

Sudoku – napredne metode rješavanja (6.1)

Žarko Čulić¹

U ovom nastavku ćemo obraditi još jednu metodu koja može pomoći pri rješavanju vrlo teških sudokua, a nije toliko komplicirana. Metoda je dobila naziv *Sue de Coq* (*SDC*) po nadimku osobe koja ju je prva upotrijebila. Radi se o naprednoj metodi koja spada u grupu *Subset Counting*.

Postoje dvije varijante *SDC* metode:

1) Četiri kandidata u 2 polja (4 u 2)

a) Uvjeti:

- Gledamo polja u presjeku (intersekciji) retka (stupca) i kvadrata te tražimo 2 polja s ukupno 4 kandidata.
- U ostatku retka (stupca) izvan presjeka treba naći jedno polje sa samo 2 kandidata od tih 4 koji se nalaze u presjeku retka (stupca) i kvadrata.
- U ostatku kvadrata izvan presjeka treba naći jedno polje sa samo 2 preostala kandidata od tih 4; dakle ti kandidati moraju biti različiti od ona 2 iz retka (stupca).

b) Eliminacija:

- U poljima retka (stupca) izvan presjeka možemo eliminirati one kandidate koji se nalaze u poljima tog retka (stupca) izvan polja sa samo dva kandidata.
- Također, u poljima kvadrata izvan presjeka možemo eliminirati one kandidate koji se nalaze u poljima tog kvadrata izvan polja sa samo dva preostala kandidata.

c) Analiza:

- U presjeku kvadrata i retka (stupca) imamo 2 polja s točno 4 kandidata, dok jedno polje u preostalom dijelu retka (stupca) sadrži 2 kandidata, a jedno polje u preostalom dijelu kvadrata sadrži druga 2. Po jedan broj u poljima s parovima izvan presjeka mora biti točan, što dovodi do toga da u presjeku ostaju samo dva kandidata u dva polja. Dakle u ta 4 polja moraju biti ta 4 kandidata. Ne znamo koji su od njih točni u kojim poljima, ali ih možemo eliminirati iz svih povezanih polja izvan presjeka.

2) Pet kandidata u 3 polja (5 u 3)

a) Uvjeti:

- Gledamo polja u presjeku retka (stupca) i kvadrata te tražimo 3 polja s ukupno 5 kandidata.
- U ostatku retka (stupca) izvan presjeka treba naći jedno polje sa samo 2 kandidata od tih 5 koji se nalaze u presjeku retka (stupca) i kvadrata.
- U ostatku kvadrata izvan presjeka treba naći jedno polje sa samo 2 druga kandidata od tih 5; dakle oni moraju biti različiti od ona 2 iz retka (stupca).

b) Eliminacija:

- U poljima retka (stupca) izvan presjeka možemo eliminirati one kandidate koji se nalaze u poljima tog retka (stupca) izvan polja sa samo dva kandidata.

¹ Autor je predavač na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: zculic@math.hr

- Također, u poljima kvadrata izvan presjeka možemo eliminirati one kandidate koji se nalaze u poljima tog kvadrata izvan polja sa samo dva druga kandidata.
- Peti kandidat, koji nije niti u jednom od dva polja izvan presjeka s različitim parovima od tih 5 kandidata, mora biti točan u jednom polju presjeka i stoga ga možemo eliminirati iz svih polja koja ga vide.

c) Analiza:

- U presjeku kvadrata i retka (stupca) imamo 3 polja s točno 5 kandidata, dok jedno polje u preostalom dijelu retka (stupca) sadrži 2, a jedno polje u preostalom dijelu kvadrata sadrži druga 2. Po jedan broj u poljima s parovima izvan presjeka mora biti točan, što dovodi do toga da u presjeku ostaju samo tri kandidata u tri polja. Dakle u tih 5 polja mora biti tih 5 kandidata. Ne znamo koji su kandidati točni u kojim poljima, ali ih možemo eliminirati iz svih povezanih polja izvan presjeka i polja s dotičnim parom, dok peti mora biti točan u polju ili poljima presjeka.

Pogledajte primjer na slici 1.

