+ab} \leqslant a+b+c-3.$$

T-2. Neka je $P(x)$ polinom stupnja $n \geqslant 2$ s racionalnim koeficijentima takav da $P(x)$ ima n međusobno različitih realnih korijena koji tvore aritmetički niz. Dokažite da među korijenima od $P(x)$ postoje dva koja su ujedno korijeni nekog polinoma stupnja 2 s racionalnim koeficijentima.

T-3. U grupi pirata neki su se međusobno posvađali i sada svaki od njih drži neku drugu dvojicu na ciljniku. Sve pirate se proziva jednog po jednog nekim redoslijedom. Ako je prozvani pirat i dalje živ, on upuca obojicu pirata koje drži na ciljniku (od kojih je neki možda već mrtav). Svi pucnjevi su smjesta smrtonosni. Nakon što su svi pirati prozvani, ispostavilo se da ih je točno 28 ubijeno. Dokažite da bi za bilo koji drugi redoslijed prozivanja bilo ubijeno najmanje 10 pirata.

T-4. Neka je n prirodni broj i neka su u_1, $u_2, \ldots, u_n$ prirodni brojevi koji nisu veći od 2^k, za neki prirodni broj $k \geqslant 3$. *Reprezentacija* nenegativnog cijelog broja t je niz a_1, $a_2, \ldots, a_n$ nenegativnih cijelih brojeva takvih da je

$$t = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n.$$

Ako nenegativni cijeli broj t ima reprezentaciju, dokažite da onda ima i reprezentaciju u kojoj niz a_1, $a_2, \ldots, a_n$ ima manje od $2k$ članova različitih od nule.

T-5. Neka je ABC šiljastokutni trokut u kojem je $|AB| < |AC|$ i neka je D nožište njegove visine iz vrha A. Točke B' i C' redom leže na polupravcima AB i AC, tako da su točke B', C' i D kolinearne i da točke B, C, B' i C' leže na istoj kružnici sa središtem O. Ako je M polovište dužine $\overline{BC}$, a H ortocentar trokuta ABC, dokažite da je $DHMO$ paralelogram.

T-6. Neka je ABC trokut. Simetrala unutarnjeg kuta $\sphericalangle ABC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki L, a kružnicu opisanu trokutu ABC ponovno u točki $W \neq B$. Neka je K ortogonalna projekcija točke L na pravac AW. Kružnica opisana trokutu BLC siječe pravac CK ponovno u točki $P \neq C$. Pravci BP i AW se sijeku u točki T. Dokažite da je $|AW| = |WT|$.

T-7. Neka je a_1, a_2, a_3,... niz prirodnih brojeva takvih da je

$$a_1 = 1 \qquad \text{i} \qquad a_{k+1} = a_k^3 + 1, \quad \text{za sve prirodne brojeve } k.$$

Dokažite da za svaki prosti broj p oblika $3\ell + 2$, pri čemu je ℓ nenegativni cijeli broj, postoji prirodni broj n takav da p dijeli a_n.

T-8. Cijeli broj n nazivamo *šleskim* ako postoje prirodni brojevi a, b i c takvi da je

$$n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

a) Dokažite da postoji beskonačno mnogo šleskih cijelih brojeva.

b) Dokažite da nisu svi prirodni brojevi šleski.