



Osnovno o SAGE-u

Iva Golubić¹, Šimun Zlopaša²

Prije par godina ljubitelji matematike i besplatnog softwarea su napokon došli na svoje. SageMath je moćan free open-source matematički software, primjenjiv na mnogim područjima poput ekonomije, tehničkih znanosti, numeričke matematike, statistike itd. Razvijen je kao open source alternativa komercijalnim software-ima Matlab, Mathematica, Maple itd. Znanstvena zajednica ga je pogotovo brzo prihvatila jer za razliku od komercijalnih paketa SageMath ima otvoren kod pa se može provjeriti je li ispravan. Sintaksa SageMath je prilično jednostavna i zasniva se na programskom jeziku Python, pa i to doprinosi njegovoj popularnosti. Postoji više načina za rad u Sage-u. Jedan je da jednostavno skinete paket s interneta. Drugi, da na internetu potražite Sage cell server, a treći je za ljubitelje visina koji na internetu mogu pronaći SageMath cloud.

U svakom slučaju, pri pokretanju dobijete radnu ćeliju u koju se unose naredbe, a nakon unošenja istih, ispod ćelije je gumb *evaluate* na koji treba kliknuti da bi naredbe bile izvršene.

Pri radu je, naravno, na raspolaganju i opsežan pomagač koji je najjednostavnije koristiti tako da upišemo naredbu, odnosno pojam koji nas zanima s upitnikom i nakon toga kliknemo tipku *evaluate*. Na primjer, *solve? matrix?* ako želimo saznati kako raditi s tim naredbama.

Nadalje, pomoću Sage-a se mogu jednostavno rješavati mnogi oblici matematičkih problema koji se obrađuju u srednjoj školi. Bilo bi zgodno da se učenici nauče raditi s ovim software-om te da ga koriste u rješavanju složenijih matematičkih problema. No, za početak pogledajmo nekoliko jednostavnih primjera.

Želimo izračunati vrijednost aritmetičkog izraza

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{5}} : \frac{3}{4}$$

U Sage-u bi to bilo $((1/2 - 1/3)/(1/5))/(3/4)$ i kao rješenje dobijemo 10/9.

Možda nije na odmet ovdje napomenuti da računalo uvijek napravi ono što smo mu zadali, a ne ono što mislimo da smo mu zadali.

Jedna od najčešće korištenih naredbi je *solve* koju koristimo za rješavanje raznih jednadžbi, nejednadžbi i njihovih sustava. Pogledajmo kako ona radi.

Za rješenje jednadžbe $x^2 + 4x + 5 = 0$ u Sage-u upišimo:

¹ Predavač prof. Veleučilišta Velika Gorica; e-pošta: iva.golubic@vvg.hr

² Predavač prof. Veleučilišta Velika Gorica; e-pošta: simun.zlopasa@vvg.hr

```
j=x**2+4*x+5==0
solve(j,x)
```

Nakon što kliknemo na evaluate, dobijemo rješenja $-2 - i$ i $-2 + i$.

Uzmimo, na primjer, jednu poznatu formulu iz fizike: $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Iz formule treba izraziti R_2 . U Sage upišemo (moramo mu deklarirati koje oznake su varijable u matematičkom smislu, inače ih smatra varijablama u programskom smislu – oznaku x unaprijed smatra varijablom u matematičkom smislu):

```
var('R,R1,R2')
j=R==(R1*R2)/(R1+R2)
show(solve(j,R2))
```

Naredba *show* se koristi kako bismo dobili uobičajeni matematički prikaz rješenja. Ovdje dobijemo

$$R_2 = -\frac{RR_1}{R - R_1}$$

Na identičan način možemo dobiti i opća rješenja jednadžbi trećeg i četvrtog stupnja dok, naravno, za stupanj veći od četiri, u općem slučaju, nećemo dobiti rješenja. Svakako pokušajte.

Rješavanje nejednadžbi ima potpuno istu sintaksu.

Riješimo nejednadžbu $\frac{(x+1)(x+3)}{x-5} < 0$. U Sage upišemo:

```
nj=(x+1)*(x+3)/(x-5)<0
solve(nj,x)
```

Rješenje je $[[x < -3], [x > -1, x < 5]]$ što bi uobičajenim matematičkim zapisom bilo

$$x \in \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle -1, 5 \rangle.$$

Sage, naravno, ima razvijenu i grafičku komponentu pa pogledajmo kako ona radi.

