INFORMATIKA

Kako programiranje pomaže matematici

Šimun Zlopaša[1], *Iva Golubić*[2], *Robert Pelušić*[3]

S obzirom na to da živimo u vrijeme u kojem je sve izrazitije povezivanje različitih disciplina, ovaj članak je jedan mali prilog u tom smjeru. Ponekad se prilično zahtjevni matematički zadatci kod kojih je potrebno primijeniti nestandardne načine rješavanja i koji nisu rješavani u sklopu redovite nastave, mogu riješiti uz minimalno poznavanje programiranja. Sljedećih par primjera je riješeno u Pyton-u.

Primjer 1. Odredite sve četveroznamenkaste brojeve oblika $\overline{aabb}$ koji su kvadrat prirodnog broja.

Rješenje. Za početak se može postaviti zgodno potpitanje za ljubitelje kombinatorike: koliko uopće postoji brojeva oblika $\overline{aabb}$? Zadatak se može riješiti običnim provjeravanjem. Jednostavno treba sve brojeve ovog oblika korjenovati uz pomoć kalkulatora. S obzirom na to da je kvadrat broja 31 zadnji troznamenkasti, a kvadrat od 100 je prvi peteroznamenkasti, jednostavniji i brži način rješavanja se svodi na to da provjerimo kvadrate brojeva od 32 do 99. Naravno da sve navedeno baš i nije 'matematičko rješenje'. A što bi bilo više matematički?

Očito treba riješiti diofantsku jednadžbu:

$$\overline{aabb} = \overline{cd} \cdot \overline{cd}$$

odnosno

$$1000a + 100a + 10b + b = (10c + d)(10c + d)$$

što daje

$$1100a + 11b = (10c + d)(10c + d).$$

S obzirom da je lijeva strana djeljiva s 11, očito i broj $10c + d$ mora biti djeljiv s 11. Sada imamo

$$10c + d = 11c - c + d$$

$$11 \mid (10c + d) \implies 11 \mid (d - c).$$

Kako su d i c znamenke mora biti $d - c = 0$, tj. $c = d$. U obzir dolaze brojevi 33, 44,...,99. Na kraju se provjeravanjem dobiva jedino rješenje $7744 = 88 \cdot 88$.

Programsko rješenje je (ispitujemo je li $1100a + 11b$ kvadrat prirodnog broja):

```
#prvi
from math import sqrt
for a in range(1, 10) :
  for b in range (0, 10) :
    if int(sqrt(1100*a+11*b))**2==1100*a+11*b :
      print('broj \%i' \%(1100*a+11*b))
```

[1] predavač prof. Veleučilišta Velika Gorica; e-pošta: simun.zlopasa@vvg.hr

[2] predavač prof. Veleučilišta Velika Gorica; e-pošta: iva.golubic@vvg.hr

[3] student ORS 5. godina Veleučilišta Velika Gorica; e-pošta: pelusic@gmail.com

Rezultat izvršavanja programa:

```
broj 7744
```

Primjer 2. Koliko ima uređenih parova (x, y) cijelih brojeva koji zadovoljavaju nejednakost
$$|x| + |y| \leqslant 10?$$

Rješenje. Uz malo poznavanje analitičke geometrije lako zaključujemo da se traže točke s cjelobrojnim koordinatama unutar zatvorenog kvadrata s vrhovima u točkama $(10, 0)$, $(-10, 0)$, $(0, 10)$ i $(0, -10)$.

Ako je $x = 0$, tada je očito y od -10 do 10, dakle 21 mogućnost; za $x = 1$ ili $x = -1$, tada y može biti od -9 do 9, što je 19 mogućih parova itd. Na kraju, ako je $x = 10$ ili $x = -10$, y mora biti 0.

Da bismo došli do rješenja treba zbrojiti $21 + 2 \cdot (19 + 17 + \ldots + 1)$. Zgodno je spomenuti da je veliki Gauss zbrojeve u zagradi izračunavao u dobi od pet godina. Sve u svemu, dobije se rješenje 221.

