

## Sudoku – napredne metode rješavanja (7.2)

Žarko Čulić<sup>1</sup>

U ovom će nastavku biti govora o metodi *eliminacije kandidata na temelju isključenja mogućih parova povezanih polja* (*Aligned Pair Exclusion*, ili kraće *APE*). Radi se o strategiji koja se naziva i *isključenje podsetova* (*Subset Exclusion*) kojom se provodi eliminacija kandidata na temelju mogućih kombinacija kandidata u parovima povezanih polja. Metoda se temelji na jednostavnoj činjenici da bilo koja dva povezana polja ne smiju duplicirati sadržaj bilo kojeg *gotovo zaključanog seta* (*Almost Locked Sets*, *ALS*) s kojim su povezani. Prisjetimo se da je polje s parom kandidata (polje sa samo 2 kandidata) najjednostavniji *ALS* budući da se u jednom polju nalaze dva kandidata, dakle jedan više od potrebnog). Ako u dva početna polja povezana u retku, stupcu ili kvadratu imamo kombinacije kandidata koje već postoje u s njima povezanim poljima, tada te kombinacije nisu moguće jer bi jedno od povezanih polja ostalo prazno (bez kandidata). *U slučaju da niti jedna kombinacija s nekim kandidatom nije moguća, tog kandidata možemo eliminirati iz početnih polja.*

To je relativno naporna tehnika zbog čega nije osobito popularna, a većina situacija se može jednostavnije riješiti primjenom metoda *XY-Krila* i *XYZ-Krila* ili *ALS-XZ*. Postoje dvije varijante koje ćemo obraditi u daljnjem tekstu.

Pogledajmo primjer na slici 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	5 9	3	4	6 8 9	5 8 9	7	2	1 8	6
B	2 9	7	2 8 9	1 4 6 8 9	1 4 8 9	4 6 8 9	4 6 8	3	5
C	6	1	5 8	4 8	3 4 5 8	2	4 8	9	7
D	7	8	1 9	2	6	3	5	4 1	9
E	4 9	4 6	3	5	7	1	6 8 9	6 8	2
F	1 2 5	2 6	1 2 5 6	4 8	4 8	9	3	7	1 6
G	1 2 4	2 4 6	1 2 6	1 3 6 8 9	1 2 3 8 9	5	7	2 6 8 9	3 6
H	8	9	2 7	3 4 6 7	2 3 4 6	4 6	1	5	4 3 6
I	3	5	1 2 6 7	1 4 6 7 8 9	1 2 4 6 8 9	4 6 8	6 8 9	6 8	4 6 8 9

Slika 1.

Pokušajmo istražiti moguća rješenja u poljima E1 i F1 (to su odabrana početna polja): kandidati u E1 su  $\{4, 9\}$ , a u F1  $\{1, 2, 5\}$ . Moguće kombinacije rješenja u tim poljima su sljedeće:

- $4 + 1$ ,  $4 + 2$ ,  $4 + 5$
- $9 + 1^*$ ,  $9 + 2^*$ ,  $9 + 5^*$

<sup>1</sup> Autor je predavač na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: zculic@math.hr

No, ako pogledamo bolje mrežu, vidimo da u povezanom području već postoje polja s kandidatima 1 i 9 (polje D3), 5 i 9 (polje A1) te 2 i 9 (polje B1), stoga ta polja nisu moguća jer bi imali dva ista kandidata u tri polja te ih stoga možemo isključiti iz razmatranja. Nakon što smo isključili te parove označene zvjezdicom, vidimo da nam nije preostala niti jedna kombinacija s brojem 9 te ga možemo eliminirati iz početnog polja E1. To je *APE Tip 1*, varijanta u kojoj se odabrana početna polja međusobno vide.

Pogledajmo još jedan primjer na slici 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	<sup>2 3</sup> 9	8	<sup>2 3</sup> 4 6 9	<del>4</del> 6	5	1	7	<sup>3</sup> 6	<sup>3</sup> 9
B	<sup>3</sup> 9	1	<sup>3</sup> 6 9	<del>8</del> 6	2	7	5	4	<sup>3</sup> 8 9
C	5	7	4 6	9	3	4 6 8 8	<sup>1</sup> 8	<sup>1</sup> 6 8	2
D	4	2	5	7	<sup>6</sup> 8 9	<sup>6</sup> 8 9	<sup>1 3 1 3</sup> 8 9 8 8	<sup>1 3 1 3</sup> 8 8	<sup>3</sup> 8
E	7	<sup>3</sup> 9	8	<sup>1 3</sup> 4 4	<sup>1</sup> 9	2	4	5	6
F	6	<sup>3</sup> 9	1	5	4 4 8 9 8 9	4 3 8 9	2	7	
G	<sup>2 3</sup> 9	6	<sup>2 3</sup> 4 6 9	<del>1</del> 4 <del>4</del> 7 8 9	<sup>1</sup> 4	5	<sup>1 3 1 3</sup> 8 7 8 8	<sup>1 3 1 3</sup> 4 4 8	<sup>3</sup> 8
H	1	5	<sup>3</sup> 9	<del>4</del> 3 <del>4</del> 7 8 9	4 6 4 7 8 9 8 9	<sup>3</sup> 6 6 6 6	2	<sup>3</sup> 6 4 8	<sup>3</sup> 8
I	8	4	7	2	<sup>1</sup> 6	<del>3</del> 6 <del>3</del> 6	<sup>1 3</sup> 6	9	5

