ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. svibnja 2018. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 1/273.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 216.

A) Zadatci iz matematike

3623. Dokaži da za duljine kateta a, b i duljinu hipotenuze c pravokutnog trokuta vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geq c\sqrt{2}.$$

3624. Neka je n pozitivan cijeli broj. Dokaži da su brojevi $n!+1$ i $(n+1)!+1$ relativno prosti.

3625. Nađi sve parove (x,y) cijelih brojeva takve da je

$$1+2016x+2018y=xy.$$

3626. Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$x^{10}-x^8+8x^6-24x^4+32x^2-48=0.$$

3627. Dokaži da se za $x,y,z>1$ iz jednakosti

$$\frac{x(y+z-x)}{\log x}=\frac{y(z+x-y)}{\log y}=\frac{z(x+y-z)}{\log z}$$

dobiva

$$x^y y^x=y^z z^y=x^z z^x.$$

3628. Ako su dijagonale četverokuta okomite, dokaži da su i dijagonale svakog četverokuta s istim duljinama stranica, međusobno okomite.

3629. Dijagonale četverokuta $ABCD$ sijeku se u točki K, pričem vrijedi $P_{ABK}^2+P_{CDK}^2=P_{BCK}^2+P_{ADK}^2$. Dokaži da je K polovište barem jedne od dijagonala.

3630. U pravokutnik $ABCD$ upisan je trokut AEK tako da je E na $\overline{BC}$ i K na $\overline{CD}$. Odredi $\operatorname{tg}\sphericalangle KAE$ ako je

$$\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|BE|}{|CE|}=\frac{|CK|}{|DK|}=m.$$

3631. Dužina $\overline{BD}$ je težišnica trokuta ABC. Odredi omjer polumjera trokutu ABC opisane kružnice i polumjera trokutu ABD upisane kružnice, ako je $|AB|=2$, $|AC|=6$, $\sphericalangle BAC=60^\circ$.

3632. Neka je ABC trokut sa stranicama duljina a, b, c i nasuprotnim kutovima α, β, γ. Ako je $\alpha=3\beta$, dokaži

$$(a-b)^2(a+b)=bc^2.$$

3633. Neka su A, B, C tri točke na kružnici, P, Q, R polovišta lukova $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$, tim redom. Dužine $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$ sijeku stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ redom u točkama L, M, N. Dokaži nejednakost

$$\frac{|AL|}{|PL|}+\frac{|BM|}{|QM|}+\frac{|CN|}{|RN|}\geq 9.$$

3634. Odredi kartezijeve koordinate vrhova A, B, C trokuta ABC čiji je ortocentar $H(-3,10)$, središte opisane kružnice $O(-2,-3)$ i polovište stranice $\overline{BC}$ je $D(1,3)$.

3635. Dana je funkcija $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ takva da je $f(1)=1$ i za svako $x\in\mathbf{R}$ vrijedi

$$f(x+5)\geq f(x)+5$$

i

$$f(x+1)\leq f(x)+1.$$

Koliko je $f(2018)$?

3636. Sfera je opisana oko pravilne četverostrane piramide. Odredi površinu sfere ako je stranica baze piramide jednaka a i ravninski kut pri vrhu piramide je α.

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 434. Tri dječaka se ljuljaju na dasci koja ima oslonac točno u sredini. Marko ima masu 60 kilograma i sjedi 2.5 metara od oslonca. Na drugoj strani su Filip i Lovro. Filip ima masu 30 kilograma i sjedi na kraju daske. Lovrina je masa 40 kilograma i sjedi točno na sredini između oslonca i Filipa. Ako Filip i Lovro zamijene mjesta kamo mora sjesti Marko da bi se i dalje mogli ljuljati?

OŠ – 435. Duljina plovnog puta na rijeci Savi od Zagreba do Siska iznosi 68 kilometara. Brod je iz Zagreba krenuo u 7 sati ujutro i stigao u Sisak u deset sati. Za povratak mu je trebalo isto vrijeme, ali je motor razvijao veću snagu nego u dolasku jer je plovio protiv struje. Brzina vode iznosila je 2 metra u sekundi. Koliko bi trajao povratak da je brod zadržao istu snagu kao pri dolasku?

OŠ – 436. Radnik je pomoću nepomične koloture podizao teret mase 20 kilograma. Kad je teret bio na visini 4.5 metara radniku je uže skliznulo iz ruke i teret je, za točno jednu sekundu, pao na tlo. Kolika je sila trenja između užeta i koloture?

OŠ – 437. Gumena lopta nakon drugog odskoka od podloge dosegne polovicu visine s koje je ispuštena. Koliki se postotak kinetičke energije pri svakom odskoku pretvori u unutarnju energiju?

1665. Dana 2. 2. 2018. sonda *Voyager 1* nalazila se 141.1 astronomsku jedinicu udaljena od Sunca i udaljavala se brzinom $16\,984$ m/s. Odredi asimptotsku brzinu kojom će se letjelica udaljavati kada gravitacijski potencijal Sunca postane zanemariv. Masa Sunca je $1.989 \cdot 10^{30}$ kg, a astronomska jedinica iznosi $1.496 \cdot 10^{11}$ m.

1666. Plemeniti plin kripton ima volumni udio 0.000114% u suhom zraku. Kolika se masa kriptona nalazi u prostoriji oblika kvadra dimenzija $3\text{ m} \times 4\text{ m} \times 4\text{ m}$? Koliko tamo ima atoma kriptona? Uzmimo da je gustoća zraka 1.2 kg/m^3.

