Dvije bitno različite klase nejednakosti vezane za trokut

Petar Svirčević[1]

Ako trokut ima duljine stranica a, b, c pokazat ćemo da postoje dvije bitno različite klase nejednakosti $f(a,b,c) \geqslant 0$:

1. klasa: $((b+c=a) \vee (c+a=b) \vee (a+b=c)) \implies (f(a,b,c)=0)$.

2. klasa: $(a=b=c) \implies (f(a,b,c)=0)$.

Svakako, da duljine stranica u ovim nejednakostima mogu biti izražene kao funkcije drugih triju veličina, koje se odnose na trokut, a međusobno su nezavisne. No, te nejednakosti ne moraju uvijek biti u implicitnom obliku, već one mogu biti i u obliku $f_1(a,b,c) \geqslant f_2(a,b,c)$.

Nestandardne nejednakosti vezane za trokut

Ovdje ćemo najprije izvesti nejednakosti u vezi trokuta, koje se dokazuju pomoću modificirane *Heronove formule* za površinu trokuta, koja je dana u obliku

$$P = \frac{1}{4}\left[(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Ako su a, b, c, duljine stranica trokuta ABC, tada vrijedi dobro poznata *Heronova formula*

$$P = [s(s-a)(s-b)(s-c)]^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

gdje je $2s = a+b+c$. No, (2) se može pisati i u obliku

$$P = \frac{1}{4}[(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)]^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

koji lako transformiramo u modificirani oblik (1), a on je praktičan za primjenu, ako su duljine stranica npr.: $a=\sqrt{26}$, $b=\sqrt{17}$, $c=\sqrt{10}$.

Logično je reći, da trokut postoji onda i samo onda ako je $P>0$. Dakle $P \in \mathbf{R}^+$, jer P uzimamo kao broj neimenovanih kvadratnih jedinica, dok su: a, b, c, s brojevi istovrsnih neimenovanih duljina, pa je a, b, c, $s \in \mathbf{R}^+$. Dakle, funkcija $P : (\mathbf{R}^+)^3 \to \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$.

Iz (3) slijedi ekvivalencija

$$(P>0) \iff ((b+c>a) \wedge (c+a>b) \wedge (a+b>c)), \tag{4}$$

koju čitamo: trokut postoji onda i samo onda ako su ispunjene sve tri nejednakosti trokuta. Ovi uvjeti zapravo kažu, da se trokut može konstruirati.

Nadalje vrijedi ekvivalencija

$$(P=0) \iff ((b+c=a) \vee (c+a=b) \vee (a+b=c)), \tag{5}$$

dakle to je realni, ali degenerirani, slučaj, jer je trokut degenerirao u dužinu.

[1] Autor je profesor u miru na Željezničkoj tehničkog školi u Zagrebu; e-pošta: `petar.svircevic@zg.t-com.hr`

I na kraju imamo slučaj kada je

$$(P \notin \mathbf{R}) \iff ((b+c<a) \vee (c+a<b) \vee (a+b<c)), \tag{6}$$

dakle površina nije realna.

Sada ćemo formulirati nejednakosti s rješenjima ili uputama, a odnose se na (1). Nadalje ćemo koristiti i ove formule:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{(abc)^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}, \tag{7}$$

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma} \tag{8}$$

$$P = \frac{2abc}{a+b+c} \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}, \tag{9}$$

$$P = \sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c)abc \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}} \tag{10}$$

koje su izvedene u [1], a njima možemo pridodati i dobro poznatu formulu

$$P = s^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{4}(a+b+c)^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}. \tag{11}$$

Problem 1. Dokažimo nejednakost

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant 2(a^4+b^4+c^4), \tag{12}$$

gdje vrijedi stroga nejednakost ako je:

$$(b+c>a) \wedge (c+a>b) \wedge (a+b>c), \tag{13}$$

a jednakost za

$$(b+c=a) \vee (c+a=b) \vee (a+b=c). \tag{14}$$

Uputa. Rješenje slijedi iz (1), (4) i (5).

