59. Državno natjecanje iz matematike
Poreč, 12. – 14. travnja 2018.

Matematička natjecanja su ove školske godine počela 25. siječnja 2018., kada su održana školska (odnosno gradska) natjecanja. Županijska natjecanja su održana 28. veljače. Na temelju rezultata županijskih natjecanja, određeni su učenici koji su sudjelovali na Državnom natjecanju.

Zadatke za sve razine natjecanja priređuje Državno povjerenstvo koje se sastoji od tri potpovjerenstva: za osnovne škole, srednje škole A varijante i srednje škole B varijante. Njihov rad uspješno je koordinirala tajnica državnog povjerenstva, *Draženka Kovačević, prof.*, viša savjetnica za matematiku Agencije za odgoj i obrazovanje, koja je obavila velik dio posla oko organizacije školsko/ gradskog, županijskog i državnog natjecanja.

Državno natjecanje iz matematike za učenike osnovnih i srednjih škola ove je godine održano u Poreču. Sve se odvijalo u hotelima Pical 2 i Zagreb. U prvom je bilo smješteno Državno povjerenstvo, a održavalo se i samo natjecanje. Ovdje je bilo otvaranje natjecanja, pregledavanje učeničkih radova i na kraju proglašenje rezultata i podjela nagrada. Od pozvanih 257 učenika sudjelovalo ih je 255 i to: 89 iz osnovnih škola (V. – 23, VI. – 20, VII. – 22, VIII. – 24), 92 iz srednjih škola A varijante (I. – 22, II. – 24, III. – 24, IV. – 22) i 74 iz srednjih škola B varijante (I. – 20, II. – 17, III. – 19, IV. – 18).

Prvog dana održan je sastanak Državnog povjerenstva, a zatim smo obavili posljednje pripreme za sutrašnje natjecanje. Navečer je u Kongresnoj dvorani održano svečano otvaranje 59. Državnog natjecanja. Prisutnima su se obratili: *Predrag Brkić*, prof. matematike i ravnatelj Osnovne škole Jože Šurana Višnjan, *Oliver Arman*, zamjenik načelnika općine Vižinada, *Draženka Kovačević*, tajnica i *Mea Bombardelli*, predsjednica Državnog povjerenstva.

Natjecanje se održavalo u dvije velike dvorane u hotelu. Povjerenstvo je pregledavalo i ocjenjivalo učenička rješenja, a navečer su se rješavale žalbe. Nakon toga Državno povjerenstvo je donijelo konačnu rang-listu i odlučilo o nagradama. Po unaprijed utvrđenim pravilima određeni su učenici koji će sudjelovati na Hrvatskoj matematičkoj olimpijadi u borbi za mjesto u po jednoj od dvije šesteročlane ekipe za 59. Međunarodnu matematičku olimpijadu (IMO) u Rumunjskoj i 12. Srednjoeuropsku matematičku olimpijadu (MEMO) u Poljskoj. Također će biti izabrano četvoro učenika srednjih škola koji će sudjelovati na Mediteranskom natjecanju (MYMC) u Italiji.

Također će na Hrvatskoj juniorskoj matematičkoj olimpijadi biti izabrana četveročlana ekipa učenika sedmih i osmih razreda osnovnih škola koje će sudjelovati na Juniorskoj Balkanskoj matematičkoj olimpijadi u Grčkoj.

Na svečanom proglašenju rezultata uručeni su najboljim mladim matematičarima priznanja, i knjige koje je osiguralo Hrvatsko matematičko društvo. Osnovnoškolcima je uručeno 10 prvih, 10 drugih i 12 trećih nagrada, dok je 15 učenika bilo pohvaljeno. Za srednje je škole podijeljeno 5 prvih, 5 drugih, 14 trećih nagrada i 13 pohvala za A varijantu, te 5 prvih, 6 drugih, 6 trećih nagrada i 16 pohvala za B varijantu.

Dok su učenici rješavali zadatke, u jednoj dvorani se održavao *Seminar za mentore* na kojem su održana tri predavanja:

- Jelena Noskov, prof., *Pisanje ishoda učenja u pedagoškoj dokumentaciji*
- dr. sc. Azra Tafro, *Dirichletov i ostali principi na Županijskom natjecanju*

- Vesko Nikolaus, mag. educ. math. et phy., *DOS-ovi.*

Trećeg dana, prije proglašenja rezultata i podjele nagrada Korado Korlević, prof. održao je predavanje *Koliko rano se mladi mogu početi baviti znanošću.* Iako je ono bilo o znanosti, u razgovoru neposredno poslije najviše se govorilo o astronomiji.