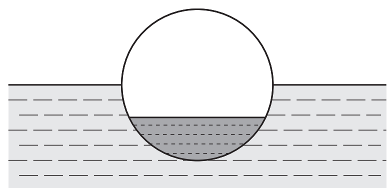
1667. Na asteroidu oblika kugle odlomio se komad stijene 25 metara iznad ravne površine. Ako je pad stijene na ravnu površinu trajao 11 sekundi, a asteroid ima prosječnu gustoću 2900 kg/m^3, odredi masu i radijus asteroida.

1668. Tanka konvergentna leća ima jačinu +5 dpt u zraku i +1.75 dpt u vodi indeksa loma 4/3. Koliki je indeks loma materijala leće? Kolika će biti njena jačina u benzenu, indeksa loma 1.501?

1669. Ako kondenzator priključimo vodljivim žicama na bateriju napona 3.7 V, u trenutku priključenja poteći će struja 10 A, a 0.1 sekundu kasnije struja će iznositi 0.1 A. Koliki je kapacitet kondenzatora? Koliki je ohmski otpor strujnog kruga? Kolika je energija pohranjena u kondenzatoru kad ga baterija napuni?

1670. Tijelo ubrzava niz kosinu akceleracijom $g/3$, gdje je g ubrzanje slobodnog pada. Nakon što se iz stanja mirovanja spusti 2.3 m (visinske razlike), na trenje se potroši 43% početne (potencijalne) energije. Odredi koeficijent trenja tijela s kosinom i nagib kosine.

1671. Čelična plutača oblika šuplje kugle ima vanjski volumen 28 litara i debljinu stijenke 1 mm. Koliko je vode ušlo u plutaču ako je do pola uronjena u vodu? Gustoća vode iznosi 1 kg/l, a čelika 7.85 kg/l.



C) Rješenja iz matematike

3595. *Riješi jednadžbu*

$$\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4.$$

Rješenje. Prvo kvadriramo jednadžbu:

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}\right)^2=16$$

$$x+\sqrt{x^2-x-11}=8$$

$$\sqrt{x^2-x-11}=8-x.$$

Ponovno kvadriramo:

$$x^2-x-11=64-16x+x^2$$

$$x=5.$$

Uvrstimo u početnu jednadžbu kao provjeru:

$$\sqrt{5+\sqrt{16}}+\sqrt{5-\sqrt{16}}=\sqrt{9}+\sqrt{1}$$

$$=3+1=4.$$

Maja Drmač (2),
XV. gimnazija, Zagreb

3596. *Odredi sve realane brojeve p tako da nejednakost*

$$-2 < \frac{x^2 + 2px - 2}{x^2 - 2x + 2} < 2$$

vrijedi za svaki realan broj x.

Rješenje. Nazivnik razlomka je, kad se faktorizira, $(x-1)^2 + 1$, što je uvijek veće od 0. Nejednakost možemo pomnožiti s time pa dobijemo:

$$-2(x^2-2x+2) < x^2+2px-2 < 2(x^2-2x+2).$$

Nejednakost možemo podijeliti na dva dijela:

1°

$$-2(x^2 - 2x + 2) < x^2 + 2px - 2$$

$$3x^2 + x(2p-4) + 2 > 0.$$

Na lijevoj strani je kvadratna funkcija, nazovimo je $f(x)$. Kako $f(x)$ uvijek mora biti veća od 0, to znači da ne smije imati realne nultočke, odnosno diskriminanta je strogo manja od 0:

$$(2p-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 < 0$$

$$(p-2)^2 < 6 \quad \Big/\sqrt{}$$

$$|p-2| < \sqrt{6}$$

$$-\sqrt{6} < p - 2 < \sqrt{6}$$

$$p \in (2-\sqrt{6}, 2+\sqrt{6}).$$

2°

$$x^2 + 2px - 2 < 2(x^2 - 2x + 2)$$

$$-x^2 + x(2p+4) - 6 < 0$$

Kao i u 1. dijelu, na lijevoj strani je kvadratna funkcija. Kako bi uvijek bila manja od 0, ne smije imati realne nultočke, odnosno diskriminanta je manja od 0:

$$(2p+4)^2 - 4 \cdot 6 < 0$$

$$(p+2)^2 < 6 \quad \Big/\sqrt{}$$

$$|p+2| < \sqrt{6}$$

$$-\sqrt{6} < p + 2 < \sqrt{6}$$

$$p \in (-2-\sqrt{6}, \ -2+\sqrt{6}).$$

Presjek tih rješenja je:

$$p \in (2-\sqrt{6}, \ \sqrt{6}-2).$$

Maja Drmač (2), Zagreb

3597. *Za pozitivne realne brojeve a, b, c, d dokaži nejednakost*

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

Rješenje. Stavimo

$$S_1 = b + 2c + 3d, \quad S_2 = c + 2d + 3a,$$
$$S_3 = d + 2a + 3b, \quad S_4 = a + 2b + 3c.$$

Tada je

$$a = \frac{-5S_1 + 7S_2 + S_3 + S_4}{24}$$
$$b = \frac{-5S_2 + 7S_3 + S_4 + S_1}{24}$$
$$c = \frac{-5S_3 + 7S_4 + S_1 + S_2}{24}$$
$$d = \frac{-5S_4 + 7S_1 + S_2 + S_3}{24},$$

i početna nejednakost je ekvivalntna s

$$\frac{-5S_1 + 7S_2 + S_3 + S_4}{24S_1} + \frac{-5S_2 + 7S_3 + S_4 + S_1}{24S_2} + \frac{-5S_3 + 7S_4 + S_1 + S_2}{24S_3} + \frac{-5S_4 + 7S_1 + S_2 + S_3}{24S_4} \geq \frac{2}{3}.$$

