

Dr. ĐURO BENIĆ

Izvanredni profesor na Fakultetu za turizam i vanjsku trgovinu Dubrovnik

TEHNIKE PROCJENJIVANJA POTRAŽNJE

UDK 330.1:519.22

Prethodno priopćenje

Primljeno: 11. ožujka 1996.

Sažetak

Menedžeri moraju poznavati tehnike procjenjivanja potražnje kako bi mogli donositi učinkovite poslovne odluke. U procjenjivanju potražnje rabe se tri osnovne metode od kojih su dvije marketinške tehnike i to ankete o potrošnji i tržišni eksperimenti. Najkorisnija i najčešće rabljena metoda procjenjivanja potražnje je regresijska analiza. U regresijskoj analizi posebnu pozornost potrebno je dati vrednovanju modela zbog problema koji mogu nastati kao posljedica specificiranja oblika funkcije potražnje, multikolinearnosti, heteroskedastičnosti i autokorelacije.

Ključne riječi: potražnja; problem identifikacije; anketa o potrošnji; tržišni eksperiment; regresijska analiza

UVOD

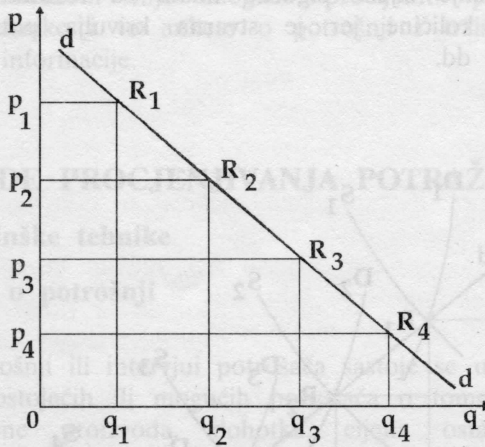
Teorija potražnje uobičajeno obuhvaća definiranje i zakon potražnje, cjenovne i necjenovne činitelje koji utječu na potražnju, te izvođenje krivulje potražnje i koncept elastičnosti potražnje koji se na prikladan način ilustriraju hipotetičkim numeričkim primjerima. Međutim da bi primijenili teoriju u praksi menedžeri moraju znati stvarni odnos između potražnje i činitelja koji na nju utječu. Imajući u vidu ključnu ulogu koju potražnja ima u većini poslovnih odluka, te činjenicu da je u nekim slučajevima relativno lako dobiti točnu procjenu odnosa u potražnji (posebice za kratkoročno predviđanje potražnje ili prodaje) dok je u drugim krajnje teško dobiti podatke potrebne za kratkoročno a poglavito za dugoročno predviđanje potražnje (ili pak za utvrđivanje kako promjene pojedinih činitelja utječu na potražnju), potrebno je sagledati mogućnosti, odnosno tehnike procjenjivanja potražnje.

U ovom radu najprije će se ukazati na poteškoće koje se javljaju prigodom izvođenja krivulje potražnje za nekim dobrom (problem identifikacije) da bi se zatim razmotrile tri osnovne metode procjenjivanja potražnje. Dvije metode, ankete o potrošnji i tržišni eksperimenti, pripadaju marketinškim tehnikama koje nadopunjuju regresijsku analizu i razmotrit će se u osnovnim crtama. Treća metoda, regresijska analiza, razmotrit će se detaljnije jer je s jedne strane najkorisnija i najčešće rabljena metoda procjenjivanja potražnje, a s druge strane to je najvažnija tehnika procjenjivanja koja se rabi kako u menedžerskoj ekonomiji (osim u procjenjivanju potražnje rabi se u procjenjivanju funkcija proizvodnje i troškova npr.) tako i u makroekonomiji (npr. u raščlambama potrošnje, investicija, međunarodne trgovine, kamatnih stopa ili potražnje za novcem).

1. PROBLEM IDENTIFIKACIJE

Jedan od razloga zašto je teško dobiti točnu procjenu odnosa u potražnji bliski su međusobni odnosi između većine ekonomskih varijabli. Tako se krivulja potražnje uobičajeno ocjenjuje na osnovi podataka o prodanoj količini dobra pri različitim cijenama na određenom tržištu u određenom vremenskom razdoblju. Međutim, krivulja potražnje ne može se dobiti jednostavnim povezivanjem točaka koje odgovaraju pojedinim odnosima cijene i potraživane količine jer je svaka ta točka određena sjecištem različitih krivulja ponude i potražnje dobra. Razmotrimo ovo na sljedeći način.¹

1 Usp. Pappas J.L., Brigham E.F., *Managerial Economics*, Third Edition, Holt - Saunders International Editions, The Dryden Press, Hinsdale, Illinois, 1979., str. 162-165. i Salvatore D., *Ekonomija za menedžere*, drugo izdanje, MATE, Zagreb, 1994., str. 121-123.

