ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 30. rujna 2018. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 2/274.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 286.

A) Zadatci iz matematike

3637. Riješi jednadžbu

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x.$$

3638. Nađi sva realna rješenja x, y, z sistema jednadžbi

$$\frac{4x^2}{4x^2+1}=y,\quad \frac{4y^2}{4y^2+1}=z,\quad \frac{4z^2}{4z^2+1}=x.$$

3639. Ako su a, b, $c>0$ dokaži nejednakost

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq a+b+c.$$

3640. Neka je $p(x)$ polinom trećeg stupnja čije su nultočke r_1, r_2, r_3. Ako je

$$\frac{p(0.5)+p(-0.5)}{p(0)}=1011,$$

odredi

$$\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_3r_1}.$$

3641. Neka su F_1 i F_2 žarišta elipse $4x^2+9y^2=36$, a K je točka na elipsi takva da je $|KF_1|:|KF_2|=2$. Kolika je površina trokuta KF_1F_2?

3642. Dokaži da je u svakom trokutu ABC udaljenost od sjecišta visina do vrha B jednaka dvostrukoj udaljenosti od središta trokutu opisane kružnice do stranice $\overline{AC}$.

3643. Točka H je sjecište visina trokuta ABC. Ako je $|AB|=13$ cm, $|BC|=14$ cm, $|CA|=15$ cm, izračunaj duljinu $|BH|$.

3644. Nađi sve funkcije $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$\frac{1}{x}f(-x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x.$$

3645. Dan je niz brojeva koji zadovoljava uvjet

$$a_{m+n}+a_{m-n}=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n})$$

za nenegativne cijele brojeve m i n takve da je $m\geq n$. Ako je $a_1=1$, odredi a_{2018}.

3646. Neka su x, y, z realni brojevi takvi da je

$$\sin x+\sin y+\sin z\geq 2.$$

Dokaži nejednakost

$$\cos x+\cos y+\cos z\leq\sqrt{5}.$$

3647. Odredi sumu

$$S=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

3648. Uspravna trostrana piramida ima bazu stranice a kojoj su bočni bridovi pod kutom α prema bazi. Koliki je volumen kugle opisane toj piramidi?

3649. Ako su α, β, γ rješenja jednadžbe $x^3+px+q=0$ izračunaj vrijednost determinante

$$\begin{vmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\ \beta&\gamma&\alpha\\ \gamma&\alpha&\beta\end{vmatrix}.$$

3650. Stranica baze pravilne četverostrane piramide je a, dok je kut između visine i bočnog brida jednak α. Kroz točku koja dijeli stranicu baze u omjeru $1:3$ povučena je ravnina okomita na bazu koja je paralelna jednoj stranici baze. Odredi površinu presjeka piramide i ravnine.

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 438. Prosječna gustoća zraka u blizini tla iznosi 1.295 kg/m^3 i s nadmorskom se visinom smanjuje. Tlak zraka na razini mora iznosi 1013 hPa. Kolika bi bila debljina Zemljine atmosfere kad bi gustoća zraka bila na svim visinama jednaka onoj u blizini tla?

OŠ – 439. Automobil mase 1.2 tone vozi brzinom 54 km/h i pred njega, na udaljenosti 30 metara, odjednom istrči pas. Kolikom prosječnom silom kočenja treba vozač djelovati da ne bi pregazio psa?

OŠ – 440. Električna je sila između dva nabijena tijela proporcionalna umnošku njihovih naboja i obrnuto proporcionalna kvadratu njihove udaljenosti. Ako se u vrhove jednakostraničnog trokuta postave tri tijela s jednakim pozitivnim nabojem kamo treba postaviti jedno negativno nabijeno tijelo da rezultantna sila na sva tijela bude jednaka nuli? Koliki bi po iznosu trebao biti taj negativni naboj u odnosu na naboje pozitivnih tijela?

OŠ – 441. Grički top je jedna od zagrebačkih znamenitosti i od 1877. godine puca svakog dana točno u podne. Brzina zvuka u zraku ovisi o temperaturi, $v = 20\sqrt{T}$, gdje je T temperatura u kelvinima. Hrvojev je dom udaljen 700 metara zračne udaljenosti od kule Lotršćaka gdje je smješten top. Koliko dulje putuje zvuk pucnja do njegovog stana zimi, kad je temperatura $-10\,^\circ\mathrm{C}$, nego ljeti, kad je ona $30\,^\circ\mathrm{C}$?

1672. Odredi ubrzanje tijela koje se nakon 100 prevaljenih metara giba 120 % brže nego na početku gibanja. Tijelo se udaljilo tih 100 m u 25 sekundi od početka gibanja. Gibanje je pravocrtno i jednoliko ubrzano.

1673. Kojom se brzinom giba zvuk u čistom heliju pri sobnoj temperaturi $T = 20\,^\circ\mathrm{C}$? Koliko je puta ta brzina veća od brzine zvuka u zraku pri istoj temperaturi?

1674. Asteroid mase $3 \cdot 10^{18}$ kg ima satelit zanemarive mase koji napravi jednu orbitu oko asteroida u 32 sata. Odredi prosječnu udaljenost satelita od težišta asteroida.

1675. Nedavno lansirani *Tesla Roadster* giba se po elipsi oko Sunca, tako da napravi 36 orbita u 55 godina. Ako uzmemo da mu je točka lansiranja perihel putanje, udaljen 1 astronomsku jedinicu od Sunca, odredi koliko će biti udaljen od Sunca u ahelu, najdaljoj točki putanje. Koliki je ekscentricitet te putanje?