Lijevu stranu prethodne nejednakosti grupirajmo na sljedeći način:

$$-\frac{20}{24} + \frac{7}{24}\left(\frac{S_2}{S_1} + \frac{S_3}{S_2} + \frac{S_4}{S_3} + \frac{S_1}{S_4}\right) + \frac{1}{24}\left(\frac{S_3}{S_1} + \frac{S_4}{S_2} + \frac{S_1}{S_3} + \frac{S_2}{S_4}\right) + \frac{1}{24}\left(\frac{S_4}{S_1} + \frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_4}\right).$$

Primjenom A-G nejednakosti na svaku od triju grupiranih zagrada, vidimo da je prethodni izraz veći ili jednak

$$-\frac{5}{6} + \frac{7}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

što je i trebalo dokazati.

Danica Petolas (1), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3598. *Ako je* $0 < a < b < c$ *pokaži da vrijedi*

$$\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a) > 0.$$

Prvo rješenje. Napomena. Zadatak je krivo zadan, uvjet $1 < a$ je nužan jer npr. za $0 < a < 1 < b < c$ je $\log_c a < 0$ i onda $\log_c(\log_c a)$ nije definirano.

$$\log_b(\log_b c) = \frac{\log_a(\log_b c)}{\log_a b} = \frac{\log_a\left(\dfrac{\log_a c}{\log_a b}\right)}{\log_a b} = \log_a\left[\left(\frac{\log_a c}{\log_a b}\right)^{\frac{1}{\log_a b}}\right]$$

$$\log_c(\log_c a) = \frac{\log_a\left(\dfrac{1}{\log_a c}\right)}{\log_a c} = \log_a\left[(\log_a c)^{-\frac{1}{\log_a c}}\right]$$

Sada je

$$\log_a(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_c(\log_c a)$$
$$= \log_a\left[(\log_a b)^{1-\frac{1}{\log_a b}}(\log_a c)^{\frac{1}{\log_a b}-\frac{1}{\log_a c}}\right] > 0$$

jer je $1 < \log_a b < \log_a c$ i onda

$$1 - \frac{1}{\log_a b} > 0, \quad \frac{1}{\log_a b} - \frac{1}{\log_a c} > 0.$$

Danica Petolas (1), Zagreb

Drugo rješenje. Kako je $\log_a b > 1$, slijedi $\log_a(\log_a b) > \log_b(\log_a b)$.

Kako je $\log_c a < 1$, slijedi $\log_c(\log_c a) > \log_b(\log_c a)$.

Lijeva strana dane nejednakosti je veća od:

$$\log_b(\log_a b) + \log_b(\log_b c) + \log_b(\log_c a)$$
$$= \log_b(\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a)$$
$$= \log_b 1 = 0.$$

Time je tvrdnja dokazana.

Ur.

3599. *Ako jedna stranica kvadrata leži na pravcu* $y = 2x - 17$*, a druga dva vrha su na paraboli* $y = x^2$*, odredi njegovu minimalnu površinu.*

Rješenje. Označimo kvadrat s $ABCD$. Pretpostavimo da stranica $\overline{AB}$ leži na pravcu $y = 2x-17$ i neka su druga dva vrha $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$. Tada je stranica $\overline{CD}$ na pravcu $y = 2x + b$. Kako su te točke na paraboli $y = x^2$ dobivamo:

$$x^2 = 2x + b.$$

tj.

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+b}$$
$$y_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1+b})^2 = 2 + b \pm 2\sqrt{1+b}.$$

Neka je a duljina stranice kvadrata. Tada je $a = |CD|$, tj.

$$a^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = 20(b+1) \quad (1)$$

Uzmimo točku $(6, -5)$ na pravcu $y = 2x-17$. Udaljenost te točke od pravca $y = 2x + b$, tj. $2x - y + b = 0$ je:

$$a = \frac{|2 \cdot 6 - (-5) + b|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|17+b|}{\sqrt{5}}. \quad (2)$$

Iz (1) i (2) imamo:

$$20(b+1) = \frac{(17+b)^2}{5}$$

tj.

$$b^2 - 66b + 189 = 0.$$

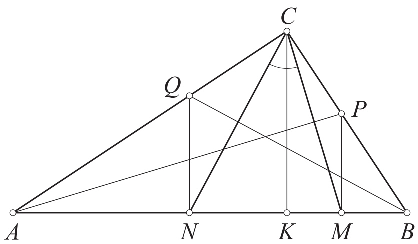
Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $b_1 = 3$, $b_2 = 63$ tj. $a_1^2 = 80$, $a_2^2 = 1280$.

Dakle, minimalna površina je $a^2 = 80$.

Ahmedin Hasanović (3),
Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH

3600. *Dan je pravokutan trokut* ABC *s pravim kutom u vrhu* C*. Simetrale kutova* $\sphericalangle BAC$ *i* $\sphericalangle ABC$ *sijeku stranice* $\overline{BC}$ *i* $\overline{CA}$ *u točkama* P *i* Q*, tim redom. Neka su* M *i* N *nožišta okomica iz* P *i* Q *na* $\overline{AB}$*, tim redom. Koliki je kut* $\sphericalangle MCN$*?*

Rješenje. Neka je $\overline{CK}$ visina iz C. Trokuti ACP i AMP ($\sphericalangle CAP = \sphericalangle MAP$, $\sphericalangle ACP = \sphericalangle AMP = 90^\circ$ i $\overline{AP}$ je zajednička stranica) su sukladni i $|CP| = |MP|$. Nadalje $\sphericalangle MCP = \sphericalangle PMC = \sphericalangle MCK$ (zbog $CK \parallel PM$). Slično je $\sphericalangle NCQ = \sphericalangle NCK$. Dakle, $\sphericalangle MCN = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = 45^\circ$.



