ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.2 (2019) 47–56

Skiciranje grafova nekih složenih trigonometrijskih funkcija

Mandi Orlić Bachler, Luka Marohnić, Martina Dokić

Sažetak

U radu se opisuje kako se na elementaran način (bez primjene diferencijalnoga računa, te praktički koristeći samo papir i olovku) mogu na nekom segmentu $[a,b]\subset\mathbb{R}$ skicirati grafovi nekih složenih trigonometrijskih funkcija oblika

$$\begin{aligned} f(x) &= A\sin(g(x))\,,\\ f(x) &= A\cos(g(x))\,,\\ f(x) &= g(x)\cdot\sin(\omega\,x+\varphi)\,,\\ f(x) &= g(x)\cdot\cos(\omega\,x+\varphi)\,, \end{aligned}$$

gdje su $A,\omega>0$ i $\varphi\in[-\pi,\pi]$ realne konstante, a $g\colon\mathbb{R}\to\langle 0,+\infty\rangle$ kvadratna ili eksponencijalna funkcija.

Ključni pojmovi: trigonometrijske funkcije, grafovi, skiciranje

1 Uvod

U sklopu matematičkih i strukovnih kolegija na visokoškolskim ustanovama, studenti se često susreću sa zadacima u kojima je potrebno skicirati graf funkcije koji služi kao zorna pomoć u rješavanju zadanog problema. Najčešće, skiciranje grafa temelji se na ispitivanju toka funkcije, a taj posao zna vrlo često biti dugačak i složen, pogotovo kada se

Ovaj rad je podržan od strane Hrvatske zaklade za znanost (HRZZ) u okviru projekta UIP-05-2017-9219.

radi o složenim funkcijama poput ovih koje ćemo promatrati u radu, a koje su oblika:

$$f(x) = A\sin(g(x)) \quad \text{odnosno} \quad f(x) = A\cos(g(x))\,, \text{ te} \tag{1}$$
$$f(x) = g(x)\cdot\sin(\omega\, x+\varphi) \quad \text{odnosno} \quad f(x) = g(x)\cdot\cos(\omega\, x+\varphi)\,, \tag{2}$$

gdje su: $A, \omega > 0$ i $\varphi \in [-\pi, \pi]$ realne konstante. Zbog jednostavnosti za funkciju g promatrat ćemo samo one oblike funkcija čije grafove nije teško nacrtati (primjerice $g(x) = e^{-x}$ ili $g(x) = 1 + x^2$). Prema tome, neka je $g\colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ funkcija oblika

$$g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \text{gdje je} \quad \alpha > 0 \quad \text{i} \quad \beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma < 0 \tag{3}$$

ili oblika

$$g(x) = e^{\alpha x + \beta}, \tag{4}$$

gdje su α, β i γ realne konstante. Stoga, kako bismo skiciranje sveli na brz i rutinski posao, opisat ćemo metode koje se sastoje u tome da se, kao pomoćno sredstvo za skiciranje grafa funkcije f, najprije konstruira graf funkcije g (što je značajno lakše i jednostavnije za učiniti u odnosu na konstruiranje grafa funkcije f).

Postupci konstruiranja grafova funkcija g u radu neće biti ni objašnjeni, ni dokazani, ni popraćeni odgovarajućim crtežima. Te funkcije se obrađuju u sastavu nastavnih programa matematike u gimnazijama, ali i u sastavu nastavnih programa matematičkih predmeta na većini visokoobrazovnih ustanova u Republici Hrvatskoj. O svojstvima funkcija g, kao i postupak konstrukcije njihovih grafova, može se pronaći u literaturi [1, 2, 3].

Rad je podijeljen u dva dijela. U prvom dijelu rada opisan je postupak skiciranja grafova funkcija oblika (1), a u drugom dijelu funkcija oblika (2).