Program:

```
#drugi
ub=0
for x in range(-10, 10) :
  for y in range (-10, 10) :
    if abs(x)+abs(y) <= 10 :
      ub=ub+1
print('ukupno parova \%i' \%ub)
```

Rezultat:

```
ukupno parova 221
```

Primjer 3. Koliko ima prirodnih brojeva $\overline{abc}$ za koje vrijedi
$$\overline{abc} = a + b + c + ab + ac + bc + abc?$$

Rješenje. Raspisivanjem gornje jednadžbe dobijemo
$$100a + 10b + c = a + b + c + ab + ac + bc + abc$$
i daljnjim sređivanjem dolazimo redom do
$$99a + 9b = ab + ac + bc + abc$$
$$99a + 9b = a(b + c + bc) + bc.$$
Kako su a, b, c znamenke, imamo
$$b + c + bc \leq 99$$
$$bc \leq 9b.$$
Kako u oba slučaja mora vrijediti jednakost mora biti
$$bc = 9b$$
$$b + c + bc = 99$$
odakle slijedi $c = 9$ i $b = 9$.

Dakle rješenje su brojevi 199, 299, ..., 999 i ima ih 9.

Programsko rješenje je:

```
#treći
ub=0
for a in range(1, 10) :
  for b in range (0, 10) :
    for c in range (0, 10) :
      if 100*a+10*b+c==a+b+c+a*b+a*c+b*c+a*b*c :
        ub=ub+1
        print(100*a+10*b+c)
print('ukupno brojeva \%i' \%ub)
```

Rezultati:

```
199
299
399
499
599
699
799
899
999
ukupno brojeva 9
```

Primjer 4. Koliko ima troznamenkastih brojeva za koje vrijedi da kada znamenku jedinica prebacimo na mjesto stotice dobijemo tri puta veći broj?

Rješenje. Kao i u prethodnom primjeru zadatak se svodi na rješavanje diofantske jednadžbe koja u ovom slučaju glasi

$$3\overline{xyz} = \overline{zxy}. \qquad (*)$$

Zadatak se može riješiti na više načina od kojih će biti prikazana dva. Prvi način je korištenje svojstva djeljivosti.

S obzirom na to da je lijeva strana u $(*)$ djeljiva s 3, znači da je s 3 djeljiva i desna strana, a to znači da je zbroj znamenki $x + y + z$ djeljiv s 3, pa je $3\overline{xyz}$ djeljivo s 9. Dakle, i desna strana je djeljiva s 9, što znači da je i zbroj znamenki djeljiv s 9.

Nadalje, ako promotrimo $(*)$ zaključujemo da x mora biti veći ili jednak 1, a manji ili jednak 3, a z mora biti veći ili jednak 3. Na sličan način dolazimo do toga da ako je $x = 1$, z mora biti manji ili jednak od 5; za $x = 2$, z mora biti veći ili jednak od 6, a manji ili jednak od 8 i za $x = 3$, z mora biti jednak 9.

Provjeravajući sada brojeve koji zadovoljavaju ove uvjete dolazimo do brojeva 153, 144, 135, 216, 207, 288, 379. Na kraju se provjeravanjem utvrdi da niti jedan od navedenih brojeva ne zadovoljava $(*)$.

Drugi način je znatno jednostavniji. Jednadžbu $(*)$ napišimo u obliku

$$300x + 30y + 3z = 100z + 10x + y$$

odnosno

$$290x + 29y = 97z.$$

Odavde dijeljenjem s 29 dobivamo da je z djeljiv s 29, tj. $z = 0$, jer je ovo znamenka. Dakle, $y = -10x$, što znači da je $x = y = 0$. Dakle, broj s traženim svojstvom ne postoji.

Programsko rješenje je i u ovom slučaju znatno manje zahtjevno i potrebna je samo mala modifikacija nekog od prethodnih programa.

```
#četvrti
ub=0
for x in range(1, 10) :
  for y in range (0, 10) :
    for z in range (0, 10) :
      if 300*x+30*y+3*z==100*z+10*x+y :
        ub=ub+1
        print(100*x+10*y+z)
print('ukupno brojeva \%i' \%ub)
```

Rezultat izvršenja programa:

```
ukupno brojeva 0
```

Zadatci za samostalan rad

1. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva koji pri dijeljenju sa 66 daju ostatak 14, a pri dijeljenju sa 77 ostatak 55? (Rješenje: 0.)
(Dokažite matematički da tvrdnja zadatka vrijedi.)
2. Koliko ima uređenih trojki (a, b, c) cijelih brojeva za koje vrijedi $5 < |a| + |b| + |c| < 10$? (Rješenje: 928.)

Zaključak

Naravno da programsko rješenje nije isto što i matematičko, ali u nekim slučajevima program može pomoći u utvrđivanju da li rješenje uopće postoji i da nam pomogne u kojem smjeru ga tražiti. Povremena i mala vježba programiranja nikako nije na odmet.