Sandro Paradžik (1),
Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH

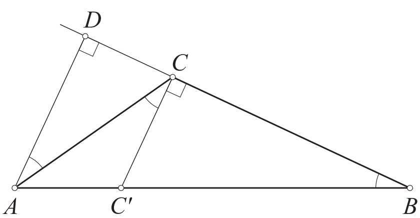
3601. *U trokutu ABC vrijedi* $\measuredangle BCA - \measuredangle ABC = 90^\circ$. *Dokaži jednakost*

$$\frac{1}{|AB|^2} + \frac{1}{|AC|^2} = \frac{1}{|AD|^2},$$

gdje je D nožište okomice iz vrha A na pravac BC.

Rješenje. Iz sličnosti pravokutnih trokuta ABD i CAD imamo $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|AD|}{|CD|}$, a odavde je

$$|CD| = \frac{|AC| \cdot |AD|}{|AB|}. \qquad (1)$$



Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut ACD imamo

$$|AC|^2 = |CD|^2 + |AD|^2. \qquad (2)$$

Iz jednakosti (1) i (2) slijedi tražena relacija.

Selma Džebo (3),
Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH

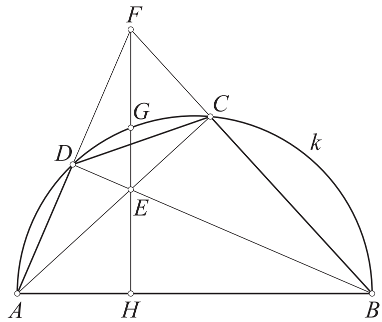
3602. *Konveksan četverokut ABCD upisan je u polukružnicu k kojoj je* $\overline{AB}$ *dijametar. Pravci AC i BD sijeku se u točki E, a pravci AD i BC u F. Pravac EF siječe polukružnicu k u G i pravac AB u H. Dokaži da je E polovište dužine* $\overline{GH}$ *ako i samo ako je G polovište od* $\overline{FH}$.

Rješenje. Kako su $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ visine trokuta ABF, E je ortocentar tog trokuta, pa je FE okomit na AB. Trokuti HEB i HAF su slični pa vrijedi

$$\frac{|HE|}{|HA|} = \frac{|HB|}{|HF|}.$$

Dakle,

$$|HE| \cdot |HF| = |HA| \cdot |HB| = |HG|^2,$$



Odatle slijedi tvrdnja zadatka tj.

$$|HE| = |EG| \iff |HE| = \frac{1}{2}|HG|$$
$$\iff \frac{1}{2}|HF| = |HG|.$$

Sandro Paradžik (1), Sarajevo, BiH

3603. *Neka je* α *šiljasti kut romba ABCD u vrhu A i* φ *kut pod kojim se iz polovišta stranice* $\overline{AB}$ *vidi nasuprotna stranica romba. Dokaži jednakost* $4\sin\alpha = 3\operatorname{tg}\varphi$.

Rješenje. Koristeći kosinusov poučak dobivamo:

u trokutu APD:

$$|DP|^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a^2\cos\alpha$$

u trokutu BCP:

$$|PC|^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - a^2\cos(180^\circ - \alpha)$$
$$= a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2\cos\alpha$$

tj. sve zajedno

$$|DP|^2 + |PC|^2 = \frac{5}{2}a^2. \qquad (*)$$

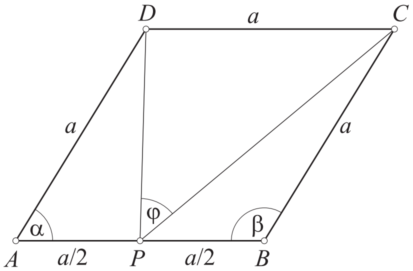
Iz trokuta PCD dobivamo

$$a^2 = |DP|^2 + |PC|^2 - 2 \cdot |DP| \cdot |PC| \cdot \cos\varphi$$

Iz $(*)$ dobivamo:

$$|DP| \cdot |PC| = \frac{3a^2}{4\cos\varphi}. \qquad (**)$$

Površina romba je jednaka: $P = a^2 \sin\alpha$ ili $P = P_{APD} + P_{PBC} + P_{PCD}$.



Sustavom ovih dviju jednadžbi dobivamo:

$$a^2 \sin\alpha = \frac{a^2 \sin\alpha}{4} + \frac{a^2 \sin(180^\circ - \alpha)}{4} + \frac{|DP| \cdot |PC| \cdot \sin\varphi}{2}.$$

Budući da je $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, te nakon uvrštavanja $(**)$, dobivamo:

$$a^2 \sin\alpha = \frac{a^2 \sin\alpha}{4} + \frac{a^2 \sin\alpha}{4} + \frac{\frac{3a^2}{4\cos\varphi} \cdot \sin\varphi}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{2} + \frac{\frac{3}{4\cos\varphi} \cdot \sin\varphi}{2}.$$

Ovime dolazimo do jednakosti koju smo trebali dokazati:

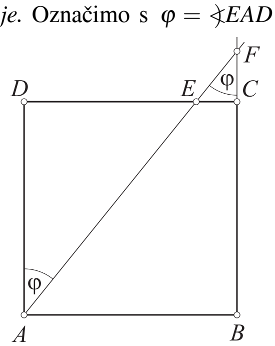
$$4\sin\alpha = 3\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Valentina Babić (4),
SŠ Zlatar, Zlatar

3604. *Pravac prolazi vrhom A kvadrata $ABCD$ i siječe stranicu $\overline{CD}$ u točki E te pravac BC u F. Dokaži jednakost*

$$\frac{1}{|AE|^2} + \frac{1}{|AF|^2} = \frac{1}{|AB|^2}.$$

Rješenje. Označimo s $\varphi = \sphericalangle EAD$.



