O dimenzijama i fraktalima
(uz članak S. Mardešića o Cantorovom skupu)

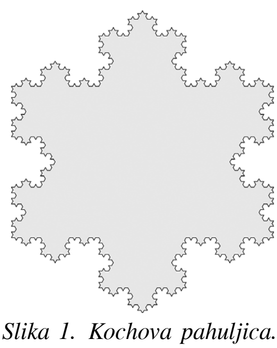
Darko Veljan

Članak akademika Sibe Mardešića, *Cantorov trijadski skup*, napisan je 1963. godine, a gore reproduciran. No tek se 1975. radovima B. Mandelbrota u matematici pojavio opći i formalni pojam fraktala, iako su mnogi primjeri bili poznati i znatno ranije. Cantorov (trijadski) skup je poznat već 1884. godine i pripada među prve eksplicitno opisane fraktale (ili fraktalne skupove). Upravo je na kraju svog članka S. Mardešić (tada još docent) ukazao na pitanje: što je krivulja? Jedan od kratkih odgovora jest da je krivulja prostor dimenzije 1 (npr. pravac, elipsa, parabola, hiperbola, sinusoida, logaritamska krivulja,...). Točnije, to je Hausdorffov topološki prostor lokalno homeomorfan pravcu. Nećemo podrobno ulaziti u ta pitanja, jer se u teoriji dimenzija razmatraju razne topološke dimenzije. Primjerice, dimenzija prekrivanja, mala i velika induktivna, zatim dimenzija pakiranja, Hausdorffova (fraktalna) dimenzija i druge. S teorijom dimenzija se znanstveno bavio i prof. Mardešić, kao što smo to opisali o njegovom znanstvenom opusu u broju 1 (2017./2018.) MFL-a. Razne topološke dimenzije su nenegativni cijeli brojevi i imaju uobičajene vrijednosti na poznatim skupovima, npr. dimenzija kruga je 2, a kocke 3.

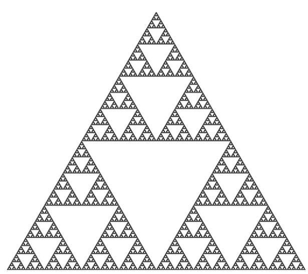
Jedna od definicija fraktala jest da je to skup čija je Hausdorffova dimenzija veća od topološke dimenzije. Katkad se fraktali opisuju kao samo-slični objekti u svim uvećanjima (zumiranjima) detalja. Danas ima raznih primjena fraktala, u fizici, biologiji, medicini, tehnologiji, računarstvu i drugdje.

Fraktalna dimenzija D ne mora biti cijeli broj, a grubo govoreći, ona statistički mjeri koliko se pojedinost uzorka promijeni u svim uvećanjima. Točnije, $D = \log N/\log r$, gdje je N broj kopija koje prekrivaju skup, a svaki uvećan s omjerom $1/r$. Drugim riječima, ako je skup pokriven s N kopija samog sebe svaki s omjerom $1/r$, onda je $N = r^D$. Logaritmiranjem dobijemo D. Osim ove standardne, razmatraju se i druge fraktalne dimenzije. Ne upuštajući se dalje u teoriju, evo nekih primjera.

• *Cantorov skup* ima topološku dimenziju 0, a Hausdorffovu (fraktalnu) dimenziju jednaku $\log_3 2 = \log 2/\log 3 \approx 0.6309$. Ima neprebrojivo točaka (kao i pravac), a ukupnu duljinu 0.



Slika 1. Kochova pahuljica.



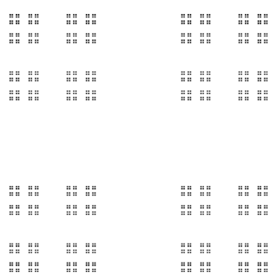
Slika 2. Trokut Sierpińskog.

• *Kochova pahuljica* se dobiva na sljedeći način. Pođemo od jednakostraničnog trokuta i podijelimo mu svaku stranicu na tri jednaka dijela. Ponavljaj: izbaci srednju trećinu i zamijeni je prema van s ostale dvije stranice trokuta. Ono što preostane na limesu se zove Kochova pahuljica. Ona je primjer svuda neprekidne, a nigdje diferencijabilne krivulje (tj. ni u jednoj njezinoj točki ne postoji jednoznačno određena tangenta). Njezin je opseg beskonačan, a zahvaća površinu jednaku $8/5$ prvotnog trokuta. Njena je fraktalna dimenzija $\log_3 4 \approx 1.2619$.