Napomena 1. Ako u (12) uvrstimo $c = a+b$, dobivamo $(a^2+b^2+(a+b)^2)^2 = 2(a^4+b^4+(a+b)^4)$, a istinitost tog identiteta možemo lako provjeriti.

Napomena 2. Uvjet za konstruktibilnost trokuta je dan relacijom (13), ili u obliku $a^4+b^4+c^4 < 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$, koji se dobije iz (12).

Problem 2. Ako su: t_a, t_b, t_c duljine težišnica trokuta, dokažimo

$$(t_a^2+t_b^2+t_c^2)^2 \geqslant 2(t_a^4+t_b^4+t_c^4), \tag{15}$$

gdje vrijedi stroga nejednakost ako je:

$$(t_b+t_c>t_a) \wedge (t_c+t_a>t_b) \wedge (t_a+t_b>t_c), \tag{16}$$

a jednakost za

$$(t_b+t_c=t_a) \vee (t_c+t_a=t_b) \vee (t_a+t_b=t_c). \tag{17}$$

Rješenje. Dokažimo da vrijedi

$$P = \frac{1}{3}\left[(t_a^2+t_b^2+t_c^2)^2 - 2(t_a^4+t_b^4+t_c^4)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{18}$$

a odatle je onda vidljivo i (15).

Naime, da bi (15) strogo dokazali, moramo se prisjetiti da pomoću kosinusovog poučka možemo dobiti kvadrate duljina težišnica:

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2), \tag{19}$$

$$t_b^2 = \frac{1}{4}(2c^2 + 2a^2 - b^2), \tag{20}$$

$$t_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2). \tag{21}$$

Iz tih relacija se dobiva:

$$a^2 = \frac{4}{9}(2t_b^2 + 2t_c^2 - t_a^2), \tag{22}$$

$$b^2 = \frac{4}{9}(2t_c^2 + 2t_a^2 - t_b^2), \tag{23}$$

$$c^2 = \frac{4}{9}(2t_a^2 + 2t_b^2 - t_c^2). \tag{24}$$

Zbrojimo li jednakosti od (22) do (24), dobivamo

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2), \tag{25}$$

a ako iste kvadriramo i zbrojimo, nakon sređivanja, uz dosta ispisa, dobivamo

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{16}{9}(t_a^4 + t_b^4 + t_c^4). \tag{26}$$

I konačno, ako (25) i (26) uvrstimo u (1), dobivamo (18), pa je time dokazano i (15), gdje vrijede ekvivalencije:

$$(P > 0) \iff ((t_b + t_c > t_a) \wedge (t_c + t_a > t_b) \wedge (t_a + t_b > t_c)), \tag{27}$$

$$(P = 0) \iff ((t_b + t_c = t_a) \vee (t_c + t_a = t_b) \vee (t_a + t_b = t_c)); \tag{28}$$

jer se (18) može napisati i u obliku

$$P = \frac{1}{3}\left[(t_a + t_b + t_c)(t_b + t_c - t_a)(t_c + t_a - t_b)(t_a + t_b - t_c)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

Napomena 3. Uzmemo li npr. $c = a + b$, pa to uvrstimo u (19), (20), (21), dobit ćemo, da jednakost u (15) vrijedi, jer će vrijediti (28).

Problem 3. Ako su h_a, h_b, h_c duljine visina trokuta dokažimo da je

$$(h_a^{-2} + h_b^{-2} + h_c^{-2})^2 \geqslant 2(h_a^{-4} + h_b^{-4} + h_c^{-4}), \tag{30}$$

gdje vrijedi stroga nejednakost ako je

$$(h_b^{-1} + h_c^{-1} > h_a^{-1}) \wedge (h_c^{-1} + h_a^{-1} > h_b^{-1}) \wedge (h_a^{-1} + h_b^{-1} > h_c^{-1}); \tag{31}$$

a jednakost za

$$(h_a = 0) \vee (h_b = 0) \vee (h_c = 0). \tag{32}$$

Rješenje. Iz jednakosti $P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ dobivaju se veze:

$$a = 2Ph_a^{-1}, \tag{33}$$

$$b = 2Ph_b^{-1}, \tag{34}$$

$$c = 2Ph_c^{-1}, \tag{35}$$

koje nakon uvrštenja u (1) daju formulu

$$P = \left[(h_a^{-2} + h_b^{-2} + h_c^{-2})^2 - 2(h_a^{-4} + h_b^{-4} + h_c^{-4}) \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{36}$$

iz koje slijedi (30) za uvjete (31) i (32), jer se (36) može napisati u obliku

$$P = \left[(h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1})(h_b^{-1} + h_c^{-1} - h_a^{-1})(h_c^{-1} + h_a^{-1} - h_b^{-1})(h_a^{-1} + h_b^{-1} - h_c^{-1}) \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{37}$$

Napomena 4. Ako formalno gledamo, ekvivalenciji (5) ili (28) bi "trebala odgovarati" ekvivalencija $(P = 0) \iff ((h_b^{-1} + h_c^{-1} = h_a^{-1}) \vee (h_c^{-1} + h_a^{-1} = h_b^{-1}) \vee (h_a^{-1} + h_b^{-1} = h_c^{-1}))$, ali to nije istina, jer bi iz (37) slijedilo $P = \infty$, a mora biti $P = 0$. Prema tome je jasno, da duljina bilo koje visine mora biti jednaka nuli, da bi trokut degenerirao u dužinu, tako da je $P = 0$, dakle točno je (32), a to znači da vrijedi (5).

Za rješavanje nekih problema ćemo koristiti i ove dobro poznate formule

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta. \tag{38}$$

Iz relacija (12), (25) i (26) navest ćemo još dva problema, za koje vrijedi stroga nejednakost, ako vrijedi (4), odnosno jednakost ako vrijedi (5).

Problem 4.

$$9(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geqslant 32(t_a^4 + t_b^4 + t_c^4) \tag{39}$$

Problem 5.

$$8(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2)^2 \geqslant 9(a^4 + b^4 + c^4) \tag{40}$$

Problem 6.

$$P \geqslant \frac{\sqrt{2(a^4 + b^4 + c^4)}}{4(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)} \tag{41}$$

Uputa. Iz (8) i (12) slijedi (41).

Problem 7.

$$(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)^2 \geqslant 2(\sin^4\alpha + \sin^4\beta + \sin^4\gamma). \tag{42}$$

Uputa. Rješenje slijedi primjenom poučka o sinusima na (1).

Sada ćemo izvršiti poopćenje P1 na tetivni četverokut.

Problem 8. Dokažimo da, ako su: a, b, c, d duljine stranica tetivnog četverokuta, tada vrijedi nejednakost

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + 8abcd \geqslant 2(a^4 + b^4 + c^4 + d^4), \tag{43}$$

gdje vrijedi stroga nejednakost ako je:

$$(b + c + d > a) \wedge (c + d + a > b) \wedge (d + a + b > c) \wedge (a + b + c > d); \tag{44}$$

a jednakost za

$$(b + c + d = a) \vee (c + d + a = b) \vee (d + a + b = c) \vee (a + b + c = d). \tag{45}$$

Uputa. Formula za površinu tetivnog četverokuta, čije su duljine stranica a, b, c, d je

$$P = \frac{1}{4}\left[(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + 8abcd - 2(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{46}$$

a dobiva se iz $P = [(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]^{\frac{1}{2}}$, gdje je $2s = a + b + c + d$.

To bi bile neke nejednakosti, koje se odnose na prvu klasu.

Sada ćemo navesti primjere nejednakosti iz *druge klase*, koje se dokazuju pomoću nejednakosti između sredina: harmonijske, geometrijske, aritmetičke i kvadratne. Svakako, će sada vrijediti stroge jednakosti ako je $a = b = c$.