Slika 2.

Istražujemo moguće parove u susjednim poljima  $G4 = \{1, 3, 4, 8\}$  i  $H4 = \{3, 4, 6, 8\}$ . Moguće su sljedeće kombinacije:

- $1 + 3, 1 + 4, 1 + 6^*, 1 + 8$
- ~~$3 + 3^{**}$~~ ,  $3 + 4, 3 + 6^*, 3 + 8$
- $4 + 3, 4 + 4^{**}, 4 + 6^*, 4 + 8$
- $8 + 3, 8 + 4, 8 + 6^*, 8 + 8^{**}$

Očito je da rješenja u ta dva polja prema pravilima sudokua ne mogu biti dva ista broja, pa smo te kombinacije označene s dvije zvjezdice odmah isključili. Vidimo da polja označena zvjezdicom već postoje u povezanim područjima, konkretno u poljima A4, B4, I5 i I6, tako da i te kombinacije možemo isključiti. Rezultat toga je da nisu moguće kombinacije koje uključuju broj 6, pa ga možemo eliminirati iz polja H4.

Pokazalo se da logika *APE*-a vrijedi i kada odabrana početna (analizirana) polja nisu povezana i zato je mnogo bolji naziv metode *isključenje podsetova* (*Subset Exclusion*), a za takvu varijantu metode kažemo da je *Tip 2*. Pogledajmo primjer na slici 3.

Tražimo moguće kombinacije za polja  $D3 = \{1, 4, 7\}$  i  $H2 = \{2, 6, 7\}$  koje se međusobno ne vide, pa se radi o metodi *APE Tip 2*. Moguće su sljedeće kombinacije:

- $1 + 2^*, 1 + 6^*, 1 + 7^*$
- $4 + 2, 4 + 6, 4 + 7$
- $7 + 2, 7 + 6, 7 + 7^{**}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	167	<b>3</b>	1267	247	<b>5</b>	2467	1247	<b>8</b>	<b>9</b>
B	<b>4</b>	1278	<b>5</b>	<b>3</b>	28	<b>9</b>	127	12	<b>6</b>
C	67	2678	<b>9</b>	2478	<b>1</b>	2467	2457	25	<b>3</b>
D	<b>5</b>	17	47 Removed 1	<b>6</b>	<b>9</b>	124	12	<b>3</b>	<b>8</b>
E	<b>8</b>	16	<b>3</b>	125	<b>7</b>	12	<b>9</b>	1256	<b>4</b>
F	<b>2</b>	<b>9</b>	146	145	<b>3</b>	<b>8</b>	15	156	<b>7</b>
G	17	<b>5</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>6</b>	17	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>2</b>
H	<b>3</b>	267	267	27	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>1</b>
I	<b>9</b>	<b>4</b>	12	128	28	<b>3</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>5</b>

Slika 3.

Vidimo da polja označena sa zvjezdicom već postoje u poljima D2, E2 i I3 i povezana su s oba početna polja D3 i H2. Stoga su takve kombinacije nemoguće i mogu se isključiti iz popisa. Na kraju nam preostaju samo kombinacije koje u sebi ne sadrže broj 1 što znači da broj 1 možemo eliminirati iz početnog polja D3. Primijetimo da su u ovom slučaju moguće kombinacije s istim brojem (označene s dvije zvjezdice).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	<b>4</b>	<b>5</b>	3	<b>9</b>	1 3	3	2 1	1 2	6
B	1 2	1 2 3	7	<b>6</b>	<b>8</b>	4	4 5	<b>9</b>	5 4
C	1	<b>8</b>	1	4 6	<b>2</b>	4 5 6	4 5	<b>3</b>	1 4 6
D	2	2 3	3	<b>5</b>	4	6 4	6 4	2 3 1	1 2
E	<b>6</b>	<b>4</b>	3	1 2 3	1	3	2 3	<b>7</b>	<b>5</b>
F	<b>5</b>	2 3	<b>1</b>	4	6	<b>7</b>	<b>8</b>	4	2 3
G	<b>3</b>	<b>7</b>	<b>5</b>	2	<b>8</b>	2	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>9</b>
H	1	1	9	2	4	4 5	4	<b>6</b>	5
I	8 9	<b>6</b>	<b>4</b>	<b>7</b>	5	<b>1</b>	5	<b>2</b>	<b>3</b>

Slika 4.

