Vječni kalendar

Ljubica Baćić Đuračković[1], *Vojislav Đuračković*[2]

Možda ste se pitali kojeg ste dana u tjednu rođeni. Ili npr. koji je bio dan kad je obavljen prvi telefonski poziv. Puno je važnih događaja u životu koji su se dogodili na određeni dan u tjednu. Kako se isti dan ponavlja svaki sedmi dan, prirodno se javlja ideja korisititi kongruencije modulo 7. Stoga ćemo primjenom kongruencija vidjeti kako odrediti dan u tjednu za bilo koji datum u bilo kojoj godini. No, pogledajmo prvo nekoliko povijesnih detalja o razvoju kalendara.

Povijesni detalji

Oko 738. godine prije Krista osnivač Rima, Romul, uveo je kalendar koji se sastojao od 10 mjeseci ili 304 dana. Naime, godina je započinjala s ožujkom, šest mjeseci imali su po 30 dana, četiri mjeseca po 31 dan dok 61 zimski dan između prosinca i ožujka nisu bili dodijeljeni niti jednom mjesecu. Godišnja doba razlikovala su se svake godine pa je ovaj kalendar bio u upotrebi do 713. godine prije Krista. Tada je nasljednik Romula, Numa Pompilias, dodao kalendaru dva mjeseca (siječanj i veljaču) čime je godinu produžio na 355 dana. Ta je promjena popraćena pomakom u preostalim mjesecima te se ovaj kalendar upotrebljavao do 46. godine prije Krista kada je car Julije Cezar uveo novi kalendar, po njemu nazvan Julijanski kalendar. Da bi smanjio razliku između solarnog kalendara i rimske godine, Cezar je predstavio kalendar koji se sastojao od 12 mjeseci (neparni mjeseci imaju po 31 dan, a parni po 30), osim veljače, koja je imala 29 dana, a svake četvrte godine 30 dana. Prva Julijanska godina počela je 1. siječnja 45. godina prije Krista, imala je 365.25 dana, te je za 11 minuta i 14 sekundi bila duža od solarne godine. Stoga je svaka četvrta godina postala prijestupna godina i imala je 366 dana. Julijanski kalendar nije savršen i njegova greška se povećavala svakih 128 godina za jedan dan te se do 16. stoljeća povećala na 10 dana. U listopadu 1582. godine astronomi Christopher Clavius i Aloysius Giglio su na zahtjev pape Grgura XIII. uveli gregorijanski kalendar, kako bi se ispravile pogreške Julijanskog kalendara. Akumulirana pogreška od 10 dana ispravljena je izbacivanjem 10 dana u listopadu 1582. godine (5. listopada postao je 15. listopada). Po gregorijanskom kalendaru stoljetne godine su prijestupne ako su djeljive s 400, dok su obične godine prijestupne ako su djeljive s 4 (npr. 1800. godina nije prijestupna, dok je 2000. godina prijestupna). Gregorijanski kalendar, koji se sada koristi diljem svijeta, vrlo je precizan te se od solarne godine razlikuje samo za oko 24.5376 sekundi. To je zato što gregorijanska godina ima oko 365.2425 dana, dok solarna godina ima 365.242216 dana što rezultira pogreškom od 3 dana svakih 10 000 godina.

Određivanje dana u tjednu

Cilj ovog članka je vidjeti kako odrediti dan d u tjednu za r-ti dan u zadanom mjesecu m bilo koje godine y u gregorijanskom kalendaru. Prva stoljetna prijestupna

[1] Učiteljica matematike u Osnovnoj školi Nikole Andrića, Vukovar; e-pošta ljubica.bacic@skole.hr