1676. Ljudsko tijelo sadrži 0.25 % kalija (maseni udio), a prirodni kalij sadrži 0.0117 % radioaktivnog izotopa $^{40}\mathrm{K}$, vremena poluraspada 1.277 milijardi godina. Odredi ukupan broj jezgri $^{40}\mathrm{K}$ u ljudskom tijelu mase 80 kg, te aktivnost (broj raspada u sekundi) u tom tijelu.

1677. U kalorimetru je kocka leda temperature $0\,^\circ\mathrm{C}$. Ulijemo 0.419 kg vode, temperature $43\,^\circ\mathrm{C}$. Ravnotežna temperatura se uspostavi na $5\,^\circ\mathrm{C}$. Odredi početnu masu leda u kalorimetru i porast entropije do postizanja ravnoteže. ($c_v = 4190$ J/kgK, $\lambda_l = 330$ kJ/kg.)

1678. Sabirna leća daje realnu sliku, obrnutu i 14 % umanjenu. Ako leću približimo predmetu za 20 cm, slika je virtualna, uspravna i 70 % uvećana. Odredi jačinu leće u dioptrijama.

C) Rješenja iz matematike

3609. *Nađi sve prirodne brojeve a, b, c takve da su rješenja sustava jednadžbi*

$$x^2 - 2ax + b = 0$$
$$x^2 - 2bx + c = 0$$
$$x^2 - 2cx + a = 0$$

prirodni brojevi.

Rješenje. Kako diskriminante ovih jednadžbi moraju biti potpuni kvadrati, $a^2 - b$, $b^2 - c$, $c^2 - a$ su potpuni kvadrati. Kako je

$$a^2 - b \leqslant (a-1)^2$$

imamo

$$b \geqslant 2a - 1.$$

Slično je $c \geqslant 2b - 1$, $a \geqslant 2c - 1$.

Odavde je

$$a \geqslant 2c - 1 \geqslant 2(2b-1) = 4b - 3$$
$$\geqslant 4(2a-1) - 3 = 8a - 7.$$

Odavde vrijedi $a \leqslant 1$, tj. $a = b = c = 1$.

Matija Tomić (2),
Osnovna gimnazija Don Bosco, Žepče, BiH

3610. *Dokaži da je za svaki prirodan broj n broj $19 \cdot 8^n + 17$ složen.*

Rješenje. Ako je $n = 2k$, tada iz $8^{2k} \equiv (-1)^{2k} \equiv 1 \pmod 3$ slijedi

$$19 \cdot 8^n + 17 \equiv 19 + 17 \equiv 0 \pmod 3.$$

Ako je $n = 4k + 1$, tada zbog $64 \equiv -1 \pmod{13}$ i $8^n = 64^{2k} \cdot 8 \equiv 8 \pmod{13}$ zaključujemo

$$19\cdot 8^n+17 \equiv 19\cdot 8+17 \equiv 169 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Ako je $n = 4k + 3$, tada zbog

$$8^n = 64^{2k}\cdot 8^2\cdot 8 \equiv 2 \pmod 5$$

dobivamo

$$19\cdot 8^n + 17 \equiv 19\cdot 2 + 17 \equiv 0 \pmod 5.$$

Danica Petolas (1), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3611. *Nađi sva rješenja jednadžbe*

$$\frac{5x}{3x^2 - x + 6} - \frac{2x}{3x^2 + 4x + 6} = -\frac{1}{10}.$$

Rješenje. $x = 0$ nije rješenje zadane jednadžbe. Dijeljenjem brojnika i nazivnika s x u oba razlomka na lijevoj strani jednadžbe, te stavljajući $t = 3x + \frac{6}{x}$, jednadžba postaje

$$\frac{5}{t-1} + \frac{2}{t+4} = -\frac{1}{10}.$$

Množenjem obje strane prethodne jednadžbe s $10(t-1)(t+4)$ dobivamo jednadžbu

$$t^2 + 33t + 216 = 0$$

koja ima rješenja $t_1 = -24$, $t_2 = -9$.

1° $3x + \frac{6}{x} = -24$

$$\iff x^2 + 8x + 2 = 0$$

$$\iff x_1 = -4 - \sqrt{14},\ x_2 = -4 + \sqrt{14}.$$

2° $3x + \frac{6}{x} = -9$

$$\iff x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\iff x_3 = -2,\ x_4 = -1.$$

Provjerom se vidi da su to zaista rješenja zadane jednadžbe.

Danica Petolas (1), Zagreb

3612. *Neka su a, b, c, d pozitivni cijeli brojevi takvi da je $\log_a b = \frac{3}{2}$ i $\log_c d = \frac{5}{4}$. Ako je $a - c = 9$, koliko je $b - d$?*

Rješenje.

$$\log_a b = \frac{3}{2} \iff a^3 = b^2,$$

$$\log_c d = \frac{5}{4} \iff c^5 = d^4.$$

Kako su a, b, c, d cijeli brojevi, mora biti $a = k_1^2$, $c = k_2^4$, k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$.

$$9 = a - c = (k_1 + k_2^2)(k_1 - k_2^2).$$

Kako je $k_1 + k_2^2 > k_1 - k_2^2$ slijedi

$$k_1 + k_2^2 = 9$$

$$k_1 - k_2^2 = 1,$$

odakle je $k_1 = 5$, $k_2 = 2$. Sada je $b = k_1^3 = 125$, $d = k_2^5 = 32$ tj. $b - d = 93$.