2 Graf funkcije oblika $f(x) = A\sin(g(x))$

Postupak skiciranja grafa funkcije $f\colon \mathbb{R} \to [-A, A]$ zadane formulom

$$f(x) = A\sin(g(x))\,,$$

gdje je A realna konstanta i $g\colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ funkcija oblika (3) ili (4), sastoji se u tome da se prvo skicira graf funkcije g te da se pomoću njega grafički odrede točke presjeka funkcije f i koordinatnih osi te lokalni ekstremi. Postupak za skiciranje grafa funkcije f na segmentu $[a, b]$ sastoji se od sljedećih koraka:

1. Nacrtati graf funkcije g na segmentu $[a, b]$.

2. Na grafu g odrediti točke A_i, $i \in \mathbb{N}$ čije ordinate su oblika

$$g(x_i) = \frac{\pi}{2} \cdot k\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

a apscise $x_i \in [a, b]$.

3. Spustiti okomice iz točaka A_i na pravce $y = A$, $y = -A$ i $y = 0$. Točke njihova presjeka su lokalni ekstremi ili nultočke funkcije f na segmentu $[a, b]$. Za tako dobivene točke možemo dati sljedeće zaključke:

   (a) U točkama

   $$x_i = g^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}(1 + 4k)\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

   funkcija f postiže maksimalnu vrijednost A. Točke x_i dobivene su kao presjek pravca $y = A$ i okomica spuštenih iz točaka $A_i\left(x_i, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

   (b) U točkama

   $$x_i = g^{-1}\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}(3 + 4k)\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

   funkcija f postiže minimalnu vrijednost $-A$. Točke x_i dobivene su kao presjek pravca $y = -A$ i okomica spuštenih iz točaka $A_i\left(x_i, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

   (c) U točkama

   $$x_i = g^{-1}(k\pi)\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

   funkcija f siječe os apscisa. Točke x_i dobivene su kao presjek pravca $y = 0$ i okomica spuštenih iz točaka $A_i(x_i, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Odrediti točku presjeka funkcije f i osi y.

5. Skicirati krivulju koja prolazi točkama dobivenim u trećem i četvrtom koraku. To je graf funkcije f.

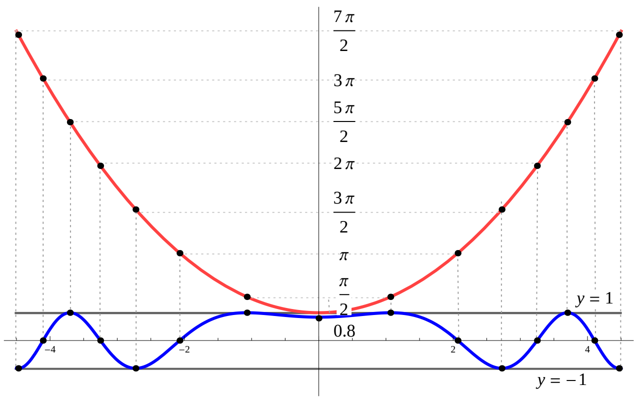
Napomena: Gore opisanim postupkom, na segmentu $[a, b]$ koji bi trebao sadržavati barem dvije točke definirane u trećem koraku te točku 0 definiranu u četvrtom koraku, može se dobiti i graf funkcije oblika $f(x) = A\sin(g(x))$ i $f(x) = A\cos(g(x))$, gdje je A realna konstanta. Stoga, za segment $[a, b]$ nužno je da postoji cijeli broj k takav da vrijedi $g([a, b]) \supseteq \left[\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right]$.

Zadatak 1. *Skicirati graf funkcije* $f(x) = \sin\left(1+\frac{x^2}{2}\right)$ *na segmentu* $[-5,5]$.

Rješenje

1. Nacrtati graf funkcije $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ na zadanom segmentu.
2. Na grafu g odrediti točke čije su ordinate: $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{2}$.
3. Iz točaka, određenih u drugom koraku, čije su ordinate $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$, spustiti okomice na pravac $y = 1$; čije su ordinate $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$, spustiti okomice na pravac $y = -1$ te onih čije su ordinate $\pi, 2\pi, 3\pi$ spustiti okomice na pravac $y = 0$.
4. Točka presjeka funkcije f i osi y je $(0, 0.8)$.
5. Kroz točke dobivene u trećem i četvrtom koraku skicirati krivulju. Ta krivulja je graf funkcije f.

