Intranzitivne kocke

Antonia Čoić,[1] *Vjekoslav Kovač*[2]

Opisat ćemo jedan prividni paradoks elementarne teorije vjerojatnosti, kojeg su prvi uočili matematičari Hugo Steinhaus i Stanisław Trybuła [5]. Statističar Bradley Efron stavio ga je u kontekst igara na sreću s kockama, da bi ga potom poznati popularizator matematike Martin Gardner opisao u svojoj kolumni *Matematičke igre* časopisa *Scientific American* [2]. Mi navodimo najelegantniju varijantu tog paradoksa, koju je osmislio Ivars Peterson [4].

Na tri igraće kocke A, B, C napisani su prirodni brojevi. Pritom brojevi na istoj kocki mogu biti jednaki te izbor brojeva ne mora biti isti za svaku kocku. Reći ćemo da je kocka A *bolja* od kocke B ako je, prilikom njihovog istovremenog bacanja, vjerojatnost događaja da na kocki A padne veći broj (nego na kocki B) veća od vjerojatnosti događaja da na kocki B padne veći broj (nego na kocki A). Ako nam P označava vjerojatnost, a slučajne varijable A i B brojeve pale na kockama prilikom njihovog istovremenog bacanja, tada "A je bolja od B" znači $\mathrm{P}(A > B) > \mathrm{P}(B > A)$. Slikovitije rečeno, ako dva igrača s kockama A i B igraju jedan protiv drugog, tada igrač s kockom A češće pobjeđuje igrača s kockom B, nego obratno. Analogno uspoređujemo bilo koje dvije kocke.

Konačno možemo formulirati spomenuti paradoks.

Moguće je odabrati brojeve tako da je kocka A bolja od kocke B, kocka B bolja od kocke C, a kocka C bolja od kocke A.

Naime, pretpostavimo da su na kockama napisani sljedeći brojevi.

kocka A	1	1	6	6	8	8
kocka B	3	3	5	5	7	7
kocka C	2	2	4	4	9	9

Uvjerimo se da je kocka A doista bolja od kocke B. Mogući ishodi bacanja tog para kocaka su uređeni parovi (a, b), pri čemu je a broj iz skupa $\{1, 6, 8\}$, a b broj iz skupa $\{3, 5, 7\}$. Svaka od tih vrijednosti za a ili b dolazi s istom vjerojatnosti $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Obzirom da se kocke bacaju nezavisno (jedna od druge), vjerojatnost pojavljivanja svakog od ishoda (a, b) jednaka je $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Svih 9 ishoda možemo prikazati tablicom i primijetiti da je kod njih 5 veći broj na kocki A, dok je kod njih 4 veći broj na kocki B.

kocka B

		3	5	7
kocka A	1	B	B	B
	6	A	A	B
	8	A	A	A

[1] Autorica je studentica na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: `antonia.coic@gmail.com`

[2] Autor je docent na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: `vjekovac@math.hr`

Zaključujemo $\mathrm{P}(A > B) = \dfrac{5}{9} > \dfrac{4}{9} = \mathrm{P}(B > A)$, što po definiciji znači da je kocka A bolja od kocke B. Sasvim analogno se provjeri da je B bolja od C i da je C bolja od A.

S jedne strane, prividno proturječje nalazimo u sljedećem. Očekivali bismo da postoji *najbolja* kocka između A, B i C, makar i ne bila jedinstvena, no vidjeli smo da od svake kocke postoji bolja! Zamislimo kako nam je protivnik ponudio da odaberemo jednu od kocaka A, B, C, potom on sam bira neku preostalu kocku te konačno višestruko ponavljamo istovremeno bacanje svojih kocaka, bilježeći pritom koliko je puta tko pobijedio (tj. dobio veći broj). Iz gornjeg rasuđivanja vidimo da nam nijedna kocka nije dobar izbor: za svaku kocku koju odaberemo protivnik može uzeti kocku koja je bolja u gornjem smislu, tj. gotovo sigurno dugoročno daje veći broj pobjeda. S druge strane, logičkog paradoksa zapravo nema: relacija "je bolja od" koju smo definirali naprosto nije tranzitivna. Prisjetimo se da relacija R ima svojstvo *tranzitivnosti* ako za svake x, y, z iz njezine domene vrijedi:

$$xRy \ \text{ i } \ yRz \implies xRz.$$

Mogu se smisliti brojne relacije na skupu igraćih kocaka koje jesu tranzitivne, poput "ima veći očekivani broj od", ali one nisu relevantne za opisani problem.

Sasvim usput možemo primijetiti kako je Peterson [4] prilično duhovito odabrao brojeve na kockama. Zapišemo li ih u tri reda, izbacimo li ponavljanja i presložimo li svaki red na odgovarajući način, možemo dobiti magični kvadrat!

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Lako se provjeri da su zbrojevi u svakom retku, svakom stupcu i svakoj od dvije dijagonale jednaki 15.

Vizualizacija gornjeg primjera pomoću tzv. *stabla odlučivanja* (tj. stablastog dijagrama svih mogućnosti) dana je u diplomskom radu autorice [1]. Navedeni primjer "paradoksalnih" igraćih kocaka svakako nije jedini. Može se i drukčije odabrati brojeve na trima kockama, dok su Efron i Gardner [2] ustvari razmatrali slični primjer s četiri kocke. Nedavno je Sir William Timothy Gowers obnovio interes za fenomen intranzitivih kocki pokrenuvši projekt *Polymath 13* [3], kojim se želi kvantificirati koliko česta je pojava intranzitivnosti za tri općenite igraće figure s po n strana. Riječ je o jednom od masovnih matematičkih internet projekata, čiji cilj je rješenje postavljenog problema, a svatko može sudjelovati javno iznoseći svoje ideje.

Literatura

[1] A. Čoić, *Vizualizacija vjerojatnosnih koncepata u nastavi matematike*, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2017.

[2] M. Gardner, *The paradox of the nontransitive dice*, Scientific American **223** (1970), 110–111.

[3] W. T. Gowers, *A potential new Polymath project: intransitive dice*, (2017), Gowers's Weblog, `https://gowers.wordpress.com`

[4] I. Peterson, *Tricky Dice Revisited*, (2002), Science News, `https://www.sciencenews.org`

[5] H. Steinhaus, S. Trybuła, *On a paradox in applied probabilities*, Bull. Acad. Polon. Sci. **7** (1959), 67–69.