[2] Učitelj matematike u Osnovnoj školi Negoslavci, Negoslavci; e-pošta vojislav.djurackovic@gmail.com

godina bila je 1600. Stoga ćemo ovdje pokazati formulu koja vrijedi za godine poslije 1600. Kako se u prijestupnoj godini dodaje dan u veljači, računat ćemo da nova godina započinje s 1. ožujkom. Stoga ćemo brojevima od 1 do 12 označiti mjesece u godini od ožujka do veljače, brojevima od 0 do 6 dane u tjednu od nedjelje do subote, te brojevima od 1 do 31 dane u mjesecu što kraće zapisujemo $1 \leq m \leq 12$, $0 \leq d \leq 6$ i $1 \leq r \leq 31$. Da bi došli do željene formule, uvedimo još neke oznake. S d_y označimo dan u tjednu koji je bio 1. ožujka u godini y, pri čemu je $y \geq 1600$. Za godinu koja ima 365 dana vrijedi $365 \equiv 1 \pmod 7$ dok za prijestupnu godinu od 366 dana vrijedi $366 \equiv 2 \pmod 7$. Stoga se dan d_y razlikuje od dana d_{y-1} za jedan ako nije prijestupna ili za dva ako je prijestupna, što kraće zapisujemo:

$$d_y = \begin{cases} d_{y-1} + 1 & \text{ako } y \text{ nije prijestupna godina} \\ d_{y-1} + 2 & \text{inače.} \end{cases}$$

Kako bi izračunali d_y iz d_{1600} treba vidjeti koliko je prijestupnih godina bilo nakon 1600. godine. Ako s l označimo broj prijestupnih godina nakon 1600. godine, onda iz [1, Primjer 2.5] imamo formulu

$$l = \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor - 388. \tag{1}$$

Iz teorema o dijeljenju s ostatkom je

$$y = 100C + D, \tag{2}$$

pri čemu je C broj stoljeća u godini y i $0 \leq D < 100$ je ostatak te vrijedi

$$C = \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor \quad \text{i} \quad D \equiv y \pmod{100}.$$

Ako (2) uvrstimo u (1), dobivamo

$$\begin{aligned} l &= \left\lfloor \frac{100C + D}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100C + D}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100C + D}{400} \right\rfloor - 388 \\ &= \left\lfloor 25C + \frac{D}{4} \right\rfloor - \left\lfloor C + \frac{D}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{4} + \frac{D}{400} \right\rfloor - 388 \\ &= 25C + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor - C + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor - 388, \quad \text{jer je } D < 100 \\ &= 24C + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor - 388 \equiv 3C + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor - 3 \pmod 7. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned} d_y &\equiv d_{1600} + \begin{pmatrix} \text{1 dan za svaku godinu} \\ \text{poslije 1600. godine} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{1 dan za svaku prijestupnu} \\ \text{godinu poslije 1600. godine} \end{pmatrix} \pmod 7 \\ &\equiv d_{1600} + (y - 1600) + l \pmod 7. \end{aligned}$$

Ako uvrstimo izraze za y i l imamo

$$\begin{aligned} d_y &\equiv d_{1600} + (100C + D - 1600) + 3C + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor - 3 \pmod 7 \\ &\equiv d_{1600} + 103C + D - 1603 + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor \pmod 7 \\ &\equiv d_{1600} + 5C + D + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor \pmod 7 \\ &\equiv d_{1600} - 2C + D + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor \pmod 7. \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo formulu za d_y

$$d_y \equiv d_{1600} - 2C + D + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor \pmod 7. \tag{3}$$

Da bi izračunali d_y potrebno je znati d_{1600} koji ćemo pronaći iz kongruencije

$$d_{1600} \equiv d_y + 2C - D - \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor \pmod 7. \tag{4}$$

U tu svrhu ćemo iskoristiti podatak da je 1. ožujka 2017. godine bila srijeda tj. $d_y = 3$. Za $y = 2017$ je

$$C = \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2017}{100} \right\rfloor = 20$$

i

$$\begin{aligned} D &\equiv y \pmod{100} \\ &\equiv 2017 \pmod{100} \\ &\equiv 17 \pmod{100}. \end{aligned}$$