Na slici 1 ilustriran je postupak skiciranja grafa funkcije $f(x) = \sin\left(1+\frac{x^2}{2}\right)$ na segmentu $[-5,5]$.



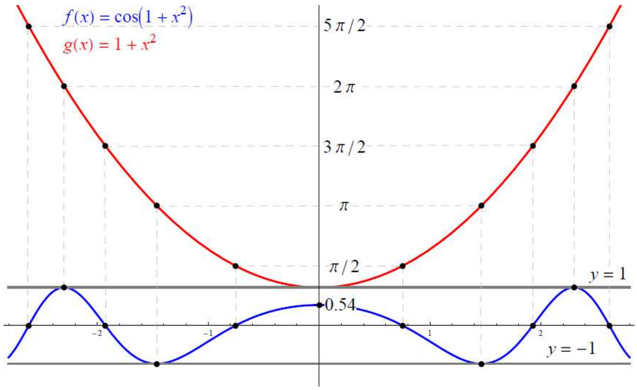
Slika 1: Graf funkcije $f(x) = \sin\left(1+\frac{x^2}{2}\right)$ na segmentu $[-5,5]$. Pomoćni graf funkcije $x \mapsto 1 + \frac{x^2}{2}$ prikazan je crvenom, pravci $y = 1$ i $y = -1$ sivom, a graf funkcije f plavom bojom.

Primjenom istog postupka riješite sljedeće zadatke:

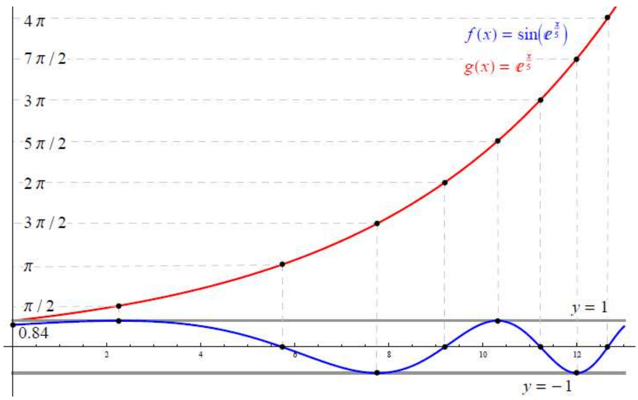
Zadatak 2. *Skicirati graf funkcije* $f(x) = \cos\left(1+x^2\right)$ *na segmentu* $[-2.8, 2.8]$.

Zadatak 3. *Skicirati graf funkcije* $f(x) = \sin\left(e^{\frac{x}{5}}\right)$ *na segmentu* $[0, 13]$.

Rješenje drugog i trećeg zadatka prikazano je na slici 2 odnosno slici 3



Slika 2: Graf funkcije $f(x) = \cos\left(1 + x^2\right)$ na segmentu $[-2.8, 2.8]$. Pomoćni graf funkcije $x \mapsto 1 + x^2$ prikazan je crvenom, pravci $y = 1$ i $y = -1$ sivom, a graf funkcije f plavom bojom.



Slika 3: Graf funkcije $f(x) = \sin\left(e^{\frac{x}{5}}\right)$ na segmentu $[0, 13]$. Pomoćni graf funkcije $x \mapsto e^{\frac{x}{5}}$ prikazan je crvenom, pravci $y = 1$ i $y = -1$ sivom, a graf funkcije f plavom bojom.

3 Graf funkcije oblika $f(x) = g(x) \cdot \sin(\omega\, x + \varphi)$

Neka je $g\colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ funkcija oblika (3) ili (4). Pretpostavimo da na nekom segmentu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ želimo skicirati graf funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane formulom

$$f(x) = g(x) \cdot \sin(\omega\, x + \varphi),$$

gdje su $\omega > 0$ i $\varphi \in [-\pi, \pi]$ realne konstante.

