ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.2 (2019) 127–148

Dokazivanje nejednakosti korištenjem simetrija

Vjekoslav Kovač

Sažetak

Obradit ćemo jednu tehniku kojom se zadana nejednakost može lako dokazati zahvaljujući nekoj svojoj simetriji i to tako da se najprije dokaže njezina „lošija" varijanta, koja se potom „poboljša". Općenitu ideju obrazložit ćemo na nekoliko primjera iz raznih grana matematike.

Ključni pojmovi: rješavanje problema, nejednakost, spektralni radijus, princip maksimuma modula, metoda eksponencijalnog momenta, šetnja na grafu

1 Uvod

Ovaj članak je nastao na temelju jednog autorovog predavanja u sklopu fakultativnog predmeta *Studentska natjecanja iz matematike*[1], koji se izvodi na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Shodno tome, gradivo je prilagođeno studentima preddiplomskog studija matematike, ali većinu će primjera razumjeti i studenti prirodnih i tehničkih znanosti te učenici srednjih škola koji se pripremaju za matematička natjecanja.

Mnogi problemi iz raznih grana matematike svode se na dokazivanje izvjesnih *nejednakosti*, tj. *ocjena*. U svojem najopćenitijem obliku, nejednakost se može zapisati

$$L(\mathbb{x}) \leq D(\mathbb{x}) \quad \text{za svaki } \mathbb{x} \in \mathbb{X}, \tag{1}$$

[1]Spomenuti predmet održava se već šestu uzastopnu godinu. Nastavu svake godine izvodi nekoliko nastavnika i asistenata iznoseći raznovrsne teme korisne za rješavanje problema na nivou fakultetskog gradiva.

pri čemu je $\mathbb{X}$ neki skup, dok su $L, D\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ funkcije koje redom određuju lijevu i desnu stranu. Ulazna varijabla $\mathbb{x}$ može biti vrlo „složena”, poput n-torke realnih brojeva ili n-torke funkcija.

Ukoliko se nejednakost (1) pojavljuje u nekom konkretnom kontekstu, tada često barem jedna od njezinih strana uživa izvjesne simetrije. Kako bismo precizirali što ovdje mislimo pod „simetrijama”, pretpostavimo da je dana i neka transformacija $T\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ takva da znamo pojednostavniti kompozicije $L \circ T$ i $D \circ T$. Uvrštavanjem $T\mathbb{x}$ umjesto $\mathbb{x}$ u nejednakost (1) dobivamo

$$L(T\mathbb{x}) \leq D(T\mathbb{x}) \quad \text{za svaki } \mathbb{x} \in \mathbb{X} \tag{2}$$

i možemo se nadati da se barem jedna od strana novodobivene ocjene (2) može dovesti u vezu s odgovarajućom stranom polazne ocjene (1). U tom se slučaju može dogoditi da (2) čini poboljšanje od (1), do kojeg smo došli uz razmjerno mali dodatni trud. Čak i kada se (2) može direktnije izvesti, međukorak (1) ima metodološku ili metodičku vrijednost. U idealnom slučaju postoji jednostavni direktni dokaz ocjene (1), a naš postupak tada daje elegantni posredni dokaz ocjene (2).

Čitatelj sve dosad rečeno treba shvatiti samo kao shemu jedne općenite matematičke ideje, koja svoju pravu snagu dokazuje tek na konkretnim primjerima. Mi ćemo navesti nekoliko takvih primjera iz elementarne i linearne algebre, realne i kompleksne analize, teorije vjerojatnosti, teorije grafova te kombinatorike, a dotaknut ćemo i elementarnu geometriju prostora.

1.1 Aritmetičko-geometrijska nejednakost

Započet ćemo uvodnim primjerom koji daje maštoviti dokaz čitatelju dobro poznatog rezultata. Nejednakost između *aritmetičke sredine* i *geometrijske sredine* nenegativnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ govori

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}. \tag{3}$$

Postoje raznovrsni izvodi od (3), a dokaz kojeg ćemo mi navesti je varijanta trika za kojeg je zaslužan Bohr[2] [2].

Potenciranje zbroja $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ isprva djeluje kao vrlo naivan pokušaj. Naime, nakon množenja n-terostrukog produkta zagrada po principu „svaki sa svakim”, tj. koristeći distributivnost, i zanemarivanja svih dobivenih pribrojnika osim $a_1 a_2 \cdots a_n$ zaključujemo

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^n \geq n! a_1 a_2 \cdots a_n.$$

[2] Harald August Bohr (1887. – 1951.), danski matematičar i nogometaš, brat fizičara i nobelovca Nielsa Bohra

Navedeni se pribrojnik doista pojavio $n!$ puta, jer su se a_1, a_2, $\ldots$, a_n redom mogli birati iz n postojećih zagrada. Vađenjem n-tog korijena dobivamo

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq (n!)^{1/n}(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}. \tag{4}$$

Matematičkom indukcijom može se dokazati jednostavna donja ograda za faktorijele koja glasi

$$n! \geq (n/4)^n, \tag{5}$$

a ona potom u kombinaciji s (4) daje

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{1}{4}(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}. \tag{6}$$

Vidimo da je (6) za faktor $1/4$ slabija varijanta željene ocjene (3), što nas i ne čudi, s obzirom da smo već u prvom koraku izvoda izostavili većinu pribrojnika.

Iznenađujuće je da se nejednakost (6) može „popraviti” ako se iskoristi na maštoviti način! Sjetimo se da smo (6) dokazali za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ i bilo koje nenegativne brojeve a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Mi ćemo je iskoristiti za neke nove brojeve, izvedene od zadanih a-ova. Za $k \in \mathbb{N}$ promotrimo n^k brojeva

$$a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k} \quad \text{za } i_1, i_2, \cdots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{7}$$

Riječ je o k-terostrukim produktima svih varijacija polaznih brojeva, a ponavljanje je dozvoljeno, tj. različite k-torke indeksa mogu dati iste brojeve čim je $k \geq 2$. Zbroj tih novih brojeva je naprosto $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^k$, jer se množenjem k jednakih zagrada po distributivnosti dobivaju upravo pribrojnici (7). S druge strane, njihov umnožak je $(a_1 a_2 \cdots a_n)^{n^{k-1}k}$, jer se svaka od varijabli a_1, a_2, $\ldots$, a_n pojavljuje n^{k-1} puta kao svaki od k mogućih faktora. Prema tome, aritmetička i geometrijska sredina brojeva (7) redom iznose

$$\Big(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\Big)^k \quad \text{i} \quad (a_1 a_2 \cdots a_n)^{k/n}$$

pa slabija nejednakost (6) primijenjena na njih nakon vađenja k-tog korijena daje

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{1}{4^{1/k}}(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}.$$

Puštanjem obiju strana na limes kad $k \to \infty$ i korištenjem $\lim_{k\to\infty} 4^{1/k} = 1$ doista dobivamo (3), tj. dokazali smo aritmetičko-geometrijsku nejednakost u njezinom klasičnom obliku.