Danica Petolas (1), Zagreb

3613. *Odredi sva realna rješenja sustava jedadžbi*

$$x^3 - 3xy^2 = 1$$

$$3x^2y - y^3 = 1.$$

Prvo rješenje. Oduzimanjem jednadžbi dobivamo:

$$x^3 + y^3 - 3xy(x+y) = 0 \implies$$

$$(x+y)(x^2 + y^2 - 4xy) = 0.$$

1° $x + y = 0 \implies y = -x \implies x^3 - 3x^3 = 1$

$$\implies x^3 = -\frac{1}{2} \implies x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\implies y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

2° $x^2 + y^2 - 4xy = 0$. Kako ne može biti $x = 0$ ili $y = 0$, dijeljenjem obje strane ove jednadžbe s xy i stavljajući $\frac{x}{y} = t$, slijedi

$$t + \frac{1}{t} - 4 = 0$$

$$\implies t^2 - 4t + 1 = 0 \implies t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

$2^\circ a)$ Ako je $\frac{x}{y} = 2 + \sqrt{3} \implies x = (2+\sqrt{3})y$ i iz druge jednadžbe sustava slijedi

$$(20 + 12\sqrt{3})y^3 = 1$$

$$\implies y = \frac{1}{\sqrt[3]{20 + 12\sqrt{3}}}$$

$$\implies x = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{20 + 12\sqrt{3}}}.$$

$2^\circ b)$ Ako je $\dfrac{x}{y} = 2 - \sqrt{3} \Longrightarrow x = (2-\sqrt{3})y$ i iz druge jednadžbe sustava slijedi

$$\begin{aligned}(20-12\sqrt{3})y^3 &= 1\\ \Longrightarrow\ y &= \frac{1}{\sqrt[3]{20-12\sqrt{3}}}\\ \Longrightarrow\ x &= \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{20-12\sqrt{3}}}.\end{aligned}$$

Dakle, sva rješenja sustava su:

$$(x,y) \in \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right),\right.$$
$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}, \frac{1}{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}\right),$$
$$\left.\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{20-12\sqrt{3}}}, \frac{1}{\sqrt[3]{20-12\sqrt{3}}}\right)\right\}.$$

Danica Petolas (1), Zagreb

Drugo rješenje. Neka je $z = x + iy$. Tada je

$$z^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) = 1 + i.$$

Stavimo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Kako je $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ imamo

$$r^3(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Dakle, $r^3 = \sqrt{2}$, $3\varphi = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2$ tj. $r = \sqrt[6]{2}$, $\varphi = \dfrac{(1+8k)\pi}{12}$, $k = 0, 1, 2$.

Ur.

3614. *Unutar trokuta ABC dana je točka O takva da je $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Izračunaj omjer površina trokuta ABC i AOC.*

Prvo rješenje. Smjestimo trokut ABC u koordinatni sustav tako da je $O = (0,0)$. Neka je dalje $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$. Uvjet $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ je tada ekvivalentan

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0\\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 &= 0\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}x_1 &= -2x_2 - 3x_3\\ y_1 &= -2y_2 - 3y_3.\end{aligned} \tag{1}$$

Površina trokuta koji ima vrhove (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3) izračunava se po formuli

$$\frac{1}{2}|u_1(v_2 - v_3) + u_2(v_3 - v_1) + u_3(v_1 - v_2)|.$$

Sada, korištenjem te formule i (1), slijedi

$$P_{\triangle ABC} = 3|x_2y_3 - x_3y_2|$$

i

$$P_{\triangle AOC} = |x_2y_3 - x_3y_2|.$$

Dakle,

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle AOC}} = 3.$$

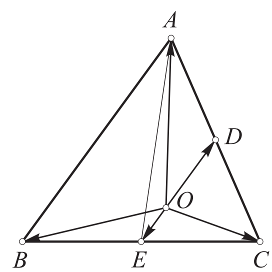
Danica Petolas (1), Zagreb

Drugo rješenje. Kako su točke D i E polovišta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ imamo

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD} \tag{1}$$

i

$$2(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 4\overrightarrow{OE}. \tag{2}$$



Iz (1) i (2) dobivamo

$$\vec{0} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OE}).$$

Dakle, $\overrightarrow{OD}$ i $\overrightarrow{OE}$ su kolinearni vektori i $|\overrightarrow{OD}| = 2|\overrightarrow{OE}|$.

Odavde je

$$\frac{P_{AEC}}{P_{AOC}} = \frac{|ED|}{|OD|} = \frac{3}{2}$$

i

$$\frac{P_{ABC}}{P_{AOC}} = \frac{2P_{AEC}}{P_{AOC}} = 3.$$

Ur.

3615. *U konveksnom četverokutu $ABCD$ dane su točke M i N na $\overline{AB}$ tako da je*

$|AM| = |MN| = |NB|$ *te* P *i* Q *na* $\overline{CD}$ *tako da je* $|CP| = |PQ| = |QD|$. *Točka* O *je sjecište dijagonala* $\overline{AC}$ *i* $\overline{BD}$. *Dokaži da trokuti* MOP *i* NOQ *imaju jednake površine.*

Prvo rješenje. Smjestimo četverokut u kooordinatni sustav tako da $O = (0,0)$. Neka je dalje $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, $D = (x_4, y_4)$. Tada je, iz uvjeta zadatka,

$$M = \left(\frac{2x_1}{3} + \frac{x_2}{3}, \frac{2y_1}{3} + \frac{y_2}{3}\right),$$
$$N = \left(\frac{x_1}{3} + \frac{2x_2}{3}, \frac{y_1}{3} + \frac{2y_2}{3}\right),$$
$$P = \left(\frac{2x_3}{3} + \frac{x_4}{3}, \frac{2y_3}{3} + \frac{y_4}{3}\right),$$
$$Q = \left(\frac{x_3}{3} + \frac{2x_4}{3}, \frac{y_3}{3} + \frac{2y_4}{3}\right).$$