Napomena 5. Recimo još, da ćemo s r označavati duljinu polumjera trokutu opisane, a s ρ duljinu polumjera upisane kružnice, dok će ρ_a, ρ_b, ρ_c značiti duljine polumjera trokutu pripisanih kružnica, i konačno će s_α, s_β, s_γ biti oznake za "duljine simetrala kutova".

Znamo, da su sredine za duljine stranica trokuta:

$$H(a,b,c) = \frac{3}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}} \qquad \text{(harmonijska sredina)},$$
$$G(a,b,c) = \sqrt[3]{abc} \qquad \text{(geometrijska sredina)},$$
$$A(a,b,c) = \frac{a+b+c}{3} \qquad \text{(aritmetička sredina)},$$
$$K(a,b,c) = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \qquad \text{(kvadratna sredina)},$$

a odnos među njima, u skraćenom zapisu, je

$$H \leqslant G \leqslant A \leqslant K. \tag{47}$$

Vidljivo je, da u (47) vrijedi znak jednakosti ako je $a = b = c$. Budući da se radi o trokutu, tada znak jednakosti vrijedi za ove ekvivalencije:

$$(a = b = c) \Longleftrightarrow (\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ) \Longleftrightarrow (h_a = h_b = h_c) \Longleftrightarrow (t_a = t_b = t_c). \tag{48}$$

Problem 9.

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)^3 \geqslant \frac{27}{8} \tag{49}$$

Uputa. Ako na jednakost $(7) = (8)$ primijenimo nejednakost $G \leqslant K$, nakon sređivanja slijedi (49).

Problem 10.

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \geqslant \frac{27}{8}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \tag{50}$$

Uputa. Primijenimo $G \leqslant A$ na bilo koju od ovih jednakosti $(7) = (9)$, $(7) = (10)$, $(7) = (11)$, $(9) = (10)$, $(9) = (11)$ i nakon sređivanja dobivamo (50). Dakle, ta se nejednakost može izvesti na barem pet načina.

Problem 11.

$$(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \geqslant \frac{9}{8} \tag{51}$$

Uputa. Primijenimo $G \leqslant K$ i $G \leqslant A$ na jednakost $(8) = (9)$.

Problem 12.

$$(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \geqslant \frac{3}{8} \tag{52}$$

Uputa. Primijenimo $G \leqslant A$ i $A \leqslant K$ na jednakost $(8) = (10)$.

Problem 13.

$$(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\geqslant\frac{1}{3} \tag{53}$$

Uputa. Primijenimo $A\leqslant K$ na jednakost $(8)=(11)$.

Problem 14.

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\geqslant\frac{27}{8}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \tag{54}$$

Uputa. Primijenimo $G\leqslant A$ na jednakost $(10)=(11)$.

Problem 15.

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^3\geqslant 27\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \tag{55}$$

Rješenje. Pomoću (38) dolazimo do $P=\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{2((ab)^{-1}+(bc)^{-1}+(ca)^{-1})}$, pa ako to izjednačimo sa (7), te primijenimo nejednakost $H\leqslant G$, dobivamo (55).

Problem 16.

$$\begin{aligned} &\text{a)} && \left(1+\frac{2s}{a}\right)\left(1+\frac{2s}{b}\right)\left(1+\frac{2s}{c}\right)\geqslant 64,\\ &\text{b)} && \left(1+\frac{180^\circ}{\alpha}\right)\left(1+\frac{180^\circ}{\beta}\right)\left(1+\frac{180^\circ}{\gamma}\right)\geqslant 64. \end{aligned} \tag{56}$$

Rješenje. a) Neka je

$$x=\frac{a}{2s},\quad y=\frac{b}{2s},\quad z=\frac{c}{2s}. \tag{57}$$

Budući je $2s=a+b+c$, vrijedi

$$x+y+z=1. \tag{58}$$

Uvažimo li (57), (58) i (56a), imamo

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)&=\frac{x+1}{x}\frac{y+1}{y}\frac{z+1}{z}\\ &=\frac{x+x+y+z}{x}\frac{y+x+y+z}{y}\frac{z+x+y+z}{z}\\ &\overset{A\geqslant G}{\geqslant}\frac{1}{xyz}\cdot 4\sqrt[4]{x^2yz}\cdot 4\sqrt[4]{xy^2z}\cdot 4\sqrt[4]{xyz^2}\\ &=\frac{1}{xyz}\cdot 64\sqrt[4]{x^4y^4z^4}=64,\end{aligned}$$

pa smo time dokazali (56a). Tu smo primijenili nejednakost $A\geqslant G$ za četiri pozitivna broja.