Kasnije u tekstu trebat ćemo poopćenje od (3) koje se dobije uvođenjem tzv. *težina*, tj. brojeva $t_1, t_2, \ldots, t_n > 0$ koji u svom zbroju daju 1. Za proizvoljne $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ tada vrijedi

$$t_1 a_1 + t_2 a_2 + \cdots + t_n a_n \geq a_1^{t_1} a_2^{t_2} \cdots a_n^{t_n}. \tag{8}$$

Jednakost u (8) se postiže ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Klasična varijanta (3) svakom od a-ova pridružuje jednaku težinu $1/n$.

2 Skaliranje

U daljnjem tekstu primjere nastojimo rasporediti prema vrstama simetrija, odnosno transformacijama koje ih omogućavaju. Najjednostavnija transformacija je zasigurno *skaliranje*, tj. množenje skalarom. Ukoliko tu operaciju vršimo na realnim funkcijama, često je zovemo i *vertikalnim stezanjem*, odnosno *rastezanjem*.

2.1 Hölderova nejednakost

U daljnjem ćemo s $\mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)$ označavati skup svih neprekidnih funkcija $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ koje imaju kompaktan nosač[3], što ovdje naprosto znači da je f jednaka 0 u svakoj točki izvan nekog (dovoljno velikog) d-dimenzionalnog kvadra. Takve funkcije sigurno znamo integrirati, a njihovu kolekciju smo odabrali kako ne bismo nepotrebno zalazili u tehničke komplikacije apstraktnijih teorija integracije.

Za bilo koje dvije funkcije $f, g \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)$ vrijedi nejednakost

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x) dx \Big| \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)^2 dx \Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} g(x)^2 dx \Big)^{1/2}. \tag{9}$$

U ovoj (integralnoj) formulaciji prvi ju je dokazao Bunjakovski[4], a poseban je slučaj apstraktnije nejednakosti Cauchyja[5], Schwarza[6] i Bunjakovskog, za koju je čitatelj možda već čuo. Dalekosežno poopćenje dao je Hölder[7]. *Hölderova nejednakost* za brojeve $p, q \in \langle 1, +\infty \rangle$ takve da je $1/p + 1/q = 1$ i za funkcije $f, g \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)$ glasi

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x) dx \Big| \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \Big)^{1/p} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^q dx \Big)^{1/q}. \tag{10}$$

[3]Prvo slovo „c" u oznaci dolazi od engleske riječi „continuous", dok drugo dolazi od riječi „compact".

[4]Viktor Jakovljevič Bunjakovski (1804. – 1889.), ruski matematičar

[5]Augustin-Louis Cauchy (1789. – 1857.), francuski matematičar, fizičar i inženjer, jedan od začetnika moderne (rigorozne) matematičke analize

[6]Karl Hermann Amandus Schwarz (1843. – 1921.), njemački matematičar

[7]Otto Ludwig Hölder (1859. – 1937.), njemački matematičar

Obično se za $p \in \langle 0, +\infty\rangle$ i $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)$ formulom

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p} = \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \Big)^{1/p}$$

definira tzv. L^p-*norma*[8] $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ pa se desna strana nejednakosti (10) može kompaktnije zapisati kao $\|f\|_{\mathrm{L}^p}\|g\|_{\mathrm{L}^q}$, dok je desna strana nejednakosti (9) naprosto $\|f\|_{\mathrm{L}^2}\|g\|_{\mathrm{L}^2}$.

Kako dokazati nejednakost (10)? Razumni pokušaj je svakako iskoristiti neku nejednakost za brojeve $f(x)$ i $g(x)$ uz fiksiranu točku $x \in \mathbb{R}^d$ te potom prointegrirati dobivenu ocjenu po x. Korištenjem (8) uz $n = 2$, $t_1 = 1/p$, $t_2 = 1/q$, $a_1 = |f(x)|^p$, $a_2 = |g(x)|^q$ dobivamo

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|f(x)|^q,$$

a integriranje u varijabli x po cijelom prostoru $\mathbb{R}^d$ daje

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)g(x)|dx \leq \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^q dx.$$

Izraz se očigledno može samo povećati ako apsolutna vrijednost uđe ispod znaka integrala pa smo zapravo dobili

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)dx \Big| \leq \frac{1}{p}\|f\|_{\mathrm{L}^p}^p + \frac{1}{q}\|g\|_{\mathrm{L}^q}^q. \tag{11}$$

Ipak, ne uočavamo željenu desnu stranu od (10). Štoviše, čak smo je i premašili desnom stranom od (11), što se vidi uzimanjem $a_1 = \|f\|_{\mathrm{L}^p}^p$ i $a_2 = \|g\|_{\mathrm{L}^q}^q$ u (8):

$$\frac{1}{p}\|f\|_{\mathrm{L}^p}^p + \frac{1}{q}\|g\|_{\mathrm{L}^q}^q \geq \|f\|_{\mathrm{L}^p}\|g\|_{\mathrm{L}^q}.$$

Postavlja se pitanje može li se korištenjem neke simetrije iz (11) izvesti (10). Označimo lijevu stranu od (11) sa $L(f, g)$, naglašavajući da ona ovisi o funkcijama f i g. Trebamo samo primijetiti da se $L(f, g)$ neće promijeniti ako funkciju f pomnožimo sa $\lambda > 0$, a funkciju g podijelimo tim istim skalarom. Primjenom ocjene (11) na funkcije λf i g/λ dobivamo

$$L(f, g) = L\Big(\lambda f, \frac{g}{\lambda}\Big) \leq \frac{\lambda^p}{p}\|f\|_{\mathrm{L}^p}^p + \frac{1}{q\lambda^q}\|g\|_{\mathrm{L}^q}^q. \tag{12}$$

[8] Premda se riječ „norma” uvriježila u nazivu, upućeni čitatelj će znati da je za $p < 1$ riječ o tzv. kvazinormi koja ne zadovoljava nejednakost trokuta.

Jedna moguća ideja za nastavak je optimizacija desne strane od (12) po parametru $\lambda > 0$ te odabir vrijednosti od λ za koju se postiže minimum. Umjesto da koristimo diferencijalni račun, mi ćemo još jednom iskoristiti (8), ovog puta za brojeve $a_1 = \lambda^p \|f\|_{\mathrm{L}^p}^p$ i $a_2 = \lambda^{-q} \|g\|_{\mathrm{L}^q}^q$, tako da možemo pisati

$$\frac{\lambda^p}{p} \|f\|_{\mathrm{L}^p}^p + \frac{1}{q\lambda^q} \|g\|_{\mathrm{L}^q}^q \geq \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^q}. \tag{13}$$

Jednakost u (13) vrijedi kada je

$$\lambda^p \|f\|_{\mathrm{L}^p}^p = \lambda^{-q} \|g\|_{\mathrm{L}^q}^q, \quad \text{tj. } \lambda = \frac{\|g\|_{\mathrm{L}^q}^{q/(p+q)}}{\|f\|_{\mathrm{L}^p}^{p/(p+q)}}$$

i sada je jasno da je to vrijednost od λ za koju se postiže spomenuti minimum i za koju ocjena (12) postaje

$$L(f, g) \leq \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^q}, \tag{14}$$

čime smo dokazali (10).