Tada imamo

$$|AE| = \frac{|AD|}{\cos\varphi} = \frac{|AB|}{\cos\varphi}$$

i

$$|AF| = \frac{|AB|}{\sin\varphi}.$$

Sada je

$$\frac{1}{|AE|^2} + \frac{1}{|AF|^2} = \frac{1}{|AB|^2}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \frac{1}{|AB|^2}.$$

Hamza Begić (3),
Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH

3605. *Riješi diofantsku jednažbu*

$$63x + 70y + 75z = 91.$$

Rješenje.

$$63x + 70y = 91 - 75z \implies 9x + 10y = 13 - 75\frac{z}{7}.$$

Dakle, mora biti $z = 7k$, $k \in \mathbf{Z}$. Sada treba riješiti diofantsku jednadžbu

$$9x + 10y = 13 - 75k.$$

Brojevi 9 i 10 su relativno prosti i jedno, partikularno rješenje, prethodne jednadžbe je

$$(x_0, y_0) = (-3 - 5k, 4 - 3k).$$

Dakle, sva rješenja te jednadžbe su

$$x = -3 - 5k + 10m,\ y = 4 - 3k - 9m,\ m \in \mathbf{Z}.$$

Dakle, sva rješenja zadane diofantske jednadžbe su

$$(x, y, z) = (-3 - 5k + 10m, 4 - 3k - 9m, 7k), \quad k, m \in \mathbf{Z}.$$

Danica Petolas (1), Zagreb

3606. *Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \ldots + \binom{2n+1}{n} = 4^n.$$

Rješenje.

$$\binom{2n+1}{0}+\binom{2n+1}{1}+\ldots+\binom{2n+1}{n}$$
$$+\binom{2n+1}{n+1}+\ldots+\binom{2n+1}{2n+1}=(1+1)^{2n+1}.$$

Koristeći svojstvo simetrije

$$\binom{2n+1}{k}=\binom{2n+1}{2n+1-k}$$

dobivamo:

$$\binom{2n+1}{0}+\binom{2n+1}{1}+\ldots+\binom{2n+1}{n}$$
$$+\binom{2n+1}{n}+\ldots+\binom{2n+1}{0}=2^{2n+1}$$

tj.

$$\binom{2n+1}{0}+\binom{2n+1}{1}+\ldots+\binom{2n+1}{n}=4^n.$$

Valentina Babić (4), Zlatar

3607. *Nađi maksimum funkcije*

$$f(x)=3\sin\left(x+\frac{\pi}{9}\right)+5\sin\left(x+\frac{4\pi}{9}\right)$$

na skupu realnih brojeva.

Rješenje.

$$f(x)=3\sin x\cos\frac{\pi}{9}+3\sin\frac{\pi}{9}\cos x$$
$$+5\sin x\cos\frac{4\pi}{9}+5\sin\frac{4\pi}{9}\cos x$$
$$=\sin x\left(3\cos\frac{\pi}{9}+5\cos\frac{4\pi}{9}\right)$$
$$+\cos x\left(3\sin\frac{\pi}{9}+5\sin\frac{4\pi}{9}\right).$$

Označimo:

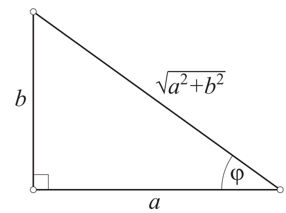
$$a=3\cos\frac{\pi}{9}+5\cos\frac{4\pi}{9};\ a>0$$
$$b=3\sin\frac{\pi}{9}+5\sin\frac{4\pi}{9};\ b>0.$$

Sada je

$$f(x)=a\sin x+b\cos x=a\left(\sin x+\frac{b}{a}\cos x\right)$$
$$\left(\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi,\quad 0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f(x)=\frac{a}{\cos\varphi}\cdot\sin(x+\varphi).$$

Maksimum ove funkcije je $\dfrac{a}{\cos\varphi}$.

S obzirom da je $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$, nacrtajmo pravokutni trokut



$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

tj.

$$\frac{a}{\cos\varphi}=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$=\sqrt{\left(3\cos\frac{\pi}{9}+5\cos\frac{4\pi}{9}\right)^2+\left(3\sin\frac{\pi}{9}+5\sin\frac{4\pi}{9}\right)^2}$$
$$=\sqrt{9+25+30\cos\frac{\pi}{3}}=7$$

Maksimalna vrijednost funkcije je 7.

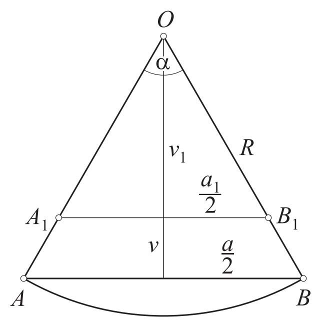
Valentina Babić (4), Zlatar

3608. *Dan je kružni isječak $O\overset{\frown}{AB}$ polumjera R i vršnog kuta $\alpha<\pi$ radijana. Odredi visinu jednakokračnog trokuta OA_1B_1, gdje je $A_1\in\overline{OA}$ i $B_1\in\overline{OB}$ tako da je njegova površina jednaka polovini površine isječka.*

Rješenje. Površina kružnog isječka je

$$P=R^2\pi\cdot\frac{\alpha}{2\pi}=\frac{R^2\alpha}{2}.\qquad(1)$$

Površina trokuta OA_1B_1 je $P_1=\dfrac{1}{2}a_1v_1$.