Dijagonala $\overline{AC}$ leži na pravcu $y = k_1 x$ tj.

$$y_1 = k_1 x_1, \quad y_3 = k_1 x_3$$

odakle dijeljenjem slijedi

$$x_1 y_3 = x_3 y_1. \tag{1}$$

Slično,

$$x_2 y_4 = x_4 y_2. \tag{2}$$

Površina trokuta koji ima vrhove (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3) izračunava se po formuli

$$\frac{1}{2}|u_1(v_2 - v_3) + u_2(v_3 - v_1) + u_3(v_1 - v_2)|.$$

Ako iskoristimo tu formulu za trokute MOP i NOQ, te (1) i (2) kod sažimanja dobivenih izraza, slijedi

$$P_{\triangle MON} = \frac{1}{9}|x_1 y_4 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_4 y_1|$$

i

$$P_{\triangle NOQ} = \frac{1}{9}|x_1 y_4 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_4 y_1|.$$

Dakle, $P_{\triangle MON} = P_{\triangle NOQ}$.

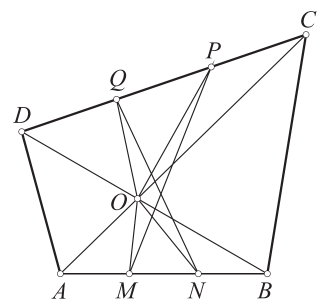
Danica Petolas (1), Zagreb

Drugo rješenje. Koristit ćemo vektorski produkt. Dvostruka površina trokuta NOQ je

$$2P_{NOQ} = |ON| \cdot |OQ| \sin \sphericalangle NOQ = |\overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OQ}|$$
$$= \left|\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right) \times \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OD}\right)\right|$$

Kako su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OC}$ te $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OD}$ paralelni imamo

$$|\overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OQ}| = \left|\frac{2}{9}(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC})\right|.$$



Na sličan način se vidi da je ovo jednako $|\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{OP}|$ što je dvostruka površina trokuta MOP.

Ur.

3616. *Neka su* AA_1, BB_1, CC_1 *simetrale kutova trokuta* ABC *s duljinama stranica* a, b, c. *Dokaži jednakost*

$$\frac{P(A_1B_1C_1)}{P(ABC)} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

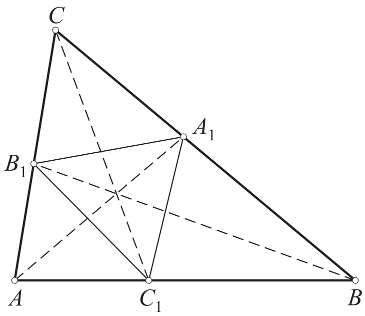
Rješenje. Prema teoremu o simetrali unutarnjeg kuta trokuta:

$$\frac{|AC_1|}{|BC_1|} = \frac{|AC|}{|BC|} \implies \frac{|AC_1|}{c - |AC_1|} = \frac{b}{a}$$
$$\implies |AC_1| = \frac{bc}{a+b}$$
$$|BC_1| = c - |AC_1| = \frac{ac}{a+b}.$$

Analogno:

$$|AB_1| = \frac{bc}{a+c}, \quad |CB_1| = \frac{ab}{a+c},$$
$$|BA_1| = \frac{ac}{b+c}, \quad |CA_1| = \frac{ab}{b+c}.$$

$$\begin{aligned}P_{\triangle AB_1C_1} &= \frac{1}{2}|AC_1||AB_1|\sin\alpha\\ &= \frac{1}{2}\frac{b^2c^2}{(a+b)(a+c)}\sin\alpha\\ &= \frac{bc}{(a+b)(a+c)}P_{\triangle ABC}.\end{aligned}$$



Slično je

$$P_{\triangle A_1BC_1} = \frac{ac}{(a+b)(b+c)}P_{\triangle ABC},$$

$$P_{\triangle A_1B_1C} = \frac{ab}{(a+c)(b+c)}P_{\triangle ABC}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}&P_{\triangle A_1B_1C_1}\\ &= P_{\triangle ABC} - P_{\triangle AB_1C_1} - P_{\triangle A_1BC_1} - P_{\triangle A_1B_1C}\\ &= \left(1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} - \frac{ac}{(a+b)(b+c)}\right.\\ &\qquad \left.- \frac{ab}{(a+c)(b+c)}\right)P_{\triangle ABC}\\ &= \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}P_{\triangle ABC}.\end{aligned}$$

Danica Petolas (1), Zagreb

3617. *Dana je bilo koja točka P unutar stranice $\overline{AB}$ jednakostraničnog trokuta ABC, a k_1 i k_2 su kružnice upisane trokutima APC i BPC. Druga zajednička tangenta siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki Q. Dokaži da Q ne ovisi o izboru točke P.*

Rješenje. Neka je K sjecište tangenti, te uz ostale oznake kao na slici, označimo duljine

$$|CA_1| = |CC_1| = u, \quad |AA_1| = |AB_1| = a - u,$$

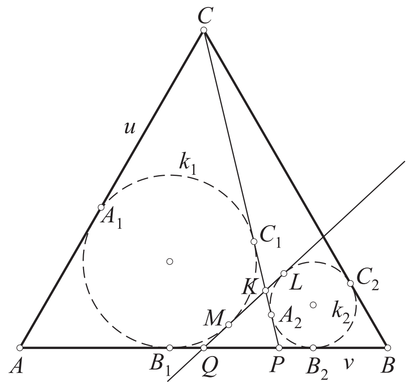
$$|BB_2| = |BC_2| = v, \quad |CA_2| = |CC_2| = a - v,$$

gdje je a stranica jednakostraničnog trokuta.