3 Stezanje i rastezanje

Za $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ i $a > 0$ definiramo novu funkciju $S_a f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ formulom

$$(S_a f)(x) = f\Big(\frac{x}{a}\Big) \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}^d.$$

Ako je $a < 1$, onda transformaciju $f \mapsto S_a f$ zovemo *horizontalno stezanje*, dok je za $a > 1$ riječ o *horizontalnom rastezanju*. Za svaki $p \in \langle 0, +\infty \rangle$ možemo računati

$$\begin{aligned} \|S_a f\|_{\mathrm{L}^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big| f\Big(\frac{x}{a}\Big) \Big|^p dx = \left[\begin{array}{c} \text{supstitucija} \\ x = a\widetilde{x} \implies dx = a^d d\widetilde{x} \end{array} \right] \\ &= a^d \int_{\mathbb{R}^d} |f(\widetilde{x})|^p d\widetilde{x} = a^d \|f\|_{\mathrm{L}^p}^p, \end{aligned}$$

čime smo dobili korisnu formulu

$$\|S_a f\|_{\mathrm{L}^p} = a^{d/p} \|f\|_{\mathrm{L}^p}. \tag{15}$$

3.1 Još o Hölderovoj nejednakosti

Korištenjem simetrija ponekad možemo opovrgnuti naslućenu, ali neispravnu ocjenu. Iz pretpostavke da nejednakost vrijedi zaključimo da vrijedi i njezino prividno poboljšanje, koje nas zapravo dovodi do kontradikcije.

Jedno prirodno pitanje u vezi Hölderove nejednakosti (10), tj. (14), je zašto smo morali pretpostaviti uvjet $1/p + 1/q = 1$ na eksponente p i q. Kako bismo dokazali da je taj uvjet bio nužan uzmimo proizvoljne $p, q \in \langle 0, +\infty\rangle$ i pretpostavimo da je ocjena (14) ispunjena za sve funkcije $f, g \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Tada ona vrijedi i ako umjesto f i g uvrstimo $S_a f$ i $S_a g$ uz bilo koji $a > 0$, tj.

$$L(S_a f, S_a g) \le \|S_a f\|_{\mathrm{L}^p} \|S_a g\|_{\mathrm{L}^q}. \tag{16}$$

Lijeva strana nejednakosti (16) se transformira kao

$$\begin{aligned} L(S_a f, S_a g) &= \Big| \int_{\mathbb{R}^d} f\Big(\frac{x}{a}\Big) g\Big(\frac{x}{a}\Big) dx \Big| = \big[x = a\widetilde{x}\big] \\ &= \Big| a^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\widetilde{x}) g(\widetilde{x}) d\widetilde{x} \Big| = a^d L(f, g), \end{aligned}$$

dok na desnoj strani možemo koristiti (15):

$$\|S_a f\|_{\mathrm{L}^p} \|S_a g\|_{\mathrm{L}^q} = a^{d/p + d/q} \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^q}.$$

Na taj način iz (16) dijeljenjem s a^d dobivamo

$$L(f, g) \le a^{d(1/p + 1/q - 1)} \|f\|_{\mathrm{L}^p} \|g\|_{\mathrm{L}^q}. \tag{17}$$

Kada bi bilo moguće $1/p + 1/q > 1$, tada bi eksponent od $a^{d(1/p+1/q-1)}$ bio strogo pozitivan pa bismo puštanjem ocjene (17) na limes kada $a \to 0$ dobili $L(f, g) = 0$ za bilo koje $f, g \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d)$, što nikako nije moguće jer lijeva strana Hölderove nejednakosti nije trivijalna. S druge strane, ako bi bilo $1/p + 1/q < 1$, tada bismo uzimanjem limesa kada $a \to +\infty$ opet dobili $L(f, g) = 0$ za bilo koje funkcije f i g. Zaključujemo da je nejednakost (10) doista moguća samo kada p i q zadovoljavaju $1/p + 1/q = 1$, što ima za usputnu posljedicu $p, q > 1$. Nekada kažemo da su oni tzv. *konjugirani eksponenti*.

3.2 Loomis-Whitneyeva nejednakost

Okušajmo se sada s nešto manje poznatom, *Loomis*[9]*–Whitneyevom*[10] *nejednakosti* [7]: za proizvoljne funkcije $f, g, h \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^2)$ vrijedi

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y) g(y, z) h(z, x) dx dy dz \Big| \le \|f\|_{\mathrm{L}^2} \|g\|_{\mathrm{L}^2} \|h\|_{\mathrm{L}^2}. \tag{18}$$

[9]Lynn Harold Loomis (1915. – 1994.), američki matematičar

[10]Hassler Whitney (1907. – 1989.), američki matematičar

Označimo s $L(f,g,h)$ lijevu stranu gornje ocjene. U svrhu njezinog dokaza najprije se primijeni nejednakost Bunjakovskog (9) po varijabli y:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)g(y,z)|\,dy \leq \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)^2 dy\Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathbb{R}} g(y,z)^2 dy\Big)^{1/2}. \tag{19}$$

Potom se (19) pomnoži s $|h(z,x)|$ i integrira po dvodimenzionalnoj varijabli $(z,x) \in \mathbb{R}^2$. Konačno se još jednom iskoristi nejednakost Bunjakovskog, tako da se dobije

$$\begin{aligned} L(f,g,h) \leq & \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)^2 dy\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} g(y,z)^2 dy\Big) dzdx\Big)^{1/2} \\ & \cdot \Big(\int_{\mathbb{R}^2} h(z,x)^2 dzdx\Big)^{1/2} = \|f\|_{\mathrm{L}^2}\|g\|_{\mathrm{L}^2}\|h\|_{\mathrm{L}^2}. \end{aligned}$$

Odredimo sve eksponente $p,q,r \in \langle 0,+\infty\rangle$ za koje je ispunjena nejednakost

$$L(f,g,h) \leq C_{p,q,r}\|f\|_{\mathrm{L}^p}\|g\|_{\mathrm{L}^q}\|h\|_{\mathrm{L}^r}, \tag{20}$$

čak uz bilo koju konstantu $C_{p,q,r} \in [0,+\infty\rangle$ koja smije ovisiti o eksponentima p,q,r, ali ne i o funkcijama f,g,h. Ovog puta lijeva strana ima još „više simetrije" pa ćemo za $a,b>0$ definirati *neizotropna stezanja i rastezanja* $S_{a,b}$ formulom

$$(S_{a,b}f)(x,y) = f\Big(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\Big) \quad \text{za svaki } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Za bilo koje parametre $a,b,c>0$ računamo:

$$\begin{aligned} L(S_{a,b}f, S_{b,c}g, S_{c,a}h) &= \Big|\int_{\mathbb{R}^3} f\Big(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\Big) g\Big(\frac{y}{b},\frac{z}{c}\Big) h\Big(\frac{z}{c},\frac{x}{a}\Big) dxdydz\Big| \\ &= \big[x = a\tilde{x},\ y = b\tilde{y},\ z = c\tilde{z}\big] \\ &= abc\Big|\int_{\mathbb{R}^3} f(\tilde{x},\tilde{y})g(\tilde{y},\tilde{z})h(\tilde{z},\tilde{x})d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z}\Big| \\ &= abc\,L(f,g,h). \end{aligned}$$