Iz sličnosti trokuta OAB i OA_1B_1 je

$$\frac{v}{v_1} = \frac{a}{a_1} \implies a_1 = \frac{av_1}{v}.$$

Sada je

$$P_1 = \frac{av_1^2}{2v}.$$

Nadalje,

$$\frac{a}{2} = R\sin\frac{\alpha}{2}, \quad v = R\cos\frac{\alpha}{2}$$

tj.

$$P_1 = R\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{v_1^2}{R\cos\frac{\alpha}{2}} = v_1^2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} \qquad (2)$$

Kako je $P_1 = \frac{1}{2}P$ imamo

$$v_1^2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}R^2\alpha$$

tj.

$$v_1 = \frac{R}{2}\sqrt{\alpha\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}}.$$

Berina Biberović (4),
Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 426. *Majstor Stjepan je otišao u trgovinu po zidne pločice za kupaonicu koju obnavlja. U trgovini nije mogao naći papir na koji je zapisao dimenzije zidova. Pomoglo mu je kad se sjetio da je na pod kupanice po duljini postavljao 12, a po širini 8 kvadratnih pločica brida 30 centimetara. Znao je i da je zid kupanice visok 2.8 metara. Na zidove treba postaviti pločice dugačke 40, a široke 30 centimetara. Koliko je takvih pločica majstor kupio?*

Rješenje.

$n_1 = 12$

$a_1 = 30$ cm

$n_2 = 8$

$c = 2.8$ cm

$a_2 = 40$ cm

$\underline{b_2 = 30 \text{ cm}}$

$n = ?$

Duljina jednog zida je

$$a = n_1 \cdot a_1 = 12 \cdot 30 \text{ cm} = 360 \text{ cm} = 3.6 \text{ m},$$

a duljina drugoga

$$b = n_2 \cdot a_1 = 8 \cdot 30 \text{ cm} = 240 \text{ cm} = 2.4 \text{ m}.$$

Ploština dva zida duljine a i visine c jednaka je $2ac$, a dva zida duljine b i visine c jednaka je $2bc$, pa je ukupna ploština zidova kupaonice

$$\begin{aligned} A &= 2(ac + bc) \\ &= 2 \cdot (3.6 \text{ m} \cdot 2.8 \text{ m} + 2.4 \text{ m} \cdot 2.8 \text{ m}) \\ &= 33.6 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Ploština jedne pločice jednaka je

$$\begin{aligned} A_2 &= a_2 \cdot b_2 \\ &= 40 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm} = 1200 \text{ cm}^2 = 0.12 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Broj pločica jednak je:

$$n = \frac{A}{A_2} = \frac{33.6}{0.12}\,\frac{\text{m}^2}{\text{m}^2} = 280.$$

Borna Cesarec (8),
OŠ Augusta Cesarca, Krapina

OŠ – 427. *U kabinetu za fiziku su dvije metalne kocke iste veličine. Učenik za jednu zna da je od željeza. Nastavnica mu je zadala da pomoću ravnala i tablice s podacima o gustoćama različitih tvari odredi od kojeg je metala druga kocka. Učenik je uravnotežio ravnalo oslonjeno u sredini pomoću tih kocaka i pri tome izmjerio da je željezna kocka od oslonca udaljena 9.5 centimetara, a ona od nepoznatog metala 6.6 centimetara. Od kojeg je metala napravljena druga kocka? (Uputa: koristiti tablice s podacima o gustoćama tvari.)*

Rješenje.

$V_1 = V_2 = V$

$k_1 = 9.5$ cm

$k_2 = 6.6$ cm

$\underline{\rho_1 = 7900 \text{ kg/m}^3}$

$\rho_2 = ?$

$F_1 \cdot k_1 = F_2 \cdot k_2$

$m_1 g k_1 = m_2 g k_2$

$\rho_1 \cdot V \cdot k_1 = \rho_2 \cdot V \cdot k_2$

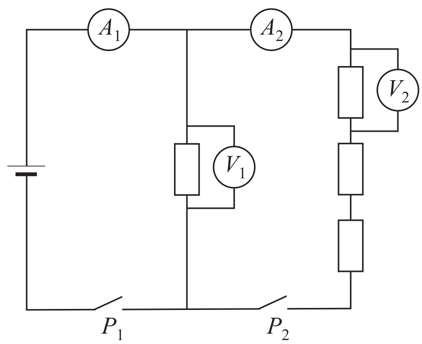
$\rho_1 \cdot k_1 = \rho_2 \cdot k_2$

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 \cdot k_1}{k_2} = \frac{7900\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.5\ \text{cm}}{6.6\ \text{cm}}$$
$$= 11\,371\ \text{mkg/m}^3.$$

Druga je kocka napravljena od olova.

Fran Vidović (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 428. *Svi otpornici na shemi su jednaki. Napon izvora je 30 volta. Kad je zatvoren samo prekidač P_1 ampermetar A_1 mjeri struju od 600 miliampera. Koliko će pokazivati svi instrumenti kad se zatvori i drugi prekidač?*



Rješenje.