Označimo dalje

$$|C_1K| = |MK| = x_1, \quad |KL| = |KA_2| = x_2,$$

$$|B_1Q| = |MQ| = x_3.$$



Računamo, koristeći $|QB_2| = |QL|$,

$$\begin{aligned}a &= |AQ| + |QB|\\ &= (|AB_1| + |B_1Q|) + (|QB_2| + |B_2B|)\\ &= (a - u + x_3) + (x_3 + x_1 + x_2 + v)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow u - v = x_1 + x_2 + 2x_3. \qquad (1)$$

Kako je $|LM| = |C_1A_2| = |CA_2| - |CC_1|$ slijedi

$$x_1 + x_2 = a - v - u. \qquad (2)$$

(1) i (2) zajedno daju

$$u = \frac{a}{2} + x_3.$$

Kako je

$$|AQ| = |AB_1| + |B_1Q| = a - u + x_3 = \frac{a}{2},$$

točka Q se nalazi na polovištu stranice $\overline{AB}$, neovisno o izboru točke P.

Danica Petolas (1), Zagreb

3618. *Trokut ABC upisan je u kružnicu polumjera 1. Simetrale kutova α, β, γ sijeku kružnicu u A_1, B_1, C_1, tim redom. Koliko je*

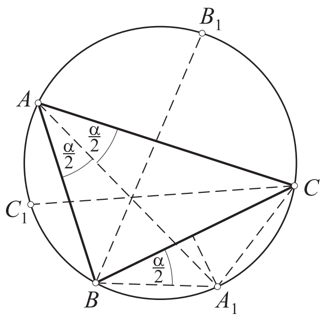
$$\frac{|AA_1|\cos\frac{\alpha}{2} + |BB_1|\cos\frac{\beta}{2} + |CC_1|\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}?$$

Prvo rješenje. Koristit ćemo poznate jednakosti za trokut:

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}=\frac{1}{2R}, \qquad (1)$$

gdje je R radijus opisane kružnice. Korištenjem (1), za $R=1$, slijedi

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{a+b+c}{2}. \qquad (2)$$



Uočimo da je trokut BA_1C jednakokračan ($|BA_1|=|CA_1|$), što odmah slijedi iz činjenice da trokuti ABA_1 i AA_1C imaju istu opisanu kružnicu i primjenom formule (1).

Zato, prvo, imamo $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\frac{a}{2}}{|BA_1|}$ tj.

$$a=2|BA_1|\cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (3)$$

Drugo, ABA_1C je tetivni četverokut, pa po Ptolemeju:

$$|AA_1|\cdot a=|BA_1|b+|BA_1|c,$$

što zajedno s (3) daje

$$|AA_1|\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{b+c}{2}. \qquad (4)$$

Posve analogno se dobije

$$\left.\begin{aligned}|BB_1|\cos\frac{\beta}{2}&=\frac{a+c}{2},\\ |CC_1|\cos\frac{\gamma}{2}&=\frac{a+b}{2}.\end{aligned}\right. \qquad (5)$$

Zaključno, korištenjem (2), (4) i (5),

$$\frac{|AA_1|\cos\frac{\alpha}{2}+|BB_1|\cos\frac{\beta}{2}+|CC_1|\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{\frac{b+c}{2}+\frac{a+c}{2}+\frac{a+b}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}=2.$$

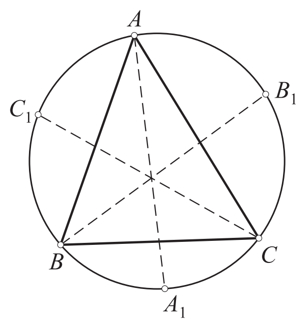
Danica Petolas (1), Zagreb

Drugo rješenje. Iz poučka o sinusima imamo za $\triangle AA_1B$:

$$\begin{aligned}|AA_1|&=2\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)\\&=2\sin\left(\frac{A+B+C}{2}+\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)\\&=2\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right).\end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned}|AA_1|\cos\frac{A}{2}&=2\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A}{2}\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)+\cos\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\\&=\sin C+\sin B.\end{aligned}$$



Slično je

$$|BB_1|\cos\frac{B}{2}=\sin A+\sin C$$

$$|CC_1|\cos\frac{C}{2}=\sin A+\sin B.$$

Tada je

$$\begin{aligned}&|AA_1|\cos\frac{A}{2}+|BB_1|\cos\frac{B}{2}+|CC_1|\cos\frac{C}{2}\\&\quad=2(\sin A+\sin B+\sin C)\end{aligned}$$

i dani izraz je jednak

$$\frac{2(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sin A+\sin B+\sin C}=2.$$

Ur.

3619. *Dokaži trigonometrijsku jednakost*

$$\sin^2 20^\circ+\sin^2 40^\circ+\sin^2 80^\circ=\frac{3}{2}.$$

Rješenje.

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 80^\circ$$
$$= \sin^2 20^\circ + \sin^2(60^\circ - 20^\circ) + \sin^2(60^\circ + 20^\circ)$$
$$= \sin^2 20^\circ + \left(\sin 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \sin 20^\circ\right)^2$$
$$+ \left(\sin 60^\circ \cos 20^\circ + \cos 60^\circ \sin 20^\circ\right)^2$$
$$= \sin^2 20^\circ + 2\sin^2 60^\circ \cos^2 20^\circ$$
$$+ 2\cos^2 60^\circ \sin^2 20^\circ$$
$$= \sin^2 20^\circ + \frac{3}{2}\cos^2 20^\circ + \frac{1}{2}\sin^2 20^\circ$$
$$= \frac{3}{2}\cos^2 20^\circ + \frac{3}{2}\sin^2 20^\circ = \frac{3}{2}.$$

Medžida Alihodžić (3), Gimnazija Visoko, Visoko, BiH

3620. *Ako realni brojevi x i y zadovoljavaju izraz*

$$(x+5)^2 + (y-12)^2 = 14^2$$

odredi minimum od $x^2 + y^2$.