Primjenom pretpostavljene ocjene (20) na stisnute funkcije $S_{a,b}f$, $S_{b,c}g$ i $S_{c,a}h$, sličnim računom kao s početka odjeljka ovog puta dobivamo

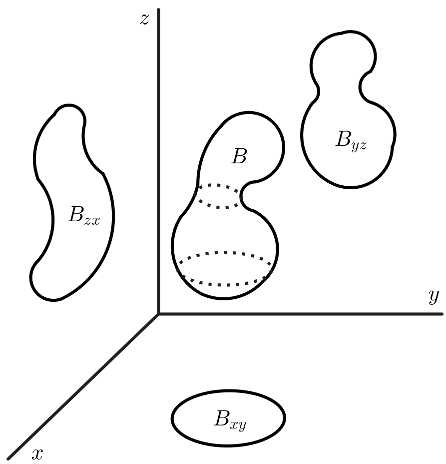
$$L(f,g,h) \leq C_{p,q,r}\, a^{1/p+1/r-1} b^{1/p+1/q-1} c^{1/q+1/r-1} \|f\|_{\mathrm{L}^p}\|g\|_{\mathrm{L}^q}\|h\|_{\mathrm{L}^r}$$

pa zbog proizvoljnosti pozitivnih parametara a, b i c mora biti

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=1, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \quad \frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1.$$

Jedino rješenje tog sustava jednadžbi je $p = q = r = 2$. Tada je (20) upravo nejednakost (18), jer smo već vidjeli da za konstantu $C_{p,q,r}$ možemo uzeti broj 1.

Kao usputnu zanimljivost navedimo originalnu primjenu Loomis–Whitneyeve nejednakosti. U tu svrhu odustanimo od pretpostavke da su funkcije f, g, h neprekidne; za dokaz je bilo dovoljno samo da su integrabilne u Riemannovom smislu. Neka je $B \subseteq \mathbb{R}^3$ tijelo u koordinatnom xyz-prostoru čiji rub je sastavljen od konačno mnogo glatkih ploha, kao što je slučaj kod kugle, kocke, itd. Označimo redom sa B_{xy}, B_{yz}, B_{zx} ortogonalne projekcije od B na koordinatne ravnine xy, yz, zx, kao na Slici 1.



Slika 1: Projekcije tijela B na koordinatne ravnine.

Primijenimo nejednakost (18) na funkcije dane formulama

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{za } (x,y) \in B_{xy}, \\ 0 & \text{inače}, \end{cases}$$

$$g(y,z) = \begin{cases} 1 & \text{za } (y,z) \in B_{yz}, \\ 0 & \text{inače}, \end{cases}$$

$$h(z,x) = \begin{cases} 1 & \text{za } (z,x) \in B_{zx}, \\ 0 & \text{inače}. \end{cases}$$

Kako za svaku točku $(x,y,z) \in B$ imamo $f(x,y) = g(y,z) = h(z,x) = 1$, lijeva strana od (18) je barem

$$\int_B 1\,dxdydz = V(B) = \text{volumen tijela } B.$$

S druge pak strane imamo

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)^2 dxdy = P(B_{xy}) = \text{površina lika } B_{xy}$$

te analogno $\|g\|_{\mathrm{L}^2}^2 = P(B_{yz})$ i $\|h\|_{\mathrm{L}^2}^2 = P(B_{zx})$. Na taj način iz (18) dobivamo zanimljivu nejednakost

$$V(B) \leq P(B_{xy})^{1/2} P(B_{yz})^{1/2} P(B_{zx})^{1/2},$$

koja odozgo ocjenjuje volumen tijela pomoću površina triju njegovih projekcija. Nadalje, svaki od brojeva $P(B_{xy})$, $P(B_{yz})$ i $P(B_{zx})$ možemo vrlo grubo ocijeniti polovinom oplošja $O(B)$ tijela B i dobiti

$$V(B) \leq 2^{-3/2} O(B)^{3/2}. \tag{21}$$

Ta nejednakost odozgo ocjenjuje volumen tijela odgovarajućom potencijom njegovog oplošja, što je trodimenzionalni primjer tzv. *izoperimetrijske nejednakosti*, koja je svoj naziv dobila od analognog dvodimenzionalnog problema. Može se pokazati da je najbolja moguća konstanta na desnoj strani od (21) zapravo $1/6\sqrt{\pi}$ i ona se postiže jedino kada je B kugla. Ipak, tu tvrdnju je mnogo teže dokazati pa je korisno znati da njezina slabija varijanta (21) ima elegantni dokaz.

4 Potenciranje

U strukturama gdje postoji množenje, poput algebre kvadratnih matrica ili neke algebre funkcija, *potenciranje* čini prirodnu operaciju koja može voditi na korisne simetrije.

4.1 Spektralni radijus

Oznaka $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ je standardna za skup kompleksnih matrica tipa $n \times n$. Takve matrice znamo množiti kompleksnim skalarom, međusobno zbrajati i međusobno množiti. Sva uobičajena svojstva tih operacija su zadržana i kažemo da $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ima strukturu algebre. Prisjetimo se i da je broj $\lambda \in \mathbb{C}$ *svojstvena vrijednost* matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ako postoji vektor-stupac $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ koji zadovoljava $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ i koji nije baš nul-stupac $\mathbf{0}$, tj. stupac samih nula. Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A zove se *spektar* matrice A i označava $\sigma(A)$. Pokazuje se da $\sigma(A)$ ima najviše n elemenata, koji se dobivaju kao rješenja algebarske jednadžbe $\det(\lambda I - A) = 0$ po varijabli λ. Ako je broj n velik, tu jednadžbu nije lako riješiti.

Ponekad želimo naći najmanji krug u kompleksnoj ravnini sa središtem u ishodištu koji prekriva skup $\sigma(A)$. Njegov radijus zovemo *spektralni radijus* matrice A i označavamo $\rho(A)$. Dakle,

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Nenegativni broj $\rho(A)$ je jedna od glavnih numeričkih veličina izvedenih iz spektra, kojeg pak, kao što smo već rekli, nije lako izračunati za danu matricu A. Radi toga bismo voljeli imati formulu za broj $\rho(A)$ u kojoj se ne javljaju svojstvene vrijednosti ili makar neku dobru gornju ocjenu tog broja. Jedan vezani pojam je tzv. *operatorska norma* matrice A, definirana kao

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \max\left\{ \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} : \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \right\},$$

pri čemu $\|\cdot\|$ označava standardnu normu (tj. duljinu vektora) na $\mathbb{C}^n$, tj.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \implies \|\mathbf{x}\| = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{1/2}.$$

Veličina $\|A\|_{\mathrm{op}}$ se alternativno može zapisati kao $\|A\|_{\mathrm{op}} = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$, tj. to je maksimum funkcije $\mathbf{x} \mapsto \|A\mathbf{x}\|$ po jediničnoj sferi u $\mathbb{C}^n$. Posljednji prikaz makar načelno omogućava numeričko računanje operatorske norme preko optimizacijskog problema više varijabli.