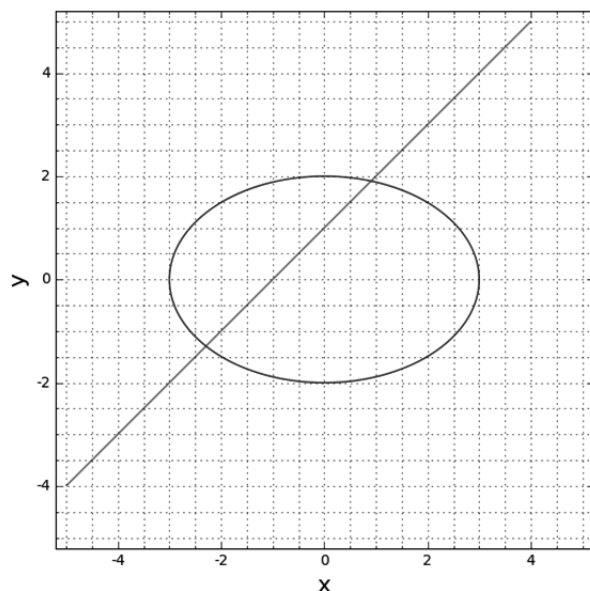
Odredimo grafički presjek pravca i krivulje drugog reda, u ovom slučaju elipse.

$$\begin{aligned} y &= x + 1 \\ 4x^2 + 9y^2 &= 36 \end{aligned}$$

U Sage bismo upisali:

```
var('x,y')
j1 = -x + y == 1
j2 = 4*x**2 + 9*y**2 == 36
p1=implicit_plot(j1,(x,-5,5),(y,-5,5),color='red')
p2=implicit_plot(j2,(x,-5,5),(y,-5,5),color='blue')
p12 = p1 + p2
p12.axes_labels(['x','y'])
show(p12, gridlines=["minor", "minor"])
```

Sage daje sljedeći grafički prikaz:



Grafički prikaz je pomalo neobičan za one koji su navikli na uobičajeni prikaz koordinatnog sustava u kojem se osi sijeku u ishodištu. Naime, grafovi se nalaze unutar pravokutnog područja gdje su vrijednosti x na donjem, a vrijednosti y na lijevom bridu.

Koordinate točaka sjecišta tražimo rješavanjem sustava gornjih jednažbi, pomoću naredbe *solve*:

```
var('x, y')
j1 = -x + y == 1
j2 = 4*x**2 + 9*y**2 == 36
solve([j1, j2], x, y)
```

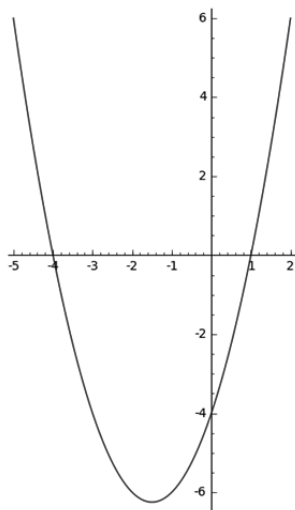
U prethodnom primjeru je korištena naredba *implicit_plot* i samo ime sugerira da se radi o implicitno zadanim funkcijama. U slučaju da je funkcija zadana eksplicitno, praktičnije je koristiti naredbu *plot*. Na primjer, ako želimo nacrtati graf funkcije

$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

u Sage upišemo:

```
var('x')
f(x)=x**2+3*x-4
plot(f, [-5, 2], aspect_ratio=1)
```

i dobijemo



Naredba `plot` daje prikaz u uobičajenom koordinatnom sustavu. Unutar uglatih zagrada su vrijednosti nezavisne varijable između kojih želimo prikaz grafa.

Nije isto analitički riješiti zadatak i dati računalu da ga riješi. Međutim, kod raznih praktičnih projekata pomoć software-a je nužna jer znatno skraćuje vrijeme, a i mogućnosti pogreške su znatno manje, posebno kod kojekakvih kompliciranih proračuna.