Budući da vrijedi $g(x) > 0$ (tj. $g(x) = |g(x)|$) i $|\sin(\omega\, x + \varphi)| \leq 1$ za sve $x \in \mathbb{R}$, vrijedi $g(x)|\sin(\omega\, x + \varphi)| \leq g(x)$, a odavde je

$$|g(x)| \cdot |\sin(\omega\, x + \varphi)| = |f(x)| \leq g(x),$$

to jest

$$-g(x) \leq f(x) \leq g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

što znači da se graf funkcije f nalazi između grafova funkcija g i $-g$.

Nultočke funkcije f nije teško naći. Budući da funkcija g ima samo pozitivne vrijednosti, vrijedi $f(x) = 0 \iff \sin(\omega\, x + \varphi) = 0$. Dakle, skup N_f nultočaka funkcije f podudara se sa skupom nultočaka N_h harmonijske funkcije $h(x) = \sin(\omega\, x + \varphi)$, pa prema [4, str. 23] vrijedi

$$N_f = N_h = \left\{ \frac{k\,\pi - \varphi}{\omega} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Funkcija h, čiji je temeljni period $T = \frac{2\,\pi}{\omega}$, postiže maksimalnu vrijednost 1 u točkama

$$x_k^+ = -\frac{\varphi}{\omega} + \frac{T}{4} + \frac{2\,k\,\pi}{\omega} = \frac{\pi - 2\,\varphi}{2\,\omega} + \frac{2\,k\,\pi}{\omega}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

a minimalnu vrijednost -1 u točkama

$$x_k^- = -\frac{\varphi}{\omega} + \frac{3\,T}{4} + \frac{2\,k\,\pi}{\omega} = \frac{3\,\pi - 2\,\varphi}{2\,\omega} + \frac{2\,k\,\pi}{\omega}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(vidi [4, str. 24]). Ako je x točka maksimuma funkcije h, tada vrijedi $f(x) = g(x)$, a ako je x točka minimuma funkcije h, tada vrijedi $f(x) = -g(x)$. Drugim riječima, graf funkcije f siječe graf funkcije g isključivo u točkama x_k^+ odnosno graf funkcije $-g$ isključivo u točkama x_k^- za $k \in \mathbb{Z}$. Odredimo derivaciju funkcije f (koju dobivamo prema pravilima za određivanje derivacije umnoška i derivacije složene funkcije, vidi [4, str. 32]):

$$f'(x) = g'(x)\, \sin(\omega\, x + \varphi) + \omega\, g(x)\, \cos(\omega\, x + \varphi).$$

Kako je $h(x_k^+) = \sin(\omega\, x_k^+ + \varphi) = 1$ i vrijedi $\sin^2(\omega\, x_k^+ + \varphi) + \cos^2(\omega\, x_k^+ + \varphi) = 1$, dobivamo $\cos(\omega\, x_k^+ + \varphi) = 0$, pa vrijedi

$$f'(x_k^+) = g'(x_k^+), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Potpuno analogno dobivamo

$$f'(x_k^-) = g'(x_k^-), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Odavde slijedi da se grafovi funkcija f i g odnosno $-g$ dodiruju u točkama x_k^+ odnosno x_k^- za $k \in \mathbb{Z}$, tj. u tim točkama se sijeku i imaju zajedničku tangentu.

Napomenimo da se lokalni ekstremi funkcije f općenito ne podudaraju s lokalnim ekstremima harmonijske funkcije h. Naime, u tim je točkama vrijednost funkcije f' jednaka vrijednosti funkcije g' koja je, za funkciju g oblika (4), uvijek različita od nule (eksponencijalna funkcija je strogo rastuća), pa točke x_k^+ i x_k^- općenito ne ispunjavaju nužan uvjet za lokalni ekstrem, a to je da derivacija f' u tim točkama ima vrijednost nula (vidi [4, str. 33]). Za razliku od nultočaka, lokalne ekstreme funkcije f nije lako odrediti. Također, nizovi lokalnih minimuma odnosno lokalnih maksimuma funkcije f općenito nisu aritmetički, kao što su to kod funkcije h.