Vrlo jednostavna procjena spektralnog radijusa je

$$\rho(A) \leq \|A\|_{\mathrm{op}}. \tag{22}$$

Naime, ako je λ svojstvena vrijednost matrice A, a $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ je takav da vrijedi $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, onda po definiciji operatorske norme imamo $|\lambda| = \|A\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\| \leq \|A\|_{\mathrm{op}}$ pa tvrdnja slijedi zbog proizvoljnosti $\lambda \in \sigma(A)$. Postavlja se pitanje koliko je dobra ocjena (22). Uzmimo npr. gornjetrokutastu matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednadžba $\det(\lambda I - A) = 0$ postaje $(\lambda - 1)^n = 0$, što znači da je $\sigma(A) = \{1\}$ i posljedično $\rho(A) = 1$. S druge strane,

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies A\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pa je

$$\|A\|_{\mathrm{op}} \geq \frac{\|A\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{e}\|} = n^{1/2}.$$

Dakle, za velike n je procjena (22) ustvari jako loša.

Postoji li jednostavan način kojim možemo popraviti (22)? Poznati *teorem o preslikavanju spektra* kaže da su, za fiksirani $k \in \mathbb{N}$, svojstvene vrijednosti matrice A^k zapravo k-te potencije svojstvenih vrijednosti matrice A, tj.

$$\sigma(A^k) = \{\lambda^k : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Dokaz te tvrdnje može se naći u klasičnim udžbenicima [5] i [6]. Posljedično imamo i

$$\rho(A^k) = \rho(A)^k. \tag{23}$$

Sada možemo uvrstiti A^k umjesto A u (22) i dobiti

$$\rho(A^k) \leq \|A^k\|_{\mathrm{op}}$$

pa korištenje (23) i vađenje k-tog korijena daju

$$\rho(A) \leq \|A^k\|_{\mathrm{op}}^{1/k}.$$

Obzirom da je $k \in \mathbb{N}$ bio proizvoljan, a lijeva strana ne ovisi o njemu, na kraju možemo uzeti infimum po svim takvim vrijednostima:

$$\rho(A) \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} \|A^k\|_{\mathrm{op}}^{1/k}. \tag{24}$$

Ne samo da je novodobivena ocjena (24) mnogo bolja od polazne ocjene (22), već se može dokazati da u (24) čak stoji znak jednakosti; vidjeti [5] ili [6].

4.2 Princip maksimuma modula

Neka je U otvoreni podskup kompleksne ravnine $\mathbb{C}$ i neka je $f\colon U \to \mathbb{C}$ *holomorfna* funkcija, tj. funkcija derivabilna u smislu kompleksnih funkcija kompleksne varijable. Ako se čitatelj još nije susreo s kompleksnom analizom, reći ćemo da takve funkcije imaju mnoga svojstva koja su isprva neočekivana matematičaru naviklom na diferencijalni račun funkcija realne varijable. Jedno takvo svojstno je *princip maksimuma modula*, kojeg navodimo u najjednostavnijoj varijanti.

Neka je K zatvoreni krug sadržan u skupu U kao na Slici 2. Prirodno ga je particionirati na njegovu unutrašnjost K° (tj. otvoreni krug) i na njegov rub ∂K (tj. rubnu kružnicu). Princip maksimuma modula tvrdi da se maksimum apsolutne vrijednosti funkcije f po cijelom krugu K postiže na njegovom rubu. Ekvivalentno izrečeno,

$$|f(z)| \le \max_{w\in\partial K} |f(w)| \quad \text{za svaku točku } z \in K^\circ. \tag{25}$$

Ta tvrdnja i njezin dokaz obrađuju se na svakom polaznom kursu iz kompleksne analize, no za maštoviti dokaz kojeg mi navodimo zaslužan je Landau[11].

Centralni i povijesno najvažniji rezultat o holomorfnim funkcijama je tzv. *Cauchyjeva integralna formula* (vidjeti npr. [4]),

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z} dw, \tag{26}$$

pri čemu simbol $\oint$ naglašava da je riječ o kompleksnom integralu po konturi. Možemo li odmah iz (26) dobiti ocjenu (25)? Pokušajmo. Stavljanjem apsolutnih vrijednosti unutar integrala slijedi

$$|f(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{\partial K} \frac{|f(w)|}{|w-z|} |dw|,$$

pri čemu je sada integral uobičajeni realni, duž rubne kružnice, što vrlo neformalno ali sugestivno naglašavamo oznakom apsolutne vrijednosti u $|dw|$. Za fiksirani $z \in K^\circ$ veličine $|w-z|$ možemo odozdo ocijeniti brojem $d_z > 0$ kojeg definiramo kao udaljenost točke z od kružnice ∂K. Vrijednosti $|f(w)|$ pak odozgo ocjenujemo maksimumom, što nas vodi na

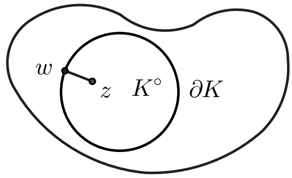
$$|f(z)| \le C_{K,z} \max_{w\in\partial K} |f(w)|, \tag{27}$$

pri čemu je $C_{K,z} \in \langle 0, +\infty\rangle$ neka konstanta koja može ovisiti o krugu K i točki z, ali ne i o funkciji f.

Dobivena ocjena (27) nije baš zadovoljavajuća u odnosu na (25), upravo zbog ovisnosti konstante $C_{K,z}$ o točki z u kojoj evaluiramo funkciju. Kako eliminirati tu konstantu? Produkt kompleksno derivabilnih funkcija je opet kompleksno derivabilna funkcija pa induktivno zaključujemo da je funkcija f^k (tj. $z \mapsto f(z)^k$) holomorfna za svaki $k \in \mathbb{N}$. Uvrstimo ju u (27):

$$|f(z)^k| \le C_{K,z} \max_{w\in\partial K} |f(w)^k|,$$

[11]Edmund Georg Hermann Landau (1877. – 1938.), njemački matematičar



Slika 2: Krug K u skupu U podijeljen je na unutrašnjost K° i rub ∂K.

što možemo pisati

$$|f(z)|^k \leq C_{K,z}\Big(\max_{w\in\partial K}|f(w)|\Big)^k.$$

Vađenje k-tog korijena daje

$$|f(z)| \leq C_{K,z}^{1/k}\max_{w\in\partial K}|f(w)|$$

pa još jedino trebu pustiti desnu stranu na limes kada $k \to \infty$ uz korištenje $\lim_{k\to\infty} C_{K,z}^{1/k} = 1$. Time je završen dokaz ocjene (25).