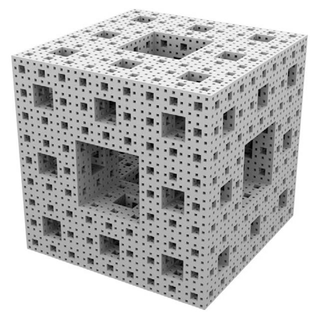
• *Trokut Sierpińskog.* Pođemo od jednakostraničnog trokuta. Izbacimo mu trokut s vrhovima u polovištima stranica i nastavimo isto s preostalim trokutima. Limes je trokut Sierpińskog. Hausdorffova mu je dimenzija $\log_2 3 \approx 1.5849$. Slično se dobiva i *kvadrat (tepih) Sierpińskog* s izbacivanjem samo središnjeg kvadrata s time da je podijeljen s 3×3 jednakih kvadratića. Hausdorffova mu je dimenzija $\log_3 8 \approx 1.8928$.

• *Cantorova prašina.* Iz kvadrata 3×3 izbaci središnji kvadratić i još 4 koji s njime dijele stranicu i nastavi tako u beskonačnost. Na limesu ostane Cantorova prašina fraktalne dimenzije $\log_3 4$.

• *Mengerova spužva* je ono što ostane na limesu kad se iz $3 \times 3 \times 3$ kocke izbace središnja i s njom dodirnih 6 kockica i nastavi tako u beskraj. Njena je površina beskonačna, obujma (tj. Lebesgueove mjere) je nula, a topološke dimenzije 1. Svaka joj je strana tepih Sierpińskog, a dijagonala Cantorov skup. Fraktalne je dimenzije $\log_3 20 \approx 2.7268$.



Slika 3. Cantorova prašina.



Slika 4. Mengerova spužva.

• 4-dimenzionalni analogon Mengerove spužve se ponekad smatra jednostavnim modelom svemira. Ima beskonačan obujam (volumen), ali u 4 dimenzije sadržaj 0. Fraktalne je dimenzije $\log_3 72 \approx 3.8928$.

Ljudski mozak ima fraktalnu dimenziju oko 2.79, a pluća oko 2.97.

Zaključno možemo kazati da je svojim stručnim člankom o Cantorovom skupu u MFL-u iz 1963/ 64. profesor Mardešić brojnim učenicima i čitateljima ukazao na važnost i ljepotu topologije. I to je zapravo prvi ozbiljniji stručni članak iz topologije na hrvatskom jeziku uopće, uz članak *Topologija*, u Enciklopediji Leksikografskog Zavoda, Zagreb, 1964. A nekako u to doba za studente matematike i druge zainteresirane otpočeo je na PMF-u održavati razne seminare i radne grupe, npr. iz teorije uzlova, te predavati diplomske i postdiplomske predmete iz analize i topologije, primjerice o Liejevim grupama, o teoriji homologije itd. Profesori Sibe Mardešić i Pavle Papić započeli su i s predavanjima iz matematičke analize za studente matematike na prve dvije godine studija u kojima su pomalo studente poučavali i topologiju. Profesor Mardešić se na predavanjima znao i našaliti pa je tako beskonačne nizove zvao "beskonačorke". Detaljnije o njemu vidi u MFL-u 68, br. 1 (2017./ 2018) 6–11.

Na kraju, evo i jedne povijesno-tragične crtice o spominjanom njemačkom matematičaru Felixu Hausdorffu. Kao 74-godišnji umirovljeni profesor Sveučilišta u Bonnu, trebao se 27. siječnja 1942. kao Židov javiti u policijsku stanicu. No večer prije toga on, njegova supruga i njezina sestra, koja je s njima živjela, znajući što ih čeka, počinili su samoubojstvo ispivši otrov. Pojmovi koji su dobili njegovo ime su Hausdorffov topološki prostor, Hausdorffova mjera, spominjana Hausdorffova dimenzija i drugi.