U presjeku kvadrata VII i retka G imamo dva polja G1 i G3 s ukupno četiri kandidata: {3, 4, 5, 9}. U retku G izvan presjeka imamo polje G7 s kandidatima {4, 5}, dok u dijelu kvadrata izvan presjeka imamo polje H3 s druga dva kandidata {3, 9}. Dakle zadovoljeni su uvjeti za *SDC metodu 4 u 2*. Stoga možemo eliminirati brojeve 4 i 5 iz preostalog dijela retka G, konkretno broj 4 iz polja G5 i broj 5 iz polja G8, te brojeve 3 i 9 iz preostalog dijela kvadrata VII, konkretno broj 9 iz polja H1 i I1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	4	8	3	2	7	5 6	5 6	9
B	2	6	7	5	9	4	3	8	1
C	5 9	3	5 9	8	6	1	7	4	2
D	3	9	6	4	5	2	1	7	8
E	7	1	4	6	3	8	9	2	5
F	8	5	2	1 7	1 7	9	4 6	3 6	4 6
G	4 5 9	8	5 9	2 4	1 3	6	4 5	5 9	7
H	4 6 9	7	3 9	1 9	8	5	2	1 3 6	4 6
I	4 5 6 9	2	1	7 9	4 7	3	8	5 6 9	4 6

Slika 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	3 9	3 5 6 9	5 3 9	7	2	8	4	1	5 6 9
B	1	4 5 6	2	9	3	4 5 6	8	7	5 6
C	4 8	3 4 5 6 7 8	3 4 5 6 7 8	1	4 6	4 5 6	2 5	2 3 5 6	9
D	6	8	4 5 7 9	3 7 9	2 3 4 7	1 4 7	1 2 3 7	2 5 9	2 3 4 5 7
E	4 7	2 3 4 5 7	2 3 4 5 7	3 8	2 3 4 7 8	9	6	4 5	1
F	4 9	2 3 9	1 4 7 9	3 6	2 3 6	5	2 4 7	2 3 9	8
G	7	9 8 9	3 8 9	4 6 8 9	2 3 6	1	5 6	2 5 6	5 6
H	4 8	2 4	6	5	1 7 8	1 2 7	3	9	4 7
I	5 4 9	2 3 4 9	1	2 3 6 7 8 9	6 6 7	2 3 6 7	2 7	2 4 6 8	2 4 6

Slika 2.

Analiza: Neka je u polju G7 točan broj 4, a u polju H3 broj 9. To znači da broj 4 nije točan u polju G1, a broj 9 nije točan u poljima G1 i G3 presjeka. Zaključak je da su u dva polja presjeka preostala samo dva broja 5 i 3. Isto bi bilo da smo pretpostavili da su točni i bilo koji drugi kandidati. Uvijek je točan jedan broj iz jednog para izvan presjeka, tako da u presjeku preostaju samo dva broja u dva polja. To omogućuje zadani uvjet da brojevi u parovima izvan presjeka moraju biti različiti.

U primjeru na slici 2 imamo *SDC* u kvadratu IX i stupcu 9. Imamo 5 kandidata {2, 4, 5, 6, 7} u 3 polja G9, H9 i I9. U polju B9 imamo par {5, 6}, a u polju I7 par {2, 7}. Dakle imamo *SDC metodu 5 u 3*. Prema pravilima metode, zaključujemo da su brojevi 5 i 6 točni u polju B9 i poljima presjeka, da su brojevi 2 i 7 točni u polju I7 i poljima presjeka te da je peti broj točan u poljima presjeka. Stoga možemo eliminirati brojeve 5 i 6 iz ostatka stupca, brojeve 3 i 9 iz ostatka kvadrata i broj 4 iz svih područja

povezanih poljima s presjekom. Konkretno, možemo eliminirati broj 5 iz polja A9 i D9, broj 6 iz polja A9, broj 2 iz polja G8 i I8, dok peti broj 4 možemo eliminirati iz polja D9 i I8.