5 Eksponenciranje

Kako smo već vidjeli da potenciranje može biti korisno, ne iznenađuje nas da u nekim situacijama *eksponenciranje* daje još bolje rezultate.

5.1 Metoda eksponencijalnog momenta

Naš sljedeći primjer je iz teorije vjerojatnosti, ali iziskuje samo osnovna svojstva *vjerojatnosti* $\mathbb{P}$ i *matematičkog očekivanja* $\mathbb{E}$, koja se mogu naći u knjizi [10] ili čak u srednjoškolskim udžbenicima [11] i [12].

Ako slučajna varijabla X ima konačno očekivanje, tj. $\mathbb{E}|X| < +\infty$, onda vjerojatnosti $\mathbb{P}(|X| \geq t)$, koje se ponekad nazivaju *rep distribucije* varijable X, konvergiraju u 0 kada $t \to +\infty$. To se najlakše vidi iz *Markovljeve*[12] *nejednakosti*,

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}|X|}{t} \quad \text{za svaki } t > 0. \tag{28}$$

Dokaz od (28) je doista trivijalan. Naime, na događaju $\{|X| \geq t\}$ je slučajna varijabla $|X|$ barem jednaka t pa je očekivanje tog njenog dijela barem jednako $t\,\mathbb{P}(|X| \geq t)$. S druge strane, na komplementarnom

[12] Andrej Andrejevič Markov (1856. – 1922.), ruski matematičar

događaju $\{|X| < t\}$ koristimo samo da je $|X| \geq 0$ pa očekivanje tog dijela doprinosi s nenegativnim brojem.

Za $m \in \mathbb{N}$ kažemo da slučajna varijabla X ima konačan m-ti moment ako vrijedi $\mathbb{E}|X|^m < +\infty$. Ako za takvu varijablu primijetimo da su događaji $\{|X| \geq t\}$ i $\{|X|^m \geq t^m\}$ zapravo jednaki, primjenom (28) na $|X|^m$ odmah ćemo dobiti

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}|X|^m}{t^m} \quad \text{za svaki } t > 0, \tag{29}$$

što znači da rep distribucije trne u 0 kada $t \to +\infty$ barem toliko brzo kao potencija t^{-m}. Slučaj varijabli X s konačnim drugim momentom je posebno zanimljiv i tada se, uz oznaku $\mu = \mathbb{E}X$, nejednakost (28) primjenjuje na varijablu $(X - \mu)^2$,

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X - \mu)^2}{t^2} \quad \text{za svaki } t > 0. \tag{30}$$

Ocjena (30) zove se *Čebiševljeva*[13] *nejednakost*, a upućeni čitatelj će prepoznati brojnik na desnoj strani kao varijancu varijable X.

Pretpostavimo sada da X ima konačne momente svih redova $m \in \mathbb{N}$ i neka oni „kontrolirano rastu" u smislu da postoji konstanta $C \in \langle 0, +\infty\rangle$ takva da vrijedi

$$(\mathbb{E}|X|^m)^{1/m} \leq Cm \quad \text{za svaki } m \in \mathbb{N}. \tag{31}$$

Iz (29) vidimo da $\mathbb{P}(|X| \geq t)$ pada brže nego t^{-m} za bilo koji, koliko god veliki, $m \in \mathbb{N}$. Postavlja se pitanje možemo li zaključiti i više sofisticiranijim korištenjenjem Markovljeve nejednakosti. Razvoj eksponencijalne funkcije u red potencija je

$$e^s = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m}{m!} = 1 + s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + \cdots \quad \text{za svaki } s \in \mathbb{R}$$

i u njega uvrštavamo $s = \varepsilon|X|$, pri čemu je $\varepsilon = 1/8C$. Dobivamo

$$e^{\varepsilon|X|} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m |X|^m}{m!}$$

pa uzimanjem očekivanja obiju strana slijedi

$$\mathbb{E}e^{\varepsilon|X|} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m \mathbb{E}|X|^m}{m!}.$$

[13]Pafnutij Lavovič Čebišev (1821. – 1894.), ruski matematičar, začetnik ruske škole teorije vjerojatonsti

Iz pretpostavljene ocjene za momente (31) sada dobivamo

$$\mathbb{E}e^{\varepsilon|X|} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m C^m m^m}{m!}$$

pa donja ograda za faktorijele (5) i zbrajanje geometrijskog reda daju

$$\mathbb{E}e^{\varepsilon|X|} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m C^m 4^m = \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^m = 1.$$

Dakle, $D = \mathbb{E}e^{\varepsilon|X|}$ je konačan broj; možemo ga zvati *eksponencijalni moment* varijable X. Sada iskoristimo Markovljevu nejednakost (28) za varijablu $e^{\varepsilon|X|}$ i broj $e^{\varepsilon t}$,

$$\mathbb{P}\big(e^{\varepsilon|X|} \geq e^{\varepsilon t}\big) \leq \frac{\mathbb{E}e^{\varepsilon|X|}}{e^{\varepsilon t}} \quad \text{za svaki } t > 0$$

pa uočavanjem da su $\{e^{\varepsilon|X|} \geq e^{\varepsilon t}\}$ i $\{|X| \geq t\}$ zapravo isti događaji konačno slijedi

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq \frac{D}{e^{\varepsilon t}} \quad \text{za svaki } t > 0. \tag{32}$$

Zaključujemo da vjerojatnosti $\mathbb{P}(|X| \geq t)$ konvergiraju u 0 kada $t \to +\infty$ barem eksponencijalnom brzinom pa kažemo da distribucija varijable X nema težak rep.

Trik kojim se najprije utvrdi konačnost eksponencijalnog momenta pa izvede (32) je posebno učinkovit kada je slučajna varijabla X zbroj nezavisnih jednako distibuiranih slučajnih varijabli i raznovrsne ocjene dobivene na taj način nazvane su po matematičarima Bernsteinu[14], Chernoffu[15], ili Hoeffdingu[16].

6 Kartezijevo potenciranje

Naš posljednji primjer pojačanja ocjene koristit će simetriju obzirom na promatranje Kartezijevog produkta i to, pomalo neočekivano, u teoriji grafova.

[14] Sergej Natanovič Bernstein (1880. – 1968.), ruski matematičar
[15] Herman Chernoff (1923.), američki matematičar, fizičar i statističar
[16] Wassily Hoeffding (1914. – 1991.), finski matematičar i statističar

6.1 Broj šetnji po neusmjerenom grafu

Jednostavni neusmjereni graf $G = (V, E)$ sastoji se od konačnog nepraznog skupa vrhova V i od skupa bridova E, pri čemu je *brid* naprosto dvočani podskup skupa vrhova. Vizualno graf predstavljamo tako da vrhove crtamo kao točke u ravnini, a bridove kao spojnice između nekih parova vrhova, kao na Slici 3. Za vrhove v i w spojene bridom (tj. kada je $\{v, w\} \in E$) kažemo da su *susjedni*.