Ako to sve uvrstimo u (4) imamo

$$\begin{aligned} d_{1600} &\equiv 3 + 2 \cdot 20 - 17 - \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{17}{4} \right\rfloor \pmod 7 \\ &\equiv 3 + 40 - 17 - 5 - 4 \pmod 7 \\ &\equiv 17 \pmod 7 \\ &\equiv 3 \pmod 7. \end{aligned}$$

To znači da je 1. ožujak 1600. godine bila srijeda pa uvrštavanjem u izraz za d_y dobivamo

$$d_y \equiv 3 - 2C + D + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor \pmod 7. \tag{5}$$

Pomoću prethodne formule može se odrediti koji je bio dan 1. ožujka bilo koje godine. Još ćemo je proširiti kako bi odredili koji dan u tjednu je bilo koji dan u zadanom mjesecu godine y. Stoga treba znati za koliko se dana prvi dan u mjesecu pomiče u odnosu na prethodni mjesec modulo 7 što ovisi o tome ima li mjesec 30 ili 31 dan. Za mjesec koji ima 30 dana vrijedi $30 \equiv 2 \pmod 7$ pa se prvi dan u mjesecu u odnosu na prvi dan u mjesecu prethodnog mjeseca pomiče za 2 dana. U slučaju da mjesec ima 31 dan vrijedi $31 \equiv 3 \pmod 7$ pa se prvi dan u mjesecu u odnosu na prvi dan u mjesecu prethodnog mjeseca pomiče za 3 dana unaprijed. Stoga imamo sljedećih jedanaest mjesečnih povećanja:

1. travanj u odnosu na 1. ožujak:	3 dana
1. svibanj u odnosu na 1. travanj:	2 dana
1. lipanj u odnosu na 1. svibanj:	3 dana
1. srpanj u odnosu na 1. lipanj:	2 dana
1. kolovoz u odnosu na 1. srpanj:	3 dana
1. rujan u odnosu na 1. kolovoz:	3 dana
1. listopad u odnosu na 1. rujan:	2 dana
1. studeni u odnosu na 1. listopad:	3 dana

$$
\begin{aligned}
\text{1. prosinac u odnosu na 1. studeni:}&\quad \text{2 dana}\\
\text{1. siječanj u odnosu na 1. prosinac:}&\quad \text{3 dana}\\
\text{1. veljača u odnosu na 1. siječanj:}&\quad \text{3 dana.}
\end{aligned}
$$

Ukupno povećanje je 29 dana pa se lako vidi da je prosječno mjesečno povećanje $29/11 \approx 2.6$ dana. Ovim se bavio Christian Zeller i pritom uočio da se funkcija $f(m) = \lfloor 2.6m - 0.2 \rfloor - 2$ može upotrijebiti da se postignu gornja povećanja za mjesece m od 2 do 12. Npr.

$$
\begin{aligned}
f(4) - f(3) &= \big(\lfloor 10.4 - 0.2 \rfloor - 2\big) - \big(\lfloor 7.8 - 0.2 \rfloor - 2\big)\\
&= (10 - 2) - (7 - 2)\\
&= 3,
\end{aligned}
$$

što znači da imamo povećanje od 3 dana od mjeseca 3 (1. svibanj) do mjeseca 4 (1. lipanj). Stoga po formuli (5) prvi dan d' mjeseca m dan je s

$$d' \equiv d_y + f(m) \pmod 7$$

tj.

$$
\begin{aligned}
d' &\equiv 3 - 2C + D + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor + \lfloor 2.6m - 0.2 \rfloor - 2 \pmod 7\\
&\equiv 1 + \lfloor 2.6m - 0.2 \rfloor - 2C + D + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor.
\end{aligned}
$$

Konačno, r-ti dan mjeseca m računamo po formuli

$$d \equiv d' + (r - 1) \pmod 7$$

odnosno

$$d \equiv r + \lfloor 2.6m - 0.2 \rfloor - 2C + D + \left\lfloor \frac{C}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{D}{4} \right\rfloor \pmod 7. \tag{6}$$

Formula (6) omogućuje nam da odredimo dan u tjednu bilo kojeg zadanog datuma u gregorijanskom kalendaru što se može vidjeti u sljedećim primjerima.