Nagrade i pohvale učenika srednjih škola

A varijanta

I. razred

Ivan Vojvodić, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Vedran Cifrek*, XV. gimnazija, Zagreb, *Krešimir Nežmah*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Gabrijel Radovčić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Marko Preočanin*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Jakov Ljubičić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Andrej Čizmarević*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka, *Nikola Kušen*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin (pohvala).

II. razred

Noel Lakić, Gimnazija Franje Petrića, Zadar (I. nagrada); *Luka Bulić Bračulj*, III. gimnazija, Split (II. nagrada); *David Mikulčić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Martin Josip Kocijan*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec, *Mislav Brnetić*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Barbara Sumić*, III. gimnazija, Split, *Luka Buršić*, Gimnazija Pula, Pula, *Ida Kolmanić*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Matej Ljubičić*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

III. razred

Marin Varivoda, Gimnazija Franje Petrića, Zadar (I. nagrada); *Daniel Širola*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Krunoslav Ivanović*, XV. gimnazija, Zagreb, *Andrija Tomorad*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Jakov Cigrovski*, XV. gimnazija, Zagreb, *Luka Milačić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Ante Svaguša*, XV. gimnazija, Zagreb, *Karlo Bujas*, V. gimnazija, Zagreb, *Marko Viduka*, Gimnazija Jurja Barakovića, Zadar, *Luka Kraljević*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

IV. razred

Petar Nizić-Nikolac, XV. gimnazija, Zagreb, *Ivan Novak*, Srednja škola Vrbovec, Vrbovec (I. nagrada); *Borna Šimić*, Gimnazija "Matija Mesić", Slavonski Brod (II. nagrada); *Leonard Inkret*, XV. gimnazija, Zagreb, *Tadej Petar Tukara*, XV. gimnazija, Zagreb, *Nikola Sole*, V. gimnazija, Zagreb, *Aleksandra-Saša Božović*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Ivan Sinčić*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka, *Dinko Maduna*, V. gimnazija, Zagreb, *Luka Banović*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka (III. nagrada).

B varijanta

I. razred

Josip Matanić, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb (I. nagrada); *Sebastijan Tukač*, Elektrostrojarska škola, Varaždin, *Tara Baće*, Gimnazija Tituša Brezovačkog, Zagreb (II. nagrada); *Leonarda Pribanić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb (III. nagrada); *Leon Križanić*, Srednja škola Petrinja, Petrinja, *Ivo Kovačević*, Prva sušačka gimnazija u Rijeci, Rijeka (pohvala).

II. razred

Vlado Perković, Gimnazija Sesvete, Zagreb (I. nagrada); *Ivan Nizić*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Makarska (II. nagrada); *Dario Hanžek*, Elektrostrojarska škola, Varaždin (III. nagrada); *Josip Kovač*, Gimnazija Beli Manastir, Beli Manastir, *Marina Matešić*, Gimnazija Vladimira Nazora, Zadar, *Ivan Kovač*, Gimnazija Beli Manastir, Beli Manastir, *Mateja Vuradin*, Druga gimnazija Varaždin, Varaždin, *Ivan Cepanec*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb (pohvala).

III. razred

Kim Staničić, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Makarska, *Fran Pipunić*, IX. gimnazija Zagreb, Zagreb (I. nagrada); *Karlo Frankola*, Srednja škola Mate Blažine, Labin (II. nagrada); *Tvrtko Lončarić*, Privatna klasična gimnazija, Zagreb, *Matija Andričić*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb (III. nagrada); *Marko Barbir*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Makarska, *Josip Srzić*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Makarska, *Leon Lušić*, XV. gimnazija Zagreb, Zagreb, *Lucija Kovačević*, V. gimnazija "Vladimir Nazor", Split, *Marko Opačić*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb (pohvala).

IV. razred

Josip Ivančević, Srednja škola Petra Šegedina, Korčula (I. nagrada); *Tin Sertić*, Gimnazija Sisak, Sisak, *Leon Vranić*, Tehnička škola, Požega (II. nagrada); *Leonardo Max Golušin*, Pazinski kolegij – klasična gimnazija Pazin s pravom javnosti, Pazin, *Marko Mikša*, Srednja škola "Ivan Švear", Ivanić Grad (III. nagrada); *Ivan Petar Draškić*, I. gimnazija, Zagreb, *Luka Krešić*, VII. gimnazija, Zagreb, *Matej Škrabić*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Makarska, *Igor Aradski*, Gimnazija Daruvar, Daruvar (pohvala).