Broj vrhova grafa G označimo sa $n = n(G) \in \mathbb{N}$, a broj njegovih bridova sa $m = m(G) \in \mathbb{N}_0$. Također stavimo $\overline{d} = \overline{d}(G) = 2m/n$; interpretacija broja $\overline{d}$ je *prosječni stupanj* u grafu G. Naime, *stupanj* vrha je broj njegovih susjeda u grafu. Nadalje, ako su d_1, d_2, ..., d_n stupnjevi svih vrhova (u nekom poretku), tada imamo

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2m,$$

jer lijeva strana zapravo prebraja bridove na način da svaki brid uračuna dvaput, po jednom za svaki od njegovih krajeva. Radi toga možemo pisati

$$\overline{d} = \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_n}{n}$$

te je doista $\overline{d}$ aritmetička sredina svih stupnjeva.

Šetnja na grafu G je svaki konačni slijed (ne nužno različitih) vrhova $v_0, v_1, \ldots, v_s$ takav da su v_{j-1} i v_j susjedni za $j = 1, 2, \ldots, s$. Duljina spomenute šetnje je broj s. Označimo sa $b_s(G)$ ukupni broj šetnji duljine $s \in \mathbb{N}_0$ na grafu G. Primjeri šetnji duljine 3 na grafu sa slike 3 su *abea*, *bcde*, itd., a ukupni broj šetnji duljine 3 je 74.

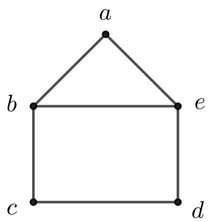
Broj $b_s(G)$ ovisi o strukturi grafa i nije ga lako izračunati ili procijeniti. Rezultat Erdősa[17] i Simonovitsa[18] [3] glasi

$$b_s(G) \geq n(G)\, \overline{d}(G)^s. \tag{33}$$

Premda ocjena (33) nije trivijalna, ona ima sljedeće heurističko opravdanje. Za polazni vrh šetnje imamo n mogućnosti. U svakom koraku imamo u prosjeku $\overline{d}$ „smjerova" u kojima možemo nastaviti šetnju. Kako šetnja ima s koraka, to vodi na broj $n\overline{d}^s$. Naravno, ovo rezoniranje je samo „u prosjeku" ispravno, jer se može dogoditi da neki vrhovi imaju mali stupanj, što jako sužava mogućnosti za šetnje koje prolaze njima, a ne znamo kako to točno kompenziraju vrhovi koji imaju veliki stupanj. Spomenuto rezoniranje je korektno jedino ako svi vrhovi grafa G imaju jednaki stupanj i pokazuje da tada u ocjeni (33) stoji znak jednakosti.

[17] Paul Erdős (1913. – 1996.), mađarski matematičar, jedan od najpoznatijih i najproduktivnijih matematičara 20. stoljeća

[18] Miklós Simonovits (1943.), mađarski matematičar



Slika 3: Primjer jednostavnog neusmjerenog grafa s vrhovima a, b, c, d, e.

Elegantni dokaz od (33) kojeg ćemo izložiti preuzet je iz članka [1]. Za $s = 0$ tvrdnja je trivijalna[19] jer su šetnje duljine 0 u korespondenciji s vrhovima pa je $b_0(G) = n(G)$. Za $s = 1$ šetnja naprosto prolazi nekim bridom u jednom od dva moguća smjera pa je $b_1(G) = 2m(G) = n(G)\overline{d}(G)$. Zato u daljnjem pretpostavimo da je $s \geq 2$. Čak i za $s = 2$ čitatelj može dati elementarni dokaz tako da najprije dokaže

$$b_2(G) = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2.$$

Ipak, problem se bitno komplicira kada je $s \geq 3$.

Najprije dokažimo kvantitativno slabiju tvrdnju,

$$b_s(G) \geq n(G)\Big(\frac{\overline{d}(G)}{4}\Big)^s. \tag{34}$$

Nju ćemo dokazati matematičkom indukcijom po broju vrhova grafa, $n = n(G)$. Za $n = 1$ moramo imati $m = 0$, tj. $\overline{d} = 0$ pa je ona očigledna. Za $n = 2$ u jedinom netrivijalnom slučaju $m = 1$, tj. $\overline{d} = 1$, postoje točno po dvije šetnje svake duljine. Uzmimo $n \geq 3$ i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za grafove s $n-1$ vrhova. Promotrimo proizvoljni graf s n vrhova i neka je $\delta \in \mathbb{N}_0$ najmanji stupanj vrha u tom grafu. Razlikujemo dva slučaja.

Prvi slučaj: $\delta \geq \overline{d}/4$. Šetnju na grafu dobijemo tako da krenemo od proizvoljnog vrha, odabranog na n načina, te se potom redom pomičemo u neki od susjednih vrhova, a za svakog od njih imamo barem δ mogućnosti. Zato je broj šetnji barem $n\delta^s \geq n(\overline{d}/4)^s$.

Drugi slučaj: $\delta < \overline{d}/4$. Postoji vrh stupnja δ. Izbacimo ga iz grafa, čime ujedno izbacujemo najviše δ bridova, te primijenimo pretpostavku indukcije na novodobiveni graf s $n-1$ vrhova. Broj šetnji duljine s u

[19] U tu svrhu na desnoj strani od (33) mogući izraz 0^0 interpretiramo kao 1.

novom grafu (pa pogotovo i u polaznom grafu) je barem

$$(n-1)\Big(\frac{2(m-\delta)}{4(n-1)}\Big)^s > \frac{(n\overline{d}-\overline{d}/2)^s}{4^s(n-1)^{s-1}} = n\Big(\frac{\overline{d}}{4}\Big)^s \cdot \Big(\frac{n-1/2}{n-1}\Big)^s \cdot \frac{n-1}{n}$$
$$\geq n\Big(\frac{\overline{d}}{4}\Big)^s \cdot \Big(\frac{n-1/2}{n-1}\Big)^2 \cdot \frac{n-1}{n} = n\Big(\frac{\overline{d}}{4}\Big)^s \cdot \frac{n^2-n+1/4}{n^2-n} > n\Big(\frac{\overline{d}}{4}\Big)^s.$$

Time je završen korak indukcije.