Rješenje. Promatrajmo problem u kompleksnoj ravnini: $|z - z_0| = 14$, gdje je $z = x + yi$, $z_0 = -5 + 12i$. Iz nejednakosti trokuta

$14 = |z - z_0| \leq |z| + |z_0| = |z| + 13 \implies |z| \geq 1$.

Dakle, $x^2 + y^2 \geq 1$.

Pokušajmo naći (x, y) koji zadovoljava zadani izraz i ujedno $x^2 + y^2 = 1$. Dakle treba riješiti sustav

$$(x+5)^2 + (y-12)^2 = 14^2 \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 = 1. \qquad (2)$$

Ako uvrstimo (2) u (1):

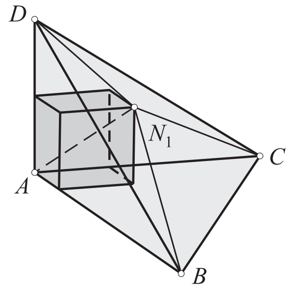
$$196 = x^2 + y^2 + 10x + 25 - 24y + 144$$
$$= 10x - 24y + 170 \implies$$
$$5x - 12y = 13. \qquad (3)$$

Sada (2) i (3) daju jedinstveno rješenje $(x, y) = \left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ pa je minimalna vrijednost od $x^2 + y^2$ jednaka 1.

Danica Petolas (1), Zagreb

3621. *Bridovi trostrane piramide $ABCD$ koji izlaze iz vrha A su u parovima okomiti i njihove duljine su a, b, c. Odredi volumen kocke upisane u piramidu čiji je jedan vrh u točki A.*

Rješenje. Uz oznake kao na slici, jedan vrh kocke N_1 se nalazi u ravnini BCD. Piramida $ABCD$ je sada rastavljena na tri trostrane piramide $ABCN_1$, $ABDN_1$, $ACDN_1$, koje sve imaju istu visinu x tj. duljinu brida kocke.



Dakle vrijedi

$$V_{ABCD} = V_{ABCN_1} + V_{ABDN_1} + V_{ACDN_1}$$

tj.

$$\frac{abc}{6} = \frac{xab}{6} + \frac{xac}{6} + \frac{xbc}{6}$$
$$\implies x = \frac{abc}{ab + ac + bc}.$$

Volumen kocke je

$$V = \left(\frac{abc}{ab + ac + bc}\right)^3.$$

Danica Petolas (1), Zagreb

3622. *Odredi sumu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^{n+2}} \cos\frac{3\pi}{2^{n+2}}.$$

Rješenje. Ako u formulu

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) - \sin(y-x)}{2}$$

uvrstimo $x = \frac{\pi}{2^{n+2}}$, $y = \frac{3\pi}{2^{n+2}}$, dobivamo

$$\sin\frac{\pi}{2^{n+2}} \cos\frac{3\pi}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2^n} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Prema tome, unakrsnim kraćenjem,

$$\sum_{n=1}^{k} \sin\frac{\pi}{2^{n+2}} \cos\frac{3\pi}{2^{n+2}}$$
$$= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}.$$

Konačno

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^{n+2}} \cos \frac{3\pi}{2^{n+2}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \sin \frac{\pi}{2^{n+2}} \cos \frac{3\pi}{2^{n+2}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2^{k+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \left(\lim_{k\to\infty} \frac{\pi}{2^{k+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 0 = \frac{1}{2}.$$

Danica Petolas (1), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 430. *Jupiterov satelit Io je geološki najaktivnije tijelo u Sunčevom sustavu, ima više od 400 aktivnih vulkana. Od Jupitera je udaljen 421 700 kilometara, a za jedan okret oko Jupitera treba mu samo 1.77 dana. Našem Mjesecu, koji je od Zemlje prosječno udaljen 384 400 kilometara, za jedan okret treba 27.32 dana. Izračunaj brzine ovih svemirskih tijela i odredi koliko je puta Iova brzina veća od Mjesečeve.*

Rješenje.

$R_{Io} = 421\,700$ km

$T_1 = 1.77$ dana

$R_M = 384\,400$ km

$\underline{V = 27.32 \text{ dana}}$

$V_{Io} = ? \quad V_M = ?$

$V_{Io} : V_M = ?$

$$V_{Io} = \frac{s_1}{t_1} = \frac{2R_I o\pi}{t_1}$$

$$= \frac{2 \cdot 421\,700 \cdot \pi \text{ km}}{1.77 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}}$$

$$= \frac{2\,649\,619 \text{ km}}{152\,928 \text{ s}} = 17.33 \text{ km/s}$$

$$V_M = \frac{s_2}{t_2} = \frac{2R_M\pi}{2}$$

$$= \frac{2 \cdot 384\,400\pi \text{ km}}{27.32 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}}$$

$$= \frac{2\,415\,256 \text{ km}}{2\,360\,448 \text{ s}} = 1.02 \text{ km/s}$$

$$V_{Io} : V_M = 17.33 \text{ km/s} : 1.02 \text{ km/s}$$

$$= 16.99$$

Borna Cesarec (8), OŠ Augusta Cesarca, Krapina

OŠ – 431. *Učenik je dobio zadatak da odredi gustoću kamena. Izmjerio je da je masa kamena 84 grama. U menzuru od 100 cm^3 je ulio 70 cm^3 vode. Kad je u menzuru stavio kamen razina se vode podigla 8 milimetara iznad oznake za 100 cm^3. Izmjerio je da razmak između oznaka za 90 cm^3 i 100 cm^3 iznosi 2 centimetra. Kolika je gustoća kamena?*

Rješenje.