Iz primjera se vidi da metoda nije ni pretjerano teška ni naporna. Treba prvo pretražiti kvadrat I i stupce 1, 2 i 3 tražeći da budu zadovoljeni uvjeti za $SDC 4 u 2$ ili $5 u 3$. Nakon toga treba preći na kvadrat II i stupce 4, 5 i 6 te tako redom do kvadrata IX i stupaca 7, 8 i 9. Potom treba to isto napraviti, ali sada gledajući retke, a ne stupce. Cijeli postupak traje relativno brzo, no nažalost ne daje uvijek rezultate jer nema polja s različitim parovima izvan presjeka.

Metoda *Sue de Coq* se može proširiti na dva načina:

- 1) Polja presjeka kvadrata i retka (stupca) mogu sadržavati dodatne kandidate; za svakog dodatnog kandidata treba naći dodatno polje u retku (stupcu) ili kvadratu.
- 2) Polja retka (stupca) i polja kvadrata mogu sadržavati kandidate koji se ne nalaze u poljima presjeka retka (stupca) i kvadrata; za svakog dodatnog kandidata neophodno je naći dodatno polje u istom povezanom području.

U primjeru na slici 3 gledamo kvadrat IV i stupac 1: polja presjeka DEF1 sadrže kandidate $\{1, 2, 3, 4, 7, 9\}$. Dakle umjesto standardnih $5 u 3$ imamo $6 u 3$, pa moramo naći dodatno polje izvan presjeka koje sadrži te kandidate (pravilo 1). Našli smo ga u poljima stupca H1 i I1 s kandidatima $\{2, 3, 4\}$. U poljima kvadrata izvan presjeka E2 i F3 imamo kandidate $\{1, 5, 9\}$ koji čine legalnu poziciju s dodatnim kandidatom 5. Imamo $\{1, 5\}$ i $\{5, 9\}$ u dva polja što je zajedno kao da imamo $\{1, 9\}$, dakle za jednog dodatnog kandidata (broj 5) našli smo jedno dodatno polje (pravilo 2).

U primjeru su zadovoljeni svi uvjeti: presjek 6 u 3, ostatak stupca ima 2 polja s 3 kandidata i u ostatku kvadrata imamo 2 polja s 3 kandidata od kojih je jedan isti, pa je to kao da imamo jedno polje s jednim parom kandidata. Ukupno imamo 6 kandidata u 3 polja presjeka i 5 različitih izvan presjeka s dodatnim brojem 5 u dva polja. U ostatku stupca i presjeku su točna 3 broja, u ostatku kvadrata i presjeku 2 broja (bez dodatnog broja) i u presjeku mora biti točan šesti broj 7. Stoga možemo eliminirati brojeve 2, 3 i 4 iz ostatka stupca te brojeve 1, 5 i 9 iz ostatka kvadrata. Konkretno možemo eliminirati brojeve 2 i 4 iz polja G1, broj 5 iz polja D3, E3 i F2 te broj 9 iz D3. Mogli bi eliminirati i šestog kandidata (broj 7) iz povezanih polja koja vide polja presjeka, ali takvih nema.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	6	4	1	⁵ ₇	⁵ ₇	8	3	2	9
B	8	7	3	2	9	1	6	4	5
C	5	9	2	³ ₆	³ ₆	4	1	8	7
D	³ ₇	8	⁵ ₆ ⁹ ₇	⁵ ₆ ⁷ ₈	2	⁵ ₆ ⁷ ₈	4	⁵ ₇ ⁹	1
E	¹ ₄	¹ ₅	⁴ ₅ ⁶ ₇	⁵ ₆ ⁷ ₈	⁵ ₆ ⁷ ₈	9	2	⁵ ₇	3
F	² ₃ ⁵ ₇	² ₃ ⁵ ₇	⁵ ₆ ⁷ ₈	4	1	⁵ ₇	8	⁵ ₇ ⁹	6
G	¹ ₂ ¹ ₂	¹ ₂ ⁵ ₆ ⁸ ₉	⁴ ₅ ⁵ ₆ ⁸ ₉	⁵ ₆ ⁵ ₆ ⁵ ₆	⁵ ₆ ⁵ ₆ ⁵ ₆	² ₅ ⁶	7	3	⁴ ₂
H	² ₃ ⁴ ₅	6	⁴ ₈	9	³ ₇ ² ₃	³ ₇	5	1	⁴ ₂
I	² ₃ ² ₃	² ₃ ⁵	7	1	4	² ₃ ⁵	9	6	8