Kako ćemo lošiju nejednakost (34) poboljšati do (33)? U svrhu dokaza promotrimo k-tu potenciju grafa G za $k \in \mathbb{N}$, tj. novi graf G^k čiji vrhovi su k-torke $(v_1, \ldots, v_k)$ vrhova polaznog grafa, a $(v_1, \ldots, v_k)$ i $(w_1, \ldots, w_k)$ su susjedne ako i samo ako su v_i i w_i susjedni u polaznom grafu za svaki indeks $i = 1, \ldots, k$. Dakle, vrhovi od G^k čine k-terostruki Kartezijev produkt $V \times \cdots \times V$, a i bridovi su mu odabrani na najprirodniji način, radi čega kažemo da je graf G^k k-ta *Kartezijeva potencija* grafa G. Novi graf ima n^k vrhova i $2^{k-1}m^k$ bridova, jer postoji $(2m)^k$ načina za odabir k uređenih parova susjednih vrhova, ali poredak cijelih k-torki je nebitan. Zato mu je prosječni stupanj

$$\frac{2 \cdot 2^{k-1}m^k}{n^k} = \overline{d}^k.$$

Konačno, svaka šetnja duljine s u novom grafu je naprosto slijed k-torki koje u svakoj koordinati izvode šetnju po polaznom grafu; dakle $b_s(G^k) = b_s(G)^k$. Primjenom dokazane ocjene (34) na graf G^k dobivamo

$$b_s(G^k) \geq n(G^k)\Big(\frac{\overline{d}(G^k)}{4}\Big)^s,$$

što se, zbog rečenog, transformira u

$$b_s(G)^k \geq n(G)^k \frac{\overline{d}(G)^{ks}}{4^s}.$$

Vađenjem k-tog korijena slijedi

$$b_s(G) \geq n(G)\frac{\overline{d}(G)^s}{4^{s/k}}$$

pa puštanjem desne strane na limes kada $k \to \infty$ konačno dobivamo (33).

7 Zaključak i zadaci

Primjeri koje smo obradili svakako nisu jedini problemi koji se efektno rješavaju uočavanjem simetrije koja rezultira pojačanjem dane ocjene.

Još neki zanimljivi primjeri sakupljeni su na mrežnom blogu Terencea Taoa[20] [15], u člancima *Amplification, arbitrage, and the tensor power trick* (iz 2007. godine) i *Tricks Wiki article: The tensor power trick* (iz 2008. godine). Spomenuti članci bili su autorova glavna inspiracija za pisanje ovog rada. Dijelovi bloga [15] objavljeni su u obliku serije knjiga, a za ovo gradivo je relevantna knjiga [14].

Čitatelju ostavljamo nekoliko zadataka za vježbu. Prvi zadatak vrlo je elementaran, a jedno moguće rješenje koristi simetriju jedne od strana nejednakosti.

Zadatak 1. Dokažite da postoji $\varepsilon > 0$ takav da za bilo koje brojeve $a, b, c \in [0, +\infty\rangle$ vrijedi

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq \varepsilon |a - b||b - c||c - a|.$$

Idući zadatak je poznata tvrdnja iz linearne algebre, koju se može pronaći u knjizi [5], a na višem nivou općenitosti i u knjizi [6].

Zadatak 2. Neka je n prirodan broj i neka je A kompleksna matrica tipa $n \times n$. *Numerički radijus* matrice A definira se kao

$$r(A) = \sup \Big\{ \frac{|\langle Av, v\rangle|}{\|v\|^2} : v \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \Big\}.$$

Pritom je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ standardni skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$. Dokažite da vrijedi $r(A) \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \leq 2r(A)$.

Sljedeći zadatak je trik kojeg je izdvojio Tao [15], a ideju pripisuje Ruzsi[21] [9].

Zadatak 3. Neka je $(G, +)$ komutativna grupa. Za skupove $A, B \subseteq G$ označavamo $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ te analogno (ili iteriranjem spomenutog) definiramo i višestruke zbrojeve skupova. Nadalje, za konačni skup $A \subseteq G$ sa $|A|$ označavamo broj njegovih elemenata. Poznata *Plünneckeova nejednakost* [8] tvrdi da za bilo koje neprazne konačne skupove $A, B \subseteq G$ i $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|A|^{k-1} |\underbrace{B + B + \cdots + B}_{k}| \leq |A + B|^k.$$

Dokažite da za $k \in \mathbb{N}$ i neprazne konačne skupove $A, B_1, \ldots, B_k \subseteq G$ vrijedi

$$|A|^{k-1} |B_1 + B_2 + \cdots + B_k| \leq |A + B_1||A + B_2| \cdots |A + B_k|.$$

Posljednji zadatak je odavno riješeni posebni slučaj tzv. *Sidorenkove slutnje* [13], koja je i danas otvorena u punoj općenitosti. Pažljivi će čitatelj uočiti vezu s našim posljednjim primjerom.

[20] Terence Tao (1975.), australsko-američki matematičar, dobitnik Fieldsove medalje 2006. godine

[21] Imre Ruzsa (1953.), mađarski matematičar

Zadatak 4. Neka je $f\colon [0,1]^2 \to [0,+\infty\rangle$ neprekidna funkcija koja zadovoljava $f(y,x) = f(x,y)$ za sve $x, y \in [0,1]$. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost:

$$\int_{[0,1]^{n+1}} f(x_0,x_1)f(x_1,x_2)\cdots f(x_{n-1},x_n)dx_0dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}dx_n$$
$$\geq \Big(\int_{[0,1]^2} f(x,y)dxdy\Big)^n.$$

Zahvale

Zahvaljujem studentima koji su slušali izlaganje iz predmeta *Studentska natjecanja iz matematike* na kojem je bila izložena ova tema te dali nekoliko korisnih komentara. Zahvalan sam i Aleksandru Bulju, što mi je svrnuo pozornost na zadatak 4, pokazavši da ima vrlo elegantno rješenje. Također zahvaljujem anonimnom recenzentu na pažljivom čitanju i velikom broju korisnih sugestija.

Literatura

[1] N. Alon, I. Z. Ruzsa, *Non-averaging subsets and non-vanishing transversals*, J. Combin. Theory Ser. A **86** (1999), no. 1, 1–13.

[2] H. Bohr, *The Arithmetic and Geometric Means*, J. London Math. Soc. **10** (1935), no. 2, 114.

[3] P. Erdős, M. Simonovits, *Compactness results in extremal graph theory*, Combinatorica **2** (1982), no. 3, 275–288.

[4] H. Kraljević, S. Kurepa, *Matematička analiza 4/I. Funkcije kompleksne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.

[5] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.

[6] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza. Elementi teorije operatora*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[7] L. H. Loomis, H. Whitney, *An inequality related to the isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 961–962.

[8] H. Plünnecke, *Eine zahlentheoretische Anwendung der Graphtheorie.* J. Reine Angew. Math. **243** (1970), 171–183.

[9] I. Z. Ruzsa, *An application of graph theory to additive number theory*, Sci. Ser. A Math. Sci. (N.S.) **3** (1989), 97–109.

[10] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, treće prerađeno izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[11] N. Sarapa, *Vjerojatnost i statistika: I. dio: osnove vjerojatnosti, kombinatorika*, Školska knjiga, Zagreb, 1993.

[12] N. Sarapa, *Vjerojatnost i statistika: II. dio: osnove statistike, slučajne varijable*, Školska knjiga, Zagreb, 1996.

[13] A. Sidorenko, *A correlation inequality for bipartite graphs*, Graphs Combin. **9** (1993), no. 2, 201–204.

[14] T. Tao, *Structure and Randomness: pages from year one of a mathematical blog*, AMS, Providence, 2008.

[15] T. Tao, *What's new*, `https://terrytao.wordpress.com`

Vjekoslav Kovač
Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, Bijenička cesta 30, Zagreb
E-mail adresa: `vjekovac@math.hr`