Uputa b). Analogno se dokazuje kao u a).

Problem 17. Ako su ρ_a, ρ_b, ρ_c duljine polumjera pripisanih kružnica, a ρ duljina polumjera upisane kružnice; trebamo dokazati nejednakosti:

$$\rho_a\rho_b\rho_c \geqslant 27\rho^3, \tag{59}$$

$$P \geqslant 3\rho^2\sqrt{3}. \tag{60}$$

Rješenje. U prvom razredu srednje škole se dokazuje

$$\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}=\frac{1}{\rho}, \tag{61}$$

$$P=\sqrt{\rho\rho_a\rho_b\rho_c}. \tag{62}$$

Iz odnosa $G\left(\frac{1}{\rho_a},\frac{1}{\rho_b},\frac{1}{\rho_c}\right) \leqslant A\left(\frac{1}{\rho_a},\frac{1}{\rho_b},\frac{1}{\rho_c}\right)$ slijedi $\sqrt[3]{\frac{1}{\rho_a}\cdot\frac{1}{\rho_b}\cdot\frac{1}{\rho_c}} \leqslant \dfrac{\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}}{3}$ $=\frac{1}{3\rho}$, jer smo uvažili (61), a odatle se dobiva (59). No, ako (59) pomnožimo s ρ, korjenujemo i uvažimo (62), dobivamo (60).

Problem 18.

a) $$(a+b+c)(a\sin\alpha+b\sin\beta+c\sin\gamma) \geqslant 18P, \tag{63}$$

b) $$a\sin\alpha+b\sin\beta+c\sin\gamma \geqslant 9\rho. \tag{64}$$

Rješenje. Ako uvažimo (38),

$$\begin{aligned}a\sin\alpha+b\sin\beta+c\sin\gamma &= a\frac{2P}{bc}+b\frac{2P}{ca}+c\frac{2P}{ab}=2P\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}=6P\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\frac{1}{abc}\\ &\overset{A\geqslant G}{\geqslant} 6P\frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{abc}=6P\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \overset{\frac{1}{G}\geqslant\frac{1}{A}}{\geqslant} 6P\frac{3}{a+b+c},\end{aligned}$$

pa odatle i (63).

Iz $P=\rho s=\rho\dfrac{a+b+c}{2}$ i (63) imamo (64).

Problem 19. Bez upotrebe nejednakosti (47) dokažimo:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}. \tag{65}$$

Rješenje. Iz poznatih jednakosti:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},\quad \sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

imamo

$$\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}\cdot\frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{4ca}\cdot\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{4ab}}\\ &= \frac{\sqrt{((a+b-c)(a-b+c))((b+c-a)(b-c+a))((c+a-b)(c-a+b))}}{8abc}\\ &= \frac{\sqrt{(a^2-(b-c)^2)(b^2-(c-a)^2)(c^2-(a-b)^2)}}{8abc} \leqslant \frac{\sqrt{a^2b^2c^2}}{8abc}=\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Dakle (65) smo dokazali ne koristeći (47). Svakako, da jednakost vrijedi ako je $\alpha=\beta=\gamma$.