Na osnovu dobivenih rezultata možemo dati sljedeći postupak za skiciranje funkcije f na segmentu $[a, b]$, koji bi trebao sadržavati najmanje po jednu točku x_k^+ i x_k^-.

1. Skicirati (pomoćne) grafove funkcija g i $-g$ na segmentu $[a, b]$.
2. Ucrtati točke iz skupa $N_f \cap [a, b]$ na os apscisa.
3. Ucrtati točke grafa funkcije g s apscisom $x_k^+ \in [a, b]$, $k \in \mathbb{Z}$ te povući tangente u tim točkama.
4. Ucrtati točke grafa funkcije $-g$ s apscisom $x_k^- \in [a, b]$, $k \in \mathbb{Z}$ te povući tangente u tim točkama.
5. Skicirati krivulju koja prolazi točkama dobivenim u drugom koraku, dodiruje graf funkcije g u točkama dobivenim u trećem koraku te graf funkcije $-g$ u točkama dobivenim u četvrtom koraku. To je graf funkcije f.

Napomena: Gore opisanim postupkom može se dobiti i graf funkcije oblika $f(x) = g(x)\,\sin(\omega\, x+\varphi)$ i $f(x) = g(x)\,\cos(\omega\, x+\varphi)$ gdje su $\omega \neq 0$ i φ proizvoljni realni brojevi. Naime, svaka se funkcija oblika $\sin(\omega\, x + \varphi)$ ili $\cos(\omega\, x + \varphi)$ može zapisati kao harmonijska funkcija (vidi [4, str. 23]).

Zadatak 4. *Skicirati graf funkcije* $f(x) = \left(1 + \frac{x^2}{10}\right) \cdot \sin x$ *na segmentu* $[0, 3\,\pi]$.

Rješenje

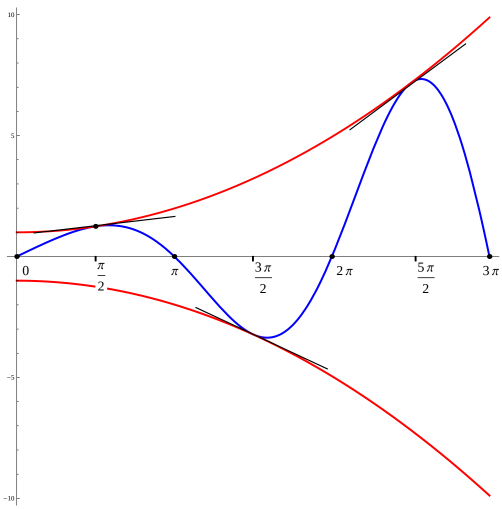
1. Nacrtati grafove funkcija g i $-g$ tj. $x \mapsto 1 + \frac{x^2}{10}$ i $x \mapsto -1 - \frac{x^2}{10}$ na zadanom segmentu.
2. Ucrtati nultočke funkcije f: $0, \pi, 2\pi, 3\pi$.

3. Ucrtati točke s apscisom $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ na grafu funkcije g te kroz njih povući tangente.

4. Ucrtati točku s apscisom $\frac{3\pi}{2}$ na grafu funkcije $-g$ te kroz nju povući tangentu.

5. Na ranije opisan način iz podataka dobivenih u prethodnim koracima skicirati krivulju. Ta krivulja je graf funkcije f.

Na slici 4 ilustriran je postupak skiciranja grafa funkcije $f(x) = \left(1 + \frac{x^2}{10}\right) \cdot \sin x$ na segmentu $[0, 3\,\pi]$.