$m = 84$ g $= 0.084$ kg

$V_1 = 70 \text{ cm}^3$

$\Delta h = 8$ mm $= 0.8$ cm

$\underline{\Delta V = 100 \text{ cm}^3 - 90 \text{ cm}^3 = 10 \text{ cm}^3}$

$\rho = ?$

$10 \text{ cm}^3 : 2 = 5 \text{ cm}^3, \quad 0.8 \cdot 5 \text{ cm}^3 = 4 \text{ cm}^3$

$V_2 = 100 \text{ cm}^3 + 4 \text{ cm}^3 = 104 \text{ cm}^3$

$$V_{\text{kamena}} = V_2 - V_1$$

$$= 104 \text{ cm}^3 - 70 \text{ cm}^3 = 34 \text{ cm}^3$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{84}{34} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 2.471 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 2471 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Borna Cesarec (8), Krapina

OŠ – 432. *Neopterećena opruga ima duljinu 10 centimetara. Njena je konstanta elastičnosti 40 N/m. Koliko utega mase 50 grama treba objesiti na nju da joj duljina bude 25 centimetara?*

Rješenje.

$l_0 = 10$ cm

$k = 40$ N/m

$m_1 = 50$ g $= 0.05$ kg

$\underline{l = 25 \text{ cm}}$

$n = ?$

$$\Delta l = l - l0 = 25 \text{ cm} - 10 \text{ cm}$$

$$= 15 \text{ cm} = 0.15 \text{ m}$$

$$F = k \cdot \Delta l = 40 \text{ N/m} \cdot 0.15 \text{ m} = 6 \text{ N}$$

$$M = \frac{F}{g} = \frac{6\ \text{N}}{10\ \text{N/kg}} = 0.6\ \text{kg}$$

$$n = \frac{m}{m_1} = \frac{0.6\ \text{kg}}{0.05\ \text{kg}} = 12$$

Lorena Ivanišević (8), OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 433. *Kad su dva jednaka otpornika spojena serijski na izvor napona 12 V kroz njih teče struja od 200 miliampera. Kolika će struja teći kroz njih ako ih na isti izvor spojimo paralelno i na tu paralelu serijski spojimo treći otpornik od 25 Ω?*

Rješenje.

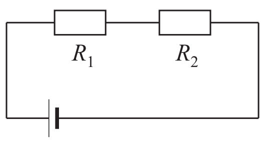
$$R_1 = R_2 = R$$

$$R_3 = 25\ \Omega$$

$$U = 12\ \text{V}$$

$$\underline{I = 200\ \text{mA} = 0.2\ \text{A}}$$

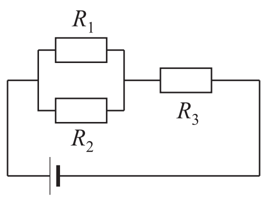
$$I_1 = ?$$



$$R_s = R + R = 2R$$

$$R_s = \frac{U}{I} = \frac{12\ \text{V}}{0.2\ \text{A}} = 60\ \Omega$$

$$2R = 60\ \Omega, \quad R = 30\ \Omega$$



$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{30\ \Omega} + \frac{1}{30\ \Omega} = \frac{2}{30\ \Omega}$$

$$R_p = 15\ \Omega$$

$$R_u = R_p + R_3 = 15\ \Omega + 25\ \Omega = 40\ \Omega$$

$$I = \frac{U}{R_u} = \frac{12\ \text{V}}{40\ \Omega} = 0.3\ \text{A} = I_3$$

$$I_1 = I_2 = 0.15\ \text{A}$$

Borna Cesarec (8), Krapina

1658. *Pri jednoliko ubrzanom gibanju tijelo prevali put s u vremenu t. Prvih 54 % puta tijelo prevali u 65 % vremena. Kolika je početna brzina v_0, ako je konačna brzina (nakon vremena t) jednaka 10.8 m/s?*

Rješenje. Označimo s v_1 brzinu nakon 65 % vremena, te s $v_2 = 10.8$ m/s brzinu nakon 100 % vremena gibanja. Iz površina u v-t dijagramu dobijemo put s kao

$$s = \frac{v_0 + v_2}{2} \cdot t$$

$$0.54s = \frac{v_0 + v_1}{2} \cdot 0.65t.$$

Dijeljenjem tih dviju jednadžbi dobijemo

$$0.54 = \frac{v_0 + v_1}{v_0 + v_2}\ 0.65.$$

Kako je promjena brzine linearna s vremenom, vrijedi i

$$v_1 = v_0 + (v_2 - v_0) \cdot 0.65.$$

Uvrštavanjem dobijemo

$$\frac{0.54}{0.65} = \frac{1.35v_0 + 0.65v_2}{v_0 + v_2}.$$

Za $v_2 = 10.8$ m/s dobivamo $v_0 = 3.76$ m/s.

Ur.