Problem 20.

$$P \leqslant \frac{a^4+b^4+c^4}{8rs} \tag{66}$$

Rješenje. Budući je $P = \dfrac{abc}{4r}$ i $2s = a+b+c$, (66) poprima oblik

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(a+b+c). \tag{67}$$

Dokažimo sada (67):

$$\begin{aligned}
a^4+b^4+c^4 &= 3\left(\sqrt{\frac{(a^2)^2+(a^2)^2+(a^2)^2}{3}}\right)^2 \overset{K\geqslant A}{\geqslant} 3\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^2\\
&= 3\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^4 = 3\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^3\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\\
&\overset{K\geqslant G}{\geqslant} 3\left(\sqrt[3]{abc}\right)^3\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \overset{K\geqslant A}{\geqslant} 3abc\frac{a+b+c}{3}\\
&= abc(a+b+c),
\end{aligned}$$

pa je time dokazano i (66).

Problem 21.

$$\frac{1}{s_\alpha}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{s_\beta}\cos\frac{\beta}{2}+\frac{1}{s_\gamma}\cos\frac{\gamma}{2} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \tag{68}$$

Rješenje. Prisjetimo se,

$$s_\alpha = \frac{\sqrt{bc((b+c)^2-a^2)}}{bc}. \tag{69}$$

Dalje imamo,

$$s_\alpha = \frac{\sqrt{bc(2bc+b^2+c^2-a^2)}}{b+c} = \frac{\sqrt{bc(2bc+2bc\cos\alpha)}}{b+c} = \ldots = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2},$$

a odatle $\dfrac{1}{s_\alpha}\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$. Cikličkim pomakom iz te jednakosti dobivamo još ove dvije $\dfrac{1}{s_\beta}\cos\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)$ i $\dfrac{1}{s_\gamma}\cos\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$. Nakon zbrajanja ovih triju jednakosti i primjene nejednakosti $A \geqslant G$ dobivamo (68).

Problem 22.

a) $$s_\alpha^2 + s_\beta^2 + s_\gamma^2 < bc + ca + ab \tag{70}$$

b) $$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \geqslant \frac{s_\alpha s_\beta s_\gamma}{abc} \tag{71}$$

c) $$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \geqslant \frac{s_\alpha s_\beta s_\gamma}{4s^2 r}. \tag{72}$$

Uputa. Koristimo sljedeće veze, i njima ciklički pridijeljene:

$$\sin\alpha = \sin(\beta+\gamma), \quad s_\alpha = \sqrt{bc}\cdot\sqrt{1-\frac{\sin^2(\beta+\gamma)}{(\sin\beta+\sin\gamma)^2}}, \quad \frac{1}{s_\alpha}\cos\frac{\alpha}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{bc}}.$$

Problem 23. Dokažimo: ako su duljine stranica trokuta prirodni brojevi, vrijedi nejednakost

$$a^a b^b c^c \geqslant \left(\frac{2s}{3}\right)^{2s}. \tag{73}$$

Rješenje. Imamo:

$$\sqrt[2s]{a^a b^b c^c} = \sqrt[a+b+c]{a^a b^b c^c} \overset{G\geqslant H}{\geqslant} \frac{a+b+c}{\underbrace{\frac{1}{a}+\ldots+\frac{1}{a}}_{a}+\underbrace{\frac{1}{b}+\ldots+\frac{1}{b}}_{b}+\underbrace{\frac{1}{c}+\ldots+\frac{1}{c}}_{c}}$$
$$= \frac{a+b+c}{3} = \frac{2s}{3},$$

a odatle (73).

Problem 24. Nađimo sve trokute za koje vrijedi jednakost

$$a^6 + b^6 + c^6 + 3 = 6abc. \tag{74}$$

Rješenje.

$$a^6 + b^6 + c^6 + 1 + 1 + 1 \overset{A\geqslant G}{\geqslant} 6\cdot\sqrt[6]{a^6 b^6 c^6\cdot 1\cdot 1\cdot 1} = 6abc,$$

pa jednakost vrijedi ako je $a^6 = b^6 = c^6 = 1$, a odatle slijedi $a = b = c = 1$, jer negativna rješenja ne dolaze u obzir. Dakle, postoji samo jedan trokut čije duljine stranica zadovoljavaju (74).