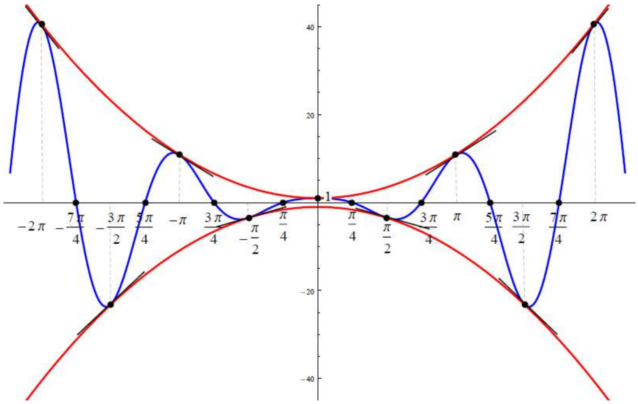
Slika 4: Graf funkcije $f(x) = \left(1 + \frac{x^2}{10}\right) \cdot \sin x$ na segmentu $[0, 3\,\pi]$. Pomoćni grafovi funkcija $x \mapsto 1 + \frac{x^2}{10}$ i $x \mapsto -1 - \frac{x^2}{10}$ prikazani su crvenom, a graf funkcije f plavom bojom.

Primjenom istog postupka riješite sljedeće zadatke:

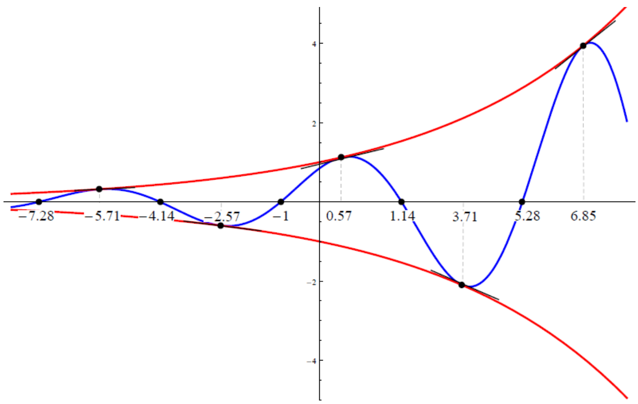
Zadatak 5. *Skicirati graf funkcije* $f(x) = \left(1 + x^2\right) \cdot \cos(2x)$ *na segmentu* $[-7, 7]$.

Zadatak 6. *Skicirati graf funkcije* $f(x) = e^{\frac{x}{5}} \cdot \sin(x+1)$ *na segmentu* $[-8, 8]$.

Rješenje petog i šestog zadatka prikazano je na slici 5 odnosno slici 6.



Slika 5: Graf funkcije $f(x) = \left(1 + x^2\right) \cdot \cos(2x)$ na segmentu $[-7, 7]$. Pomoćni grafovi funkcija $x \mapsto 1+x^2$ i $x \mapsto -1-x^2$ prikazani su crvenom, a graf funkcije f plavom bojom.



Slika 6: Graf funkcije $f(x) = e^{\frac{x}{5}} \cdot \sin(x + 1)$ na segmentu $[-8, 8]$. Pomoćni grafovi funkcija $x \mapsto e^{\frac{x}{5}}$ i $x \mapsto -e^{\frac{x}{5}}$ prikazani su crvenom, a graf funkcije f plavom bojom.

Literatura

[1] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2, 1. dio: udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Element, 2014.

[2] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2, 2. dio: udžbenik i zbirka za-*

dataka za 2. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, Element, 2014.

[3] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Element, 2014.

[4] B. Kovačić, L. Marohnić, T. Strmečki, *Repetitorij matematike za studente elektrotehnike*, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb, 2016.

Mandi Orlić Bachler
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Graditeljski odjel, Av. V. Holjevca 15, Zagreb
E-mail adresa: `mandi.orlic@tvz.hr`

Luka Marohnić
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Elektrotehnički odjel, Konavoska 2, Zagreb
E-mail adresa: `luka.marohnic@tvz.hr`

Martina Dokić
studentica preddiplomskog stručnog studija graditeljstva, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Graditeljski odjel, Av. V. Holjevca 15, Zagreb
E-mail adresa: `martina.dokic@tvz.hr`