Primjer 1. *Švicarski matematičar i fizičar Leonhard Euler rođen je 15. travnja 1707. godine. Koji je to bio dan u tjednu?*

Rješenje. Kako je prvi dan u godini 1. ožujak, to je travanj drugi mjesec 1707. godine. Dakle, $y = 1707$, $r = 15$, $m = 2$, $C = \lfloor y/100 \rfloor = \lfloor 1707/100 \rfloor = 17$ i

$$
\begin{aligned}
D &\equiv y \pmod{100}\\
&\equiv 1707 \pmod{100}\\
&\equiv 7 \pmod{100}.
\end{aligned}
$$

Ako to sve uvrstimo u (6), imamo

$$
\begin{aligned}
d &\equiv 15 + \lfloor 2.6 \cdot 2 - 0.2 \rfloor - 2 \cdot 17 + 7 + \left\lfloor \frac{17}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7}{4} \right\rfloor \pmod 7\\
&\equiv 15 + 5 - 34 + 12 \pmod 7\\
&\equiv -2 \pmod 7\\
&\equiv 5 \pmod 7.
\end{aligned}
$$

To znači da je Leonhard Euler rođen u petak. $\square$

Primjer 2. *Koji će dan u tjednu biti 27. siječnja 2345. godine?*

Rješenje. Ožujak je prvi mjesec u godini pa je siječanj 2345. godine zapravo jedanaesti mjesec 2344. godine. Dakle, $y = 2344$, $r = 27$, $m = 11$, $C = \lfloor y/100 \rfloor = \lfloor 2344/100 \rfloor = 23$ i

$$\begin{aligned} D &\equiv y \pmod{100} \\ &\equiv 2344 \pmod{100} \\ &\equiv 44 \pmod{100}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (6) dobivamo

$$\begin{aligned} d &\equiv 27 + \lfloor 2.6 \cdot 11 - 0.2 \rfloor - 2 \cdot 23 + 44 + \left\lfloor \frac{23}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{44}{4} \right\rfloor \pmod 7 \\ &\equiv 27 + 28 - 46 + 60 \pmod 7 \\ &\equiv 70 \pmod 7 \\ &\equiv 0 \pmod 7. \end{aligned}$$

Dakle, 27. siječnja 2345. godine bit će nedjelja. □

Zadatci za vježbu

Za kraj čitatelju ostavljamo nekoliko zadataka za vježbu.

1. Njemački matematičar i astronom Johann Carl Friedrich Gauss rođen je 30. travnja 1777. godine. Koji je to bio dan u tjednu?

2. Koji će dan u tjednu biti 15. srpnja 2137. godine?

3. Braća Wright izveli su prvi dokumentirani let 17. prosinca 1903. godine sa svojim avionom na vlastiti pogon Flyer I. Koji je to bio dan u tjednu?

4. Izračunajte kojeg ste dana u tjednu rođeni i kojeg dana slavite rođendan ove godine.

Literatura

[1] T. Koshy, *Elementary Number Theory with Applications*, Second Edition, Elsevier, 2007.

[2] K. H. Rosen, *Elementary Number Theory and lts Applications*, AT&T Information Systems Laboratories, Addison-Wesley, 1984.

[3] `https://www.biography.com/people/leonhard-euler-21342391`

[4] `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Gauss.html`

[5] `https://www.timeanddate.de/kalender/roemischer-kalender`

[6] `https://hr.wikipedia.org/wiki/Avion`

Neki načini dokazivanja identiteta s Fibonaccijevim brojevima

Džana Drino, Merima Murica[1]

U ovom radu ćemo dati nekoliko uobičajenih načina dokazivanja identiteta s Fibonaccijevim brojevima (korištenjem principa matematičke indukcije, rekurzivne relacije, Cauchy-Binetove formule, teleskopiranjem), te nekoliko primjera kombinatornih dokaza, koji se odnose na popločavanje ploče dominama i kvadratima.