1659. *Koliku masu bi trebala imati olovna kugla ako želimo da njezino gravitacijsko polje na površini kugle iznosi 0.001 m/s^2? Gustoća olova je 11 340 kg/m^3. Koliki je radijus kugle?*

Rješenje. Gravitacijsko polje kugle na površini iznosi

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

za kuglu mase M i radijusa R. Iste nepoznanice povezane su i gustoćom kugle

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}.$$

Uvrstimo M iz prve u drugu jednadžbu i riješimo po R:

$$R = \frac{3g}{4\pi G\rho} = 315.44\ \text{m}.$$

Iz prve (ili druge) jednadžbe slijedi $M = 1.491 \cdot 10^{12}$ kg.

Ur.

1660. *Pomoću digitalnog fotoaparata (ili mobitela) slikamo kovanicu od 5 kuna na* *udaljenosti od 50 cm. Na fotografiji dobijemo oštru sliku, tako da kovanica promjera 26 mm zauzima na slici krug promjera 150 pixela. Kolika je kutna razlučivost fotoaparata? Uzmimo da će fotoaparat na oštroj slici razlučiti detalje ako su udaljeni 1 pixel ili više. Kolika je linearna razlučivost na slici kovanice?*

Rješenje. Linearna razlučivost određena je veličinom koja na slici zauzima 1 pixel. Za zadane parametre, ako dužina od 26 mm zauzima 150 pixela, razlučivost je

$$\delta = \frac{26 \text{ mm}}{150} = 0.1733 \text{ mm}.$$

Kutna razlučivost određena je kutom α_1 pod kojim se motiv veličine 1 pixela vidi iz perspektive fotoaparata. U našem slučaju

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\delta}{500 \text{ mm}},$$

što daje kut $\alpha_1 = 1'11.5''$.

Ur.

1661. *Kineski satelit Tiangong 1 past će na Zemlju početkom 2018. godine. Kolika će biti energija oslobođena padom, ako uzmemo da satelit pada iz kružne orbite visine 150 km iznad površine Zemlje? Masa satelita Tiangong 1 iznosi 8600 kg. Koliki postotak otpada na kinetičku, a koliki na potencijalnu energiju satelita? Za Zemlju uzeti* $GM = 3.986 \cdot 10^{14}\ m^3/s^2$, $R = 6371\ km$.

Rješenje. Kinetička i potencijalna energija određene su orbitom:

$$E_p = mgh\frac{R}{R+h}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \quad v^2 = \frac{GM}{R+h}.$$

Uvrštavanjem konstanti GM, R, mase satelita m i visine h dobijemo $E_k = 2.628 \cdot 10^{11}$ J i $E_p = 1.236 \cdot 10^{10}$ J. Udio potencijalne energije je $p = E_p/(E_k + E_p) = 4.5\,\%$. Satelit je pao u južni Pacifik, 1. travnja 2018. godine.

Ur.

1662. *Kemijski element platina (Pt) u prirodi ima šest izotopa prosječne mase* $195\,g/mol$. *Međutim najlakši i najmanje zastupljen* ^{190}Pt *je radioaktivan (* α*-emiter) s vremenom poluraspada 650 milijardi godina. Njegova zastupljenost u prirodnoj platini iznosi* $0.01\,\%$. *Koliko se raspada dogodi u 1 kg platine u jednoj minuti? Avogadrov broj iznosi* $6.022 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$.

Rješenje. Broj atoma platine u 1 kg iznosi

$$N = N_A \cdot \frac{1000 \text{ g}}{195 \text{ g/mol}},$$

a $0.01\,\%$ tog broja je $3.882 \cdot 10^{20}$ atoma ^{190}Pt. Aktivnost odredimo iz vremena poluraspada:

$$A = \frac{N}{T}\ln 2 = 10.435 \text{ Bq}.$$

To znači da se u jednoj minuti dogodi $\Delta N = tA = 60 \cdot 10.435 = 626.1 \pm 25$ raspada. Odstupanje od očekivanog broja raspada određeno je statističkim karakterom nuklearnih raspada i u zadanim uvjetima jednako je kvadratnom korijenu očekivanog broja raspada.

Ur.

1663. *Na 20 cm ispod površine vode nalazi se točkasti izvor svjetlosti. Odredi površinu kroz koju svjetlost izlazi iz vode u zrak. Indeks loma vode u odnosu na zrak je 1.33.*

Rješenje. Iz vode u zrak, zrake koje dolaze na površinu vode pod kutom većim od α bit će totalno reflektirane natrag u vodu, uz uvjet

$$\sin\alpha \geq \frac{1}{n},$$

gdje je n indeks loma. Slijedi da je granični kut $\alpha = 48.7535^\circ$. Konus koji obuhvaća zrake koje izlaze iz vode na površini vode određuje krug radijusa $r = 20 \text{ cm} \cdot \operatorname{tg}\alpha = 22.81$ cm. Površina kruga s tim radijusom iznosi

$$S = r^2\pi = 1634.33 \text{ cm}^2.$$

Ur.

1664. *Parcijalni tlak zasićene vodene pare mijenja se eksponencijalno s temperaturom. Pri* $0\,^\circ C$ *iznosi 610.5 Pa, a pri* $10\,^\circ C$ *je 1191.6 Pa. Izračunajte tlak pri* $15\,^\circ C$.

Rješenje. Izrazimo $p(T)$ pomoću eksponencijalne funkcije:

$$p(T) = p_0 e^{kT},$$

uz $p_0 = p(0) = 610.5$ Pa parcijalni tlak na temperaturi $0\,^\circ$C. Uvrštavanjem $p(10) = 1191.6$ i rješavanjem po k dobivamo $k = 0.0668774\ (^\circ\text{C})^{-1}$. Tu konstantu uvrstimo da bismo izračunali $p(15)$:

$$p(15) = 610.5e^{0.0668774 \cdot 15} = 1664.8 \text{ Pa}.$$

Ur.