Zadatci s državnog natjecanja – A varijanta

I. razred

1. Odredi sve trojke realnih brojeva (x, y, z) koje zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ x^2 - y^2 + z^2 &= 1 \\ -x^3 + y^3 + z^3 &= -1. \end{aligned}$$

2. Neka su $D_0, D_1, \ldots, D_{2018}$ točke na dužini $\overline{AB}$ takve da je $D_0 = A$, $D_{2018} = B$ i

$$|D_0D_1| = |D_1D_2| = \cdots = |D_{2017}D_{2018}|.$$

Ako je C točka takva da je $\sphericalangle BCA = 90^\circ$, dokaži da vrijedi

$$|CD_0|^2 + |CD_1|^2 + \cdots + |CD_{2018}|^2 = |AD_1|^2 + |AD_2|^2 + \cdots + |AD_{2018}|^2.$$

3. Dani su prosti broj p i prirodni broj $n \geq p - 1$. Ako je broj $np + 1$ kvadrat nekog prirodnog broja, dokaži da je broj $n + 1$ zbroj kvadrata nekih p prirodnih brojeva.

4. U trokutu ABC je $\sphericalangle CAB = 2\sphericalangle ABC$. Točka D nalazi se unutar trokuta ABC, a pritom vrijedi $|AD| = |BD|$ i $|CD| = |AC|$. Dokaži da je $\sphericalangle ACB = 3\sphericalangle DCB$.

5. Za prirodne brojeve raspoređene ukrug kažemo da su u *cik-cak* rasporedu ako je svaki broj ili veći ili manji od oba svoja susjeda. Za par susjednih brojeva kažemo da je *dobar* ako su nakon njegovog uklanjanja preostali brojevi također u cik-cak rasporedu.

Brojevi od 1 do 300 raspoređeni su u cik-cak raspored. Koliki je najmanji mogući broj dobrih parova susjednih brojeva?

II. razred

1. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoje prirodni brojevi a i b takvi da je
$$S(a) = S(b) = S(a+b) = n,$$
pri čemu $S(a)$ označava zbroj znamenaka broja a.

2. Branko ispisuje niz kvadratnih polinoma s realnim koeficijentima. U svakom koraku, nakon prethodno napisanog polinoma $ax^2 + bx + c$, zapisuje polinom $cx^2 + bx + a$ ili polinom $a(x+d)^2 + b(x+d) + c$ za neki realni broj d.
Ako započne s polinomom $x^2 - 2x - 1$, može li Branko opisanim postupkom nakon određenog broja koraka dobiti polinom:
a) $2x^2 - 1$
b) $2x^2 - x - 1$?

3. Dan je trapez $ABCD$. Simetrala kraka $\overline{BC}$ siječe krak $\overline{AD}$ u točki M, a simetrala kraka $\overline{AD}$ siječe krak $\overline{BC}$ u točki N.
Neka su O_1 i O_2 redom središta kružnica opisanih trokutima ABN i CDM. Dokaži da pravac O_1O_2 prolazi polovištem dužine $\overline{MN}$.

4. Odredi sve parove prostih brojeva (p, q) za koje je $p^{q-1} + q^{p-1}$ kvadrat prirodnog broja.

5. Dana je kvadratna ploča s $n \times n$ polja, gdje je n neparan prirodni broj. Svaki od $2n(n+1)$ jediničnih bridova koji omeđuju polja te ploče je ili crvene ili plave boje. Poznato je da je najviše n^2 bridova crvene boje.
Dokaži da postoji polje te ploče čija su barem tri brida plave boje.

III. razred

1. Dokaži da za svaki realni broj x vrijedi
$$\cos^3 \frac{x}{3} + \cos^3 \frac{x+2\pi}{3} + \cos^3 \frac{x+4\pi}{3} = \frac{3}{4} \cos x.$$

2. Neka je $S = \{0, 95\}$. U svakom koraku Lucija proširuje skup S tako da odabire neki polinom s koeficijentima iz S, različit od nulpolinoma, te skupu S dodaje sve cjelobrojne nultočke tog polinoma. Postupak nastavlja odabirom drugog polinoma s koeficijentima iz tako proširenog skupa S dok god na taj način može dobiti nove nultočke.
Dokaži da Lucija može konačnim nizom koraka proširiti skup S do skupa koji nije moguće dalje proširiti. Koliko elemenata tada ima skup S?

3. Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) za koje a^2b dijeli $b^2 + 3a$.