Uvod

Fibonaccijev niz rekurzivno se definira sa: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ za $n > 2$. Svaki član u nizu je jedenak zbroju prethodna dva člana, a iz rekurzivne relacije za F_2 dobivamo vrijednost za $F_0 : F_0 = F_2 - F_1 = 1 - 1 = 0$.

Osim rekurzivno, Fibonaccijevi brojevi mogu se eksplicitno izraziti pomoću Cauchy-Binetove formule [2, str. 15]:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$

gdje su $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ rješenja jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$. Primijetimo da vrijedi: $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, $\alpha \cdot \beta = -1$ (ove činjenice će nam trebati u dokazima identiteta).

Identiteti

Do sada je otkriven veliki broj identiteta koji vrijede za Fibonaccijeve brojeve. Ovdje dajemo nekoliko načina njihovog dokazivanja. Sljedeća dva identiteta [2, str. 13, 22] ćemo dokazati primjenom Cauchy-Binetove formule i teleskopiranjem.

Identitet 1. Za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k F_k = F_{3n}.$$

Dokaz. Uvrštavanjem vrijednosti F_n iz Cauchy-Binetove formule i primjenom binomnog teorema, lijeva strana jednakosti postaje:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k F_k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \cdot \frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \alpha^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \beta^k \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}((1+2\alpha)^n - (1+2\beta)^n)\end{aligned}$$

[1] Studentice Odsjeka za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu.

Kako vrijedi: $\alpha^2 = 1 + \alpha$, $1 + 2\alpha = \alpha^3$, $1 + 2\beta = \beta^3$, slijedi:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{3n} - \beta^{3n}) = F_{3n}.$$

Identitet 2. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{2^k}} = 3 - \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}.$$

Dokaz. Da bismo izračunali sumu na lijevoj strani, prvo ćemo dokazati tvrdnju:
Za paran prirodan broj m vrijedi:

$$\frac{1}{F_{2m}} = \frac{F_{m-1}}{F_m} - \frac{F_{2m-1}}{F_{2m}}.$$

Dokaz tvrdnje.

$$\frac{1}{F_{2m}} = \frac{F_{m-1}}{F_m} - \frac{F_{2m-1}}{F_{2m}} \iff F_m = F_{m-1}F_{2m} - F_mF_{2m-1}.$$

Korištenjem Cauchy-Binetove formule i činjenica $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, $\alpha\beta = -1$, imamo:

$$\begin{aligned} F_{m-1}F_{2m} - F_mF_{2m-1} &= \frac{1}{5}((\alpha^{m-1} - \beta^{m-1})(\alpha^{2m} - \beta^{2m}) - (\alpha^m - \beta^m)(\alpha^{2m-1} - \beta^{2m-1})) \\ &= \frac{1}{5}(\alpha^{m-1}\beta^{2m-1}(\alpha - \beta) - \beta^{m-1}\alpha^{2m-1}(\alpha - \beta)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{m-1}\beta^{2m-1} - \beta^{m-1}\alpha^{2m-1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{m-1}\beta^{m-1}(\beta^m - \alpha^m) = -F_m(\alpha\beta)^{m-1} = F_m. \end{aligned}$$

Time je pomoćna tvrdnja dokazana. Sada je jednostavno izračunati traženu sumu korištenjem ove tvrdnje i *teleskopiranjem*:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{2^k}} &= \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \left(\frac{F_1}{F_2} - \frac{F_3}{F_4}\right) + \ldots + \left(\frac{F_{2^{n-2}-1}}{F_{2^{n-2}}} - \frac{F_{2^{n-1}-1}}{F_{2^{n-1}}}\right) + \left(\frac{F_{2^{n-1}-1}}{F_{2^{n-1}}} - \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}\right) \\ &= \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{F_1}{F_2} - \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}} = 3 - \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}. \end{aligned}$$