Slika 3.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	3	2	4	8	6	1	5	9	7
B	6	5	7	9	4	3	8	2	1
C	9	1	8	5	2	7	3	6	4
D	2	⁶ ₇ ⁸ ₉	1	4	3	⁵ ₈ ⁹	⁷ ₉ ⁸ ₉	⁵ ₇ ⁸ ₉	⁵ ₆ ⁸ ₉
E	5	⁷ ₈ ⁹	3	2	¹ ₈	6	¹ ₇ ⁴ ₅ ⁶ ₇	⁴ ₅ ⁶ ₇ ⁸ ₉	⁸ ₉
F	4	⁶ ₈ ⁹	⁶ ₉	7	¹ ₅ ⁸	⁵ ₈ ⁹	¹ ₂ ³ ₄ ⁵ ₆ ⁷ ₈	⁵ ₆ ⁷ ₈ ⁹	⁵ ₆ ⁸ ₉
G	1	⁴ ₉	³ ₂ ⁵ ₆ ⁸ ₉	6	⁵ ₈ ⁹	² ₅ ⁶	² ₄ ³ ₅ ⁶ ₇ ⁸ ₉	⁴ ₅ ⁶ ₇ ⁸ ₉	² ₃ ⁵ ₆ ⁷ ₈ ⁹
H	8	³ ₉	² ₅ ⁹	1	7	4	6	⁵ ₃	² ₃ ⁵ ₉
I	7	⁴ ₆	² ₅ ⁶	3	9	² ₅ ⁸	4	1	² ₅ ⁸

Slika 4.

Treba napomenuti dodatnu mogućnost da se u *SDQ* metodi mogu u presjeku promatrati samo dva od tri polja, a da treće polje čini ili dio retka (stupca) ili dio kvadrata. Pogledajte kvadrat VI i stupac 8 u primjeru na slici 4.

Presjek neka čine samo polja D8 i F8 s kandidatima $\{3, 5, 7, 8\}$. Primijetite da u ovom slučaju polje E8 ne čini ovaj *SDC 4 u 2* iako se nalazi u presjeku kvadrata VI i stupca 8. U stupcu izvan presjeka u polju H8 imamo par kandidata $\{3, 5\}$, dok u kvadratu izvan presjeka u poljima D7 i E9 imamo kandidate $\{7, 8, 9\}$ koji zapravo čine drugi par $\{7, 8\}$ s dodatnim brojem 9. Uvjeti su zadovoljeni: 2 polja s 4 kandidata, u ostatku stupca 1 polje s 2 kandidata od tih 4, a u ostatku kvadrata 2 polja s 2 preostala kandidata i dodatnim brojem 9. Možemo eliminirati brojeve 3 i 5 iz ostatka stupca te brojeve 7, 8 i 9 iz ostatka kvadrata. Konkretno, možemo eliminirati brojeve 3 i 5 iz polja G8 i brojeve 7 iz E7 i E8, 8 iz E8, D9 i F9 te 9 iz E7, F7, D9 i F9.

U sljedećem nastavku će biti više riječi o metodama koje se rijetko primjenjuju jer su ili komplicirane ili se rijetko pronalaze ili nisu dovoljno učinkovite.

Zadatak za vježbu s rješenjem:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1		4				9		
B		7	3	8				4	
C						6			
D			5	6	7			2	
E	2		6		4		5		7
F		1			8	2	4		
G				9					
H		4				3	2	9	
I			2				3		8

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	5	4	2	3	7	9	8	6
B	6	7	3	8	9	5	1	4	2
C	8	2	9	4	1	6	7	3	5
D	4	9	5	6	7	1	8	2	3
E	2	8	6	3	4	9	5	1	7
F	3	1	7	5	8	2	4	6	9
G	7	3	1	9	2	8	6	5	4
H	5	4	8	7	6	3	2	9	1
I	9	6	2	1	5	4	3	7	8