4. Zadan je trokut ABC takav da je $|AB| = |AC|$. Neka su M i N polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ redom. Neka je P sjecište pravca AN s opisanom kružnicom trokuta AMC, različito od A. Pravac kroz točku P paralelan s BC siječe opisanu kružnicu trokuta ABC u točkama B_1 i C_1. Dokaži da je trokut AB_1C_1 jednakostraničan.

5. Dva igrača naizmjence zapisuju po jednu znamenku, redom slijeva nadesno. Igrač gubi ako je nakon njegovog poteza napisan niz znamenaka
$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$
za koji postoji prirodni broj k takav da je broj $\overline{a_k a_{k+1} \ldots a_n}$ djeljiv s 11.

Koji igrač može pobijediti neovisno o igri protivnika?

IV. razred

1. Neka je n prirodni broj. Dokaži da za svaki izbor brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1]$ vrijedi
$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + 1)^2 \geq 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

2. *Gaussov cijeli broj* je kompleksni broj čiji su realni i imaginarni dijelovi cijeli brojevi. Odredi najveći prirodni broj n za koji postoji skup od n Gaussovih cijelih brojeva tako da su kvadrati njihovih apsolutnih vrijednosti uzastopni prirodni brojevi.

3. Neka je $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ funkcija takva da je
$$f(ab) = f(a+b)$$
za sve prirodne brojeve $a \geq 4$ i $b \geq 4$.
Dokaži da je $f(n) = f(8)$ za sve prirodne brojeve $n \geq 8$.

4. Neka su $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ visine šiljastokutnog trokuta ABC. Kružnica promjera $\overline{AC}$ siječe dužinu $\overline{BD}$ u točki F. Kružnica promjera $\overline{AB}$ siječe pravac CE u točkama G i H, pri čemu je G između C i E. Ako je $\sphericalangle C|HF = 12°$, odredi $\sphericalangle AGF$.

5. Na natjecanju sudjeluje 300 natjecatelja. Svaka dva natjecatelja se međusobno ili poznaju ili ne poznaju, a ne postoje tri natjecatelja koji se svi međusobno poznaju. Odredi najveću moguću vrijednost broja n tako da vrijede sljedeći uvjeti:

- Svaki natjecatelj poznaje najviše n ostalih natjecatelja.
- Za svaki prirodni broj m takav da je $1 \leq m \leq n$ postoji barem jedan natjecatelj koji poznaje točno m ostalih natjecatelja.

Zadatci s državnog natjecanja – B varijanta

I. razred

1. Odredite sve parove prirodnih brojeva takve da je njihov osmerostruki najveći zajednički djelitelj za 6 veći od njihovog najmanjeg zajedničkog višekratnika.

2. Odredite periodične brojeve $0.\dot{x}$, $0.\dot{x}\dot{y}$ i $0.\dot{x}y\dot{z}$ za koje vrijedi
$$0.\dot{x} + 0.\dot{x}\dot{y} + 0.\dot{x}y\dot{z} = \frac{445}{333},$$
gdje su x, y, z (ne nužno različite) znamenke.

3. U tablicu dimenzija 300×300 upisani su prirodni brojevi koji nisu veći od 10, pri čemu su brojevi koji leže u poljima sa zajedničkim vrhom relativno prosti. Dokažite da postoji broj koji se pojavljuje bar 15 000 puta.

4. U trapezu $ABCD$ je $AB \parallel CD$, $|AB| = 22$, $|BC| = 10$, $|CD| = 38$, $|DA| = 14$. Kutovi trapeza pri vrhovima A i B su tupi. Simetrale kutova pri vrhovima A i D sijeku se u točki E, a simetrale kutova pri vrhovima B i C u točki F. Izračunajte površinu šesterokuta $ABFCDE$.

5. Odredite sve cijele brojeve a za koje rješenje (x, y) sustava jednadžbi
$$x + (a+1)y = 2$$
$$a(2x - y) - a(ay + 1) = 3$$
zadovoljava uvjet $|x + y| \leqslant \dfrac{2018}{a+1}$.

II. razred

1. Za koje vrijednosti realnog parametra m vrijedi nejednakost $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2<47$ ako su x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $x^2-(2^{m-1}-5)x+1=0$?