Pogledajmo jedan kompleksniji primjer na slici 4. Početna polja su  $B1 = \{1, 2, 7\}$  i  $C7 = \{4, 5, 7, \}$  koja međusobno nisu povezana, pa očito imamo *APE Tip 2*. Moguće kombinacije su:

- $1 + 4^*$ ,  $1 + 5^*$ ,  $1 + 7^{**}$
- $2 + 4$ ,  $2 + 5$ ,  $2 + 7$
- $7 + 4$ ,  $7 + 5$ ,  $7 + 7$

Kombinacije  $\{1, 4\}$  i  $\{1, 5\}$  već imamo u povezanim poljima B8 i B9 te ih možemo eliminirati. Što je s kombinacijom  $1 + 7$  koja je označena s dvije zvjezdice? Budući da u povezanim poljima C1 i C3 imamo kandidate  $\{1, 7, 9\}$  i  $\{7, 9\}$ , analizom dolazimo

do zaključka da bi u 4 polja trebalo staviti 3 kandidata (1, 7 i 9), a to je nemoguće, tako da možemo isključiti i tu kombinaciju, a samim time možemo eliminirati broj 1 iz početnog polja B1. Ako pogledate pažljivije, primijetit ćete da na isti način možemo eliminirati i broj 1 iz polja B2.

I za kraj pogledajmo još jedan kompleksniji primjer *APE Tip 2* na slici 5. Početna polja su  $A3 = \{4, 7\}$  i  $D1 = \{2, 4, 6\}$ . Moguće su sljedeće kombinacije:

- $4 + 2, 4 + 4, 4 + 6^{**}$
- $7 + 2, 7 + 4, 7 + 6^*$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
A	9	4 5	4 7		3 7 8	2 8 7	2 3	1	2 3 5	6
B		6 7	1 6	2	5	9	1 3 7 6 4		3 7 8	4 7 8
C	3	1 5 6	8		1 6	4	1 2 7 6	5	9	2 5
D	2 4	8	1 3 4 6		3 1 6 6	3 6 5 6	3 9	2 3 5	7	1 2 5
E	5	7	1 3		2	1		4	3	6 9
F	2 6	9	1 3 6		3 6 8	7	3 5 6	2 3 5 8	4	1 2 5 8
G	8	2 4	9		1 4 7	5	1 2 7	6	1 2	3
H	4 7	6 4 6 4	6 4 7		1 6 4	3	8	9	1 2 5 4 5	2
I	1	3	5		4 6 9	2 6	2 6 4	2 7 8	2 8	2 7 8

Slika 5.

Vidimo da polje s parom  $7 + 6$  imamo u povezanom polju B1. Kombinacija  $4 + 6$  (označena s dvije zvjezdice) u A3 i D1 zajedno s poljima D3, D4 i D5 čini 5 polja s 4 kandidata (1, 3, 4 i 6), a to je ne rješiva situacija koja nam nameće isključivanje takve kombinacije. Na kraju niti jedna kombinacija ne uključuje broj 6 i njega možemo eliminirati iz početnog polja D1. Umjesto *APE* metode, možemo primijeniti *ALS-XZ* metodu s istim rezultatom: *ASL A*:  $A3 + B2 = \{4, 6, 7\}$ ; *ASL B*:  $DEF3 = \{1, 3, 4, 6\}$ ; *RCC (X) = 4, Z = 6*  $\rightarrow D1 \neq 6$ .

U sljedećem nastavku ćemo obraditi još dvije rjeđe korištene metode.

Zadatak za vježbu s rješenjem:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	4	5		9					
B			6				9		
C		8			2			3	
D				5					
E	6	4						7	5
F			1			8			
G		7			8			4	
H			2				6		
I						1		2	3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	4	5	7	9	1	3	8	6	2
B	2	3	6	8	4	7	9	5	1
C	1	8	9	6	2	5	7	3	4
D	7	9	3	5	6	2	4	1	8
E	6	4	8	1	3	9	2	7	5
F	5	2	1	4	7	8	3	9	6
G	3	7	5	2	8	6	1	4	9
H	9	1	2	3	5	4	6	8	7
I	8	6	4	7	9	1	5	2	3