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$$
$$U = 30\ \text{V}$$
$$\underline{I = 600\ \text{mA} = 0.6\ \text{A}}$$
$$U_1,\ U_2,\ I_1,\ I_2 = ?$$

Kad se zatvori drugi prekidač struja će teći i kroz granu s tri otpornika. Svaki će od njih dobiti trećinu napona izvora pa će voltmetar V_2 mjeriti napon od 10 volta. Struja će u toj grani biti tri puta manja zbog tri puta većeg otpora i ampermetar A_2 mjeri struju od 0.2 ampera.

U lijevoj grani napon ostaje isti i volmetar mjeri 30 volta, struja u njoj je i dalje 0.6 ampera, a ampermetar A_1 koji mjeri struju u glavnom vodu mjeri zbroj struja u obje grane i pokazuje 0.8 ampera. Dakle,

$$I_1 = 0.8\ \text{A}$$
$$I_2 = 0.2\ \text{A}$$
$$U_1 = 30\ \text{V}$$
$$U_2 = 10\ \text{V}.$$

Filip Vuletić-Antić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 429. *Traktor vuče prikolicu mase 1.1 tonu. Faktor trenja na terenu po kojem vozi je oko 0.1. Kolika je ukupna masa tereta koji se smije natovariti u prikolicu ako maksimalna vučna sila traktora iznosi 8000 njutna?*

Rješenje.

$$m_1 = 1.1 = 1100\ \text{kg}$$
$$\mu = 0.1$$
$$\underline{F_v = 8000\ \text{N}}$$
$$m_2 = ?$$
$$F_v = F_{tr}$$
$$F_{tr} = \mu \cdot G$$
$$G = \frac{F_{tr}}{\mu} = \frac{8000\ \text{N}}{0.1} = 80\,000\ \text{N}.$$

Težina prikolice i tereta na njoj je $80\,000$ N.

Ukupna masa koju traktor može vući je:

$$m_{uk} = \frac{G_2}{g} = \frac{80\,000\ \text{N}}{10\ \text{N/kg}} = 8000\ \text{kg}.$$
$$m_2 = m_{uk} - m_1 = 8000\ \text{kg} - 1100\ \text{kg}$$
$$= 6900\ \text{kg}.$$

Lorena Ivanišević (8),
OŠ Horvati, Zagreb

1651. *Točkasti izotropni izvor svjetlosti je udaljen od zida 80 cm. Pomoću tanke konvergentne leće indeksa loma 1.55 na polovici udaljenosti između izvora i zida dobijemo oštru sliku. Koja je jačina leće? Ako je leća kružnog oblika, promjera 8 cm i zanemarive debljine na rubovima, kolika je debljina leće u sredini? Koliki se postotak svjetla izvora leća fokusira na zid?*

Rješenje. Jačinu leće dobijemo iz jednadžbe leće u koju uvrstimo $a = b = 40$ cm:

$$J = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{0.4 \text{ m}} = 5 \text{ dpt.}$$

Ako pretpostavimo da je leća plankonveksna (oblik ne utječe na debljinu u sredini), radijus zakrivljenosti sfernog dioptra izračunamo iz

$$J = \frac{n-1}{R}$$

$$R = \frac{0.55}{5} = 0.11 \text{ m} = 11 \text{ cm.}$$

Iz pravokutnog trokuta koji povezuje središte leće, rub leće i središte zakrivljenosti, uvrstimo R i izračunamo debljinu d:

$$R^2 = (R-d)^2 + (4 \text{ cm})^2$$

$$d^2 - 22d + 16 = 0$$

$$d = 11 - \sqrt{105} = 0.753 \text{ cm.}$$

Gledano iz izvora, leća zauzima prostorni kut $2\pi(1-\cos\theta)$, gdje je $\operatorname{tg}\theta = \frac{4}{40}$. To daje prostorni kut od 0.03118 steradijana, pa je udio svjetla koji pada na leću

$$\eta = \frac{0.03118}{4\pi} = 0.00248 = 0.248\%.$$

Ur.

1652. *Pri nekoj temperaturi i tlaku, gustoća suhog zraka (0% vodene pare) iznosi* 1.3 kg/m^3. *Kolika će biti gustoća pri istoj temperaturi i tlaku, ako zrak sadrži 3% vodene pare?*

Rješenje. Gustoću idealnog plina izrazimo iz opće plinske jednadžbe:

$$pV = nRT, \qquad n = \frac{m}{M}$$

$$pM = \rho RT$$

Kako nas zanima usporedba dvaju plinova (suhog i vlažnog zraka) pri jednakoj temperaturi i tlaku, možemo jednadžbu koristiti kao:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

gdje za zrak uvrstimo $M_1 = 29$ g/mol i $\rho_1 = 1.3$ kg/m^3. Prosječnu molarnu masu vlažnog zraka izračunamo iz udjela suhog zraka (97%, $M = 29$) i vodene pare (3%, $M = 18$):

$$M_2 = 0.97 \cdot 29 + 0.03 \cdot 18 = 28.67 \text{ g/mol.}$$

To nam iz gornjeg omjera gustoća daje

$$\rho_2 = 1.2852 \text{ kg/m}^3.$$

Ur.