2. Odredite sve uređene parove cijelih brojeva (x,y) za koje vrijedi

$$(xy-1)^2=(x+1)^2+(y+1)^2.$$

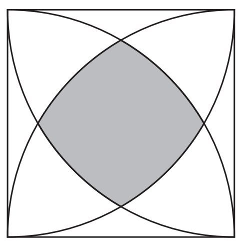
3. U trokutu kojemu su duljine stranica a, b, c i nasuprotni kutovi redom α, β, γ vrijedi jednakost

$$a^3+b^3+c^3=ab(a+b)-bc(b+c)+ac(a+c).$$

Ako je $\cos\beta=\frac{24}{25}$, odredite omjer u kojemu visina iz vrha kuta α dijeli njemu nasuprotnu stranicu.

4. Zbroj četiri pozitivna realna broja je 8, a zbroj njihovih kvadrata 40. Odredite najveću moguću vrijednost koju jedan od tih brojeva može poprimiti.

5. Unutar kvadrata je iz svakog vrha povučen kružni luk polumjera a, gdje je a duljina stranice kvadrata. Odredite opseg i površinu osjenčanog lika.



III. razred

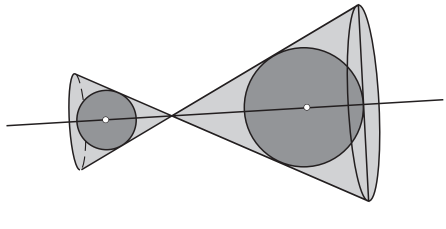
1. Odredite sve cijele brojeve x takve da je $\log_3 \frac{2x+60}{x+5}$ također cijeli broj.

2. U trokutu sa stranicama duljina a, b, c i površinom P vrijedi jednakost

$$\sqrt{3}(b^2+a^2-c^2)=2ab-4P.$$

Izračunajte mjeru kuta nasuprot stranice duljine c.

3. Dvije kugle polumjera 3 cm i 5 cm upisane su u dva stošca kao što je prikazano na slici. Stošci imaju jednake vršne kutove i zajedničku os koja je okomita na baze stožaca te prolazi njihovim središtima i zajedničkim vrhom. Udaljenost između baza je 40 cm. Ako svaka kugla dodiruje plašt i bazu pripadnog stošca, izračunajte ukupni obujam stožaca.



4. U konveksnom četverokutu $ABCD$ je $|AB| = 15$, $|BC| = 20$, $|CD| = 24$, a kutovi pri vrhovima B i D su pravi. Izračunajte udaljenost između polovišta dijagonala četverokuta $ABCD$.

5. Mate i Roko su, pripremajući se za natjecanje, postavljali jedan drugome "nerješive" zadatke. Tako je Roko pitao Matu: *Znaš li koliko iznosi zbroj znamenaka broja* 3^{2018} *?*

Na to je Mate odgovorio novim pitanjem:

Ne znam, a znaš li ti koji je broj 2018. *po redu ako nastaviš niz u kojem je prvi broj* 3^{2018}*, drugi broj zbroj njegovih znamenaka, treći broj zbroj znamenaka drugog broja i tako dalje? Svaki je sljedeći broj u tom nizu jednak zbroju znamenaka prethodnog broja!*

Pokažite da je Matino pitanje rješivo i odredite 2018. broj u tom nizu.

IV. razred

1. Dokažite da je zbroj prvih $1 + 3 + 9 + \ldots + 3^m$ prirodnih brojeva jednak

$$1^2 + 3^2 + 9^2 + \ldots + (3^m)^2.$$

2. Marina je u žurbi upisala u tablicu 5×5 samo neke od brojeva koje je trebala upisati. Zbunjenoj je prijateljici objasnila da će lako kasnije popuniti tablicu jer su brojevi u svakom retku i svakom stupcu poredani tako da čine 5 uzastopnih članova aritmetičkog niza. Popunite tablicu brojevima koje Marina nije upisala.

3				
		31		
	11			
				27

3. Odredite $f^{2018}(2018)$ ako za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$(x-1)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1}.$$

Napomena: $f^{2018}(x) = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{2018})(x)$.

4. Skup svih točaka koje zadovoljavaju jednadžbu $x^2 + y^2 = 8|x| + 6|y|$ je krivulja u ravnini. Odredite površinu dijela ravnine koji je omeđen tom krivuljom. Koliko ima točaka (x, y) s cjelobrojnim koordinatama koje leže unutar te krivulje (ne na krivulji) za koje vrijedi $xy > 0$?

5. U trokutu ABC je $\sphericalangle CAB = 50^\circ$ i $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Na stranici $\overline{AB}$ nalazi se točka D, a na stranici $\overline{BC}$ točka E tako da je $\sphericalangle CAE = \sphericalangle ACD = 30^\circ$. Izračunajte mjeru kuta $\sphericalangle CDE$.