Napomena. Kad $n \to \infty$ dobivamo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^k}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{2^k}} = 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}} = 3 - (-\beta) = 3 + \beta.$$

Sada ćemo dati i jedan primjer dokazivanja matematičkom indukcijom:

Identitet 3. Za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} = F_{n+1}.$$

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti jaku formu principa matematičke indukcije:

i) Za $n=0$ i $n=1$ tvrdnja vrijedi jer je $F_1=1=\binom{0}{0}$ i $F_2=1=\binom{1}{0}$.

ii) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve brojeve $k\le n$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}\binom{k-i}{i}=F_{k+1},\quad k\le n.$$

iii) Dokažimo da vrijedi i za $n+1$. Na osnovu Pascalovog identiteta za binomne koeficijente [3, str. 152] imamo:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\binom{n+1-i}{i}=\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\binom{n-i}{i-1}+\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\binom{n-i}{i}.$$

Pretpostavimo da je n paran. Tada je $\left\lfloor\dfrac{n+1}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor=\dfrac{n}{2}$ i $\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor-1=\left\lfloor\dfrac{n-1}{2}\right\rfloor$, pa je

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\binom{n+1-i}{i}&=\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n-i}{i-1}+\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n-i}{i}\\&=\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n-(j+1)}{j}+\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n-i}{i}\\&=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{(n-1)-j}{j}+\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n-i}{i}\\&\qquad\text{(sada primjenjujemo induktivnu pretpostavku)}\\&=F_n+F_{n+1}=F_{n+2}.\end{aligned}$$

Na sličan način se pokaže da identitet vrijedi i ako je n neparan broj.

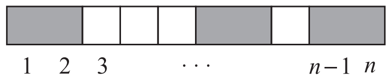
$$\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\binom{n+1-i}{i}=F_{n+2}.$$

iv) Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da identitet vrijedi za sve $n\ge 0$.

Napomena. Primijetimo da nam ovaj identitet daje vezu Fibonaccijevih brojeva s Pascalovim trokutom: suma brojeva na n-toj "dijagonali" u Pascalovom trokutu jednaka je n-tom Fibonaccijevom broju.

Kombinatorni dokazi

Identiteti s Fibonaccijevim brojevima mogu se dokazivati i kombinatornim putem. U tu svrhu promatrat ćemo skup svih popločavanja ploče dimenzije $1\times n$ pomoću domina (veličine 1×2) i kvadrata (veličine 1×1). Ćelije ploče označit ćemo s $1,2,\dots,n$. Prebrojit ćemo koliko je popločavanja na dva načina, tako da jedan od njih predstavlja kombinatornu interpretaciju lijeve, a drugi interpretaciju desne strane jednakosti koju dokazujemo. Kako obje strane predstavljaju prebrojavanje istog skupa, one moraju biti jednake.



Sljedeći teorem [1, str. 1] nam daje vezu Fibonaccijevih brojeva s brojem načina da pokrijemo ploču dominama i kvadratima.

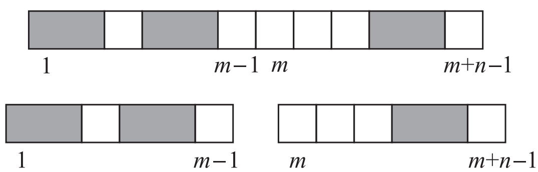
Teorem 1. *Neka je f_n broj načina da se poploča ploča dužine n kvadratima i dominama. Tada je f_n Fibonaccijev broj i za $n \geq 0$ vrijedi: $f_n = F_{n+1}$.*

Dokaz. Definirajmo $f_0 = F_1 = 1$ broj popločavanja ploče dužine 0. Dalje, ploču dužine 1 možemo popločati samo na jedan način (jednim kvadratom), pa je $f_1 = 1 = F_2$. Ako imamo ploču dužine n, njenu posljednju ćeliju možemo pokriti ili s kvadratom ili s dominom. U prvom slučaju postoji f_{n-1} načina da se pokrije prvih $n-1$ ćelija ploče, dok u drugom slučaju ostaje f_{n-2} načina da se pokrije prvih $n-2$ ćelije. Odatle je ukupan broj popločavanja cijele ploče: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Kako niz $\{f_n\}$ zadovoljava iste početne uvjete i rekurziju kao niz $\{F_n\}$, slijedi $f_n = F_{n+1}$, za sve $n \geq 0$.