Lako se vidi, da (74) možemo poopćiti na oblik $a^n + b^n + c^n + n = nabc + 3$, gdje je $n \in \{3, 4, 5, \ldots\}$. I za ovaj slučaj postoji jednakostranični trokut $a = b = c$ ako je $n = 3$, odnosno $a = b = c = 1$ ako je $n > 3$, ali bi sada upotrijebili $A \geqslant G$ nejednakost primijenjenu na n pozitivnih brojeva.

Problem 25. Dokažimo: ako su duljine stranica tetivnog četverokuta prirodni brojevi, vrijedi nejednakost

$$a^a b^b c^c d^d \geqslant \left(\frac{s}{2}\right)^{2s}. \tag{75}$$

Uputa. Dokazuje se analogno kao P23. Jasno je, da generalizacija za tetivni poligon glasi $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k^{a_k} \geqslant \left(\frac{2s}{n}\right)^{2s}$, gdje su $a_k \in \mathbf{N}$ (duljine stranica su prirodni brojevi).

Napomena 6. Recimo da postoje i složenije nejednakosti, kao npr.

$$a^a b^b c^c \leqslant \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2s}\right)^{2s}, \tag{76}$$

za čiji bi dokaz trebalo primijeniti *Jensenovu nejednakost*. Svakako, da i ovdje vrijedi jednakost ako je $a = b = c$.

Napomena 7. Npr., ako bi na nejednakost

$$\frac{2s}{3} = \frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

uzastopno primjenjivali nejednakost $A \leqslant K$, dobili bi

$$\frac{1}{3}(a^{2^n}+b^{2^n}+c^{2^n}) \geqslant \left(\frac{2s}{3}\right)^{2^n}. \tag{77}$$

No, (77) se može dobiti i iz općenitije nejednakosti

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^{2^n} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^{2^n}\right) k^{2^n-1}; \quad \text{za } a_i > 0.$$

Iz (61) dobijemo

$$\sqrt[3]{\rho_a\rho_b\rho_c} \geqslant 3\rho,$$

a odatle

$$\frac{\rho_a+\rho_b+\rho_c}{3} \geqslant 3\rho, \qquad \sqrt{\frac{\rho_a^2+\rho_b^2+\rho_c^2}{3}} \geqslant 3\rho, \qquad \rho_a^{2^1}+\rho_b^{2^1}+\rho_c^{2^1} \geqslant 3^{2^1+1}\rho^{2^1}, \ldots,$$

pa općenito slijedi,

$$\rho_a^{2^n}+\rho_b^{2^n}+\rho_c^{2^n} \geqslant \rho^{2^n}3^{2^n+1}. \tag{78}$$

Iz P9 dobivamo

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma}{3} \geqslant \frac{1}{2},$$

odatle je

$$((\sin\alpha)^{2^n}+(\sin\beta)^{2^n}+(\sin\gamma)^{2^n})((\operatorname{ctg}\alpha)^{2^n}+(\operatorname{ctg}\beta)^{2^n}+(\operatorname{ctg}\gamma)^{2^n}) \geqslant 9\cdot 2^{-2^n}. \tag{79}$$

Nejednakosti (78) i (79) se mogu dokazati matematičkom indukcijom.

Prema tome, na osnovu iznesenog zaključujemo, da možemo lako generirati nove nejednakosti u vezi trokuta, iako smo upotrijebili samo četiri vrste nejednakosti.

Literatura

[1] M. Halapa, *Površina trokuta izražena duljinama stranica i kutovima*, Matematičko-fizički list, br. 216, 255–256 (2003/ 2004), Zagreb.

[2] J. Manojlović, *Nejednakosti i primene*, Prirodno-matematički fakultet, Niš.

[3] B. Pavković, B. Dakić, Ž. Hanjš, P. Mladinić, *Male teme iz matematike*, HMD, Zagreb.

[4] P. Svirčević, *Zadaci o simetralama kutova trokuta*, Matematičko-fizički list, br. 2 (2003/ 2004), Zagreb.