Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $ab \geq 1$. Dokaži nejednakost

$$\left(a + 2017b + \frac{2017}{a+2016}\right)\left(b + 2017a + \frac{2017}{b+2016}\right) \geq 2019^2.$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje. Koristit ćemo poznatu nejednakost Schwarz-Cauchy-Bunyakovsky (skraćemo S-C-B) za pozitivne brojeve:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Stavimo sada

$$a_1 = \sqrt{a}, \quad a_2 = \cdots = a_{2018} = \sqrt{b}, \quad a_{2019} = \sqrt{\frac{2017}{a+2016}},$$

$$b_1 = \sqrt{\frac{2017}{b+2016}}, \quad b_2 = \cdots = b_{2018} = \sqrt{a}, \quad b_{2019} = \sqrt{b}.$$

Prema S-C-B

$$\left(a+2017b+\frac{2017}{a+2016}\right)\left(b+2017a+\frac{2017}{b+2016}\right) \geq \left(2017\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{2017a}{b+2016}}+\sqrt{\frac{2017b}{a+2016}}\right)^2.$$

Kako je $2017\sqrt{ab} \geq 2017$, dovoljno je pokazati

$$\sqrt{\frac{2017a}{b+2016}} + \sqrt{\frac{2017b}{a+2016}} \geq 2 \tag{1}$$

što je ekvivalentno

$$\sqrt{2017(a^2+2016a)} + \sqrt{2017(b^2+2016b)} \geq 2\sqrt{(a+2016)(b+2016)}. \tag{2}$$

Uočimo:

$$\sqrt{2017(a^2+2016a)} = \sqrt{(1+2016)(a^2+2016a)} \geq \text{(S-C-B)} \geq a + 2016\sqrt{a}$$

i analogno

$$\sqrt{2017(b^2+2016b)} \geq b + 2016\sqrt{b}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2017(a^2+2016a)} + \sqrt{2017(b^2+2016b)} \\
&\geq a + b + 2016(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \geq a + b + 2016 \cdot 2\sqrt{\sqrt{ab}} \geq a + b + 2 \cdot 2016 \\
&= (a+2016) + (b+2016) \geq 2\sqrt{(a+2016)(b+2016)}.
\end{aligned}$$

Time je pokazano da vrijedi (2), a onda i (1). Iz korištene S-C-B i A-G nejednakosti odmah slijedi da jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = 1$.

Danica Petolas

Knjigom D. Kovačević, D. Žubrinić, *Uvod u diskretnu matematiku*, 2015., Element, Zagreb, nagrađeni su rješavatelji:

1. *Ivan Novak* (4), Srednja škola Vrbovec, Vrbovec;
2. *Danica Petolas* (1), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb.

Riješili zadatke iz br. 2/270

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Medžida Alihodžić* (3), Gimnazija "Visoko", Visoko, BiH, 3612, 3619; *Danica Petolas* (1), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, 3609–3622; *Matija Tomić* (2), Osnovna gimnazija Don Bosco, Žepće, BiH, 3609.

b) Iz fizike: *Borna Cesarec* (8), OŠ Augusta Cesarca, Krapina, 430–433; *Lorena Ivaniševć* (8), OŠ Horvati, Zagreb, 432.

Nagradni natječaj br. 223

Riješi sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -3 && (J_1)\\ x_2 + x_3 &= -2 && (J_2)\\ x_3 + x_4 &= -1 && (J_3)\\ x_4 + x_5 &= 0 && (J_4)\\ x_5 + x_6 &= 1 && (J_5)\\ x_6 + x_7 &= 2 && (J_6)\\ x_7 + x_1 &= 3 && (J_7) \end{aligned}$$

SVIM SURADNICIMA

U Matematičko fizičkom listu objavljuju se članci iz matematike, fizike i informatike, s malim prilogom iz astronomije, zadatci i rješenja, prikazi natjecanja i ljetnih škola iz matematike i fizike, zanimljivosti u obliku članaka i zadataka od učenika, profesora i ostalih matematičara, novosti iz znanosti, prilozi o državnoj maturi i nagradni natječaj.

Prilozi trebaju biti napisani računalom (Word, Tex, Latex) ili pisaćim strojem.

Slike trebaju biti jasno nacrtane na posebnom papiru i pogodne za presnimavanje ili pošaljite slike crtane računalom (eps, tif, gif, jpg, png i sl.).

Članci neka ne budu dulji od osam stranica, a ako je to potrebno neka budu napisani u nastavcima.

Pozivaju se učenici da pošalju članak o nekoj zanimljivoj temi, originalne zadatke s rješenjima ili prikaze nekih manifestacija (ljetne škole, susreti učenika, rad školske grupe).

Kako se rukopisi ne vraćaju, sačuvajte original, a pošaljite kopiju na papiru formata A-4.

Svi rukopisi podliježu recenziji redakcije ili neke stručne osobe za određeno područje.

Prilozi se šalju na adresu ovog časopisa koja je na početku lista.

RJEŠAVATELJIMA ZADATAKA

Svako rješenje neka bude napisano na **posebnom** papiru i to samo na **jednoj** strani papira. Uz svako rješenje na vrhu papira treba potpuno ispisati tekst zadatka. Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačiti razred, školu i mjesto. **Rješenja se mogu slati i e-poštom na adresu glavnog urednika:** `hanjs@math.hr`

Matematičko fizički list na Facebooku

Možete pronaći MFL i na Facebooku na stranici

`https://www.facebook.com/MatFizL`

Uz razno-razne podatke o MFL-u moći ćete naći i nove zadatke za rješavanje.