Identitet 4. Za m, $n \geq 0$ vrijedi
$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

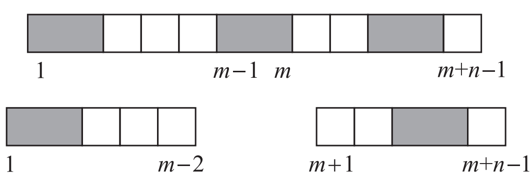
Dokaz. Dokazat ćemo tvrdnju [1, str. 4]: $f_{m+n-1} = f_{m-2}f_{n-1} + f_{m-1}f_n$. Broj načina na koje možemo popločati ploču dužine $(m+n-1)$ jednak je f_{m+n-1}. Odredimo sada broj popločavanja na drugi način, tako što ćemo razmatrati dva slučaja:

Prvi slučaj. Ako se ploča dužine $m+n-1$ može razdvojiti na ćeliji $m-1$, onda je ona nastala spajanjem dvije ploče: jedne koja ima $m-1$ ćelija i druge koja sadrži n ćelija. Ploče smo popločavali nezavisno jednu od druge, pa ukupno postoji $f_{m-1} \cdot f_n$ popločavanja.



Drugi slučaj. Ako se ploča ne može razdvojiti na ćeliji $m-1$, onda mora sadržavati dominu koja pokriva ćelije $m-1$ i m (kao što vidimo na slici ispod).

Prvi dio ploče (koji sadrži prve $m-2$ ćelije) se može popločati na f_{m-2} načina, a drugi dio ploče (poslije ćelije m) na f_{n-1} načina, što nam daje ukupno $f_{m-2}f_{n-1}$ popločavanja. Kako je svako popločavanje ili razdvojivo ili nerazdvojivo na ćeliji $m-1$, ukupan broj popločavanja je jednak $f_{m-1}f_n + f_{m-2}f_{n-1}$. Odatle je $f_{m+n-1} = f_{m-2}f_{n-1} + f_{m-1}f_n$.



Navest ćemo još *dvije posljedice* ovog identiteta:

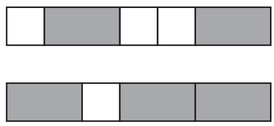
i) $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$

ii) $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$.

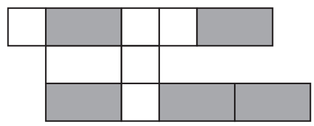
Prvu dobijemo uvrštavanjem $m = n$ u identitet 4, a drugu za $m = n + 1$.

Parovi ploča

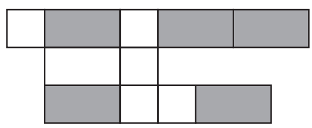
Promatrajmo par ploča dužine n na slici ispod. Broj načina na koje ih možemo popločati je ${f_n}^2$.



Pomaknimo donju ploču za jedno mjesto udesno. Kažemo da postoji "greška" na mjestu i ako se gornja ploča može razdvojiti na mjestu i, a donja na $i-1$, bez lomljenja pločica. Npr. sljedeći par ima greške na mjestima 1, 3 i 4:



Zamijenimo sada "repove" ploča tj. dijelove iza posljednje greške. Dobijamo ploče sa greškama na istim mjestima kao na početku, s tim da gornja ploča sad ima $n + 1$, a donja $n - 1$ mjesta. Ukupan broj popločavanja je $f_{n+1}f_{n-1}$.



Ako bar jedna ploča ima kvadrat, greška sigurno postoji. Npr. ako prva ploča ima kvadrat koji pokriva ćeliju i, onda se ona može razdvojiti na mjestima i ili $i - 1$. Ako se druga ploča ne može razdvojiti na mjestu i, onda postoji domina koja pokriva i i $i+1$, ali je greška tada sigurno na mjestu $i-1$. U suprotnom, ako se druga ploča može razdvojiti na mjestu i, onda je na tom mjestu greška. Greške se mogu izbjeći samo na jedan način: popločavanjem obje ploče dominama.

Koristeći ovo, dokazat ćemo Cassinijev identitet [1, str. 8].

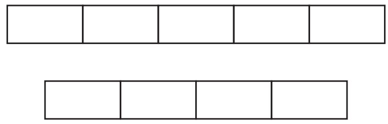
Identitet 5. Za $n \geq 0$ vrijedi

$${f_n}^2 = f_{n+1}f_{n-1} + (-1)^n.$$

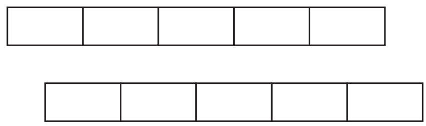
Dokaz. Neka je X skup svih popločavanja dvije ploče dužine n. Tada je $|X| = {f_n}^2$. Neka je Y skup popločavanja ploče dužine $n+1$ i ploče dužine $n-1$, $|Y| = f_{n+1}f_{n-1}$.

Pretpostavimo prvo da je n neparan broj. Tada obje ploče moraju imati najmanje jedan kvadrat, pa greška sigurno postoji. Zamjenom repova ploča, dobivamo ploče s $n+1$ i $n-1$ ćelija, s greškama na istim mjestima kao u početnom rasporedu. Time smo dobili bijekciju između svih parova popločavanja ploča dužine n i parova popločavanja ploča dužina $n+1$ i $n-1$, pod uvjetom da ta popločavanja imaju bar jednu grešku.

Međutim, kako je n neparan, $n+1$ i $n-1$ su parni i može se desiti da u paru ploča dužina $n+1$ i $n-1$ nema nijedna greška. Taj par nećemo brojati, pa u slučaju neparnog n vrijedi: ${f_n}^2 = f_{n+1}f_{n-1} - 1$.



Ako je n paran broj, kao i u prethodnom slučaju, postoji bijektivno preslikavanje između parova ploča koji imaju greške. Razlika u odnosu na prošli slučaj je što je sada jedini par popločavanja koji nema greški onaj u kojem su obje ploče dužine n i pokrivene svim dominama. Zato za parno n vrijedi: ${f_n}^2 = f_{n+1}f_{n-1} + 1$.



Zaključak

Identiteti s Fibonaccijevim brojevima se mogu dokazivati na različite načine. Većina njih se dokazuje matematičkom indukcijom, teleskopiranjem, primjenom rekurzivne ili Cauchy-Binetove formule. Nekoliko identiteta smo dokazali tim metodama (u svakom smo koristili drukčiji način radi raznolikosti ideja), a osim toga, naveli smo i nekoliko primjera kombinatornih dokaza. Oni predstavljaju zanimljiv način dokazivanja, s tim da za veliki broj identiteta nije jednostavno naći kombinatornu intepretaciju. Mogu se koristiti različite ideje: razmatrati različite položaje određene domine ili kvadrate, tražiti korespondencije između skupova popločavanja, promatrati parove ploča... Čitatelj može pokušati naći kombinatorni dokaz identiteta 3, koji smo ovdje dokazali matematičkom indukcijom, i to promatranjem popločavanja ploče dužine n, koja sadrže točno i domina, $i \in \left\{0, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\}$ (vidi [1, str. 4]).

Literatura

[1] A. T. BENJAMIN, J. J. QUINN, *Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof*, The Dolciani Mathematical Expositions, 27, Mathematical Association of America, Washington, 2003.

[2] A. DUJELLA, *Fibonaccijevi brojevi*, Hrvatsko matematičko društvo, Matkina biblioteka, Zagreb, 2000.

[3] T. KOSHY, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, John Wiley and Sons, New York, 2001.