1653. *Satelit se giba oko Zemlje po eliptičnoj putanji. U najbližoj točki (perigeju) nalazi se 6900 km udaljen od središta Zemlje i giba se brzinom 7.7 km/s. Kolike su brzina i udaljenost u najdaljoj točki (apogeju)? Koliko je ophodno vrijeme satelita? Masa Zemlje je* $5.98 \cdot 10^{24}$ *kg.*

Rješenje. Za brzine i udaljenosti u perigeju (1) i apogeju (2) vrijede relacije očuvanja energije i momenta vrtnje:

$$v_1^2 - \frac{2GM}{r_1} = v_2^2 - \frac{2GM}{r_2}$$

$$r_1 v_1 = r_2 v_2.$$

Uvrstimo r_2 iz prve jednadžbe u drugu, dobivamo kvadratnu jednadžbu po v_2:

$$v_2^2 - v_1^2 + \frac{2GM}{r_1}\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) = 0$$

$$v_2^2 - 7700^2 + \frac{7.9821 \cdot 10^{14}}{6\,900\,000}\left(1 - \frac{v_2}{7700}\right) = 0.$$

Njeno rješenje različito od v_1 je

$$v_2 = 7323.87 \text{ m/s.}$$

To za udaljenost apogeja daje

$$r_2 = \frac{v_1}{v_2} r_1 = 7254.4 \text{ km.}$$

Duljina velike poluosi tada je

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = 7077.2 \text{ km,}$$

što daje ophodno vrijeme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = 5921.4 \text{ s,}$$

to jest 1 h 38 min 41.4 s.

Ur.

1654. *Tijelo iz stanja mirovanja na vrhu kosine nagiba* $25°$ *počinje ubrzavati prema dnu kosine. Nakon dna kosine, tijelo se nastavlja gibati horizontalno po istoj vrsti podloge i usporava do zaustavljanja. Koliki je koeficijent trenja (jednak na kosini i ravnom putu), ako* *je tijelo prevalilo 15% manji put po ravnome nego po kosini?*

Rješenje. Ako s v označimo brzinu tijela na dnu kosine, tijelo se po kosini giba jednoliko ubrzano (od 0 do v), i horizontalno jednoliko usporeno do zaustavljanja (od v do 0). Iz izraza jednoliko ubrzanog gibanja imamo

$$v^2 = 2a_1s_1 = 2|a_2|s_2.$$

Omjer putova određen je tekstom zadatka

$$s_2 = (1 - 0.15)s_1.$$

Uz to, obje su akceleracije određene koeficijentom trenja μ

$$a_1 = g\sin 25^\circ - \mu g\cos 25^\circ$$
$$a_2 = -\mu g.$$

Slijedi da je

$$2(g\sin 25^\circ - \mu g\cos 25^\circ)s_1 = 2\mu g \cdot 0.85s_1$$
$$\sin 25^\circ = \mu(0.85 + \cos 25^0).$$

Odatle je koeficijent trenja $\mu = 0.2406$

Ur.

1655. *U nekom trenutku proizvedeno je* 10^{10} *radioaktivnih jezgara istog izotopa. Jedan sat nakon toga, izmjerena je aktivnost 5000 Bq (raspada u sekundi). Odredi vrijeme poluraspada tog izotopa.*

Rješenje. Aktivnost A ovisi o broju atoma N i vremenu poluraspada T kao

$$A = \frac{N}{T}\ln 2.$$

Broj atoma nakon 1 sata iznosi (za $t = 3600$ s)

$$N = N_0 2^{-\frac{t}{T}} = 10^{10}2^{-\frac{3600}{T}}.$$

Uvrstimo $A = 5000\ \mathrm{s}^{-1}$ i dobijemo jednadžbu po T:

$$\frac{5000T}{10^{10}\ln 2} = 2^{-\frac{3600}{T}}.$$

Postoje dva rješenja ove (transcendentne) jednadžbe, to su

$$T_1 = 295.14\ \mathrm{s}$$
$$T_2 = 1\,383\,796\ \mathrm{s},$$

što se lako provjeri uvrštavanjem.

Ur.

1656. *U prostoriji temperature* $20\,^\circ C$ *nalazi se metalna kugla radijusa 10 cm. Izvor topline u središtu kugle održava površinu kugle na stalnoj temperaturi* $32\,^\circ C$. *Odredi snagu izvora topline uz pretpostavku da kugla dobiva i gubi toplinu s površine kao idealno crno tijelo.*

Rješenje. Kugla gubi toplinu snagom $P = \sigma ST^4$, gdje je $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$ Stefan-Boltzmannova konstanta, a S površina kugle. No okolina također predaje kugli toplinu snagom $P_0 = \sigma ST_0^4$, uz temperaturu okoline T_0. Površina kugle S iznosi

$$S = 4\pi r^2 = 0.12566\ \mathrm{m}^2,$$

a razlika dviju snaga

$$\Delta P = \sigma S(T^4 - T_0^4) = 9.146\ \mathrm{W}.$$

Ur.

1657. *Na kuglicu A koja se giba brzinom 5 m/s nalijeće kuglica B pod kutom od* 75° *u odnosu na smjer kretanja kuglice A. Nakon elastičnog sudara, kuglica B se zaustavi, a kuglica A se nastavi gibati pod kutom* 30° *u odnosu na njen početni smjer. Koliki je omjer masa kuglica?*

Rješenje. Ako s x označimo omjer masa kuglica, npr. $x = \dfrac{m_B}{m_A}$, očuvanje dvije komponente impulsa i očuvanje energije daju slijedeće tri jednadžbe, s nepoznanicama x, v_B (brzina B prije sudara) i u_A (brzina A poslije sudara), uz $v_A = 5$ m/ s:

$$xv_B\sin 75^\circ = u_A\sin 30^\circ$$
$$v_A + xv_B\cos 75^\circ = u_A\cos 30^\circ$$
$$v_A^2 + xv_B^2 = u_A^2.$$

Odatle eliminacijom brzina dobijemo nešto duljim računom

$$x = \frac{m_B}{m_A} = 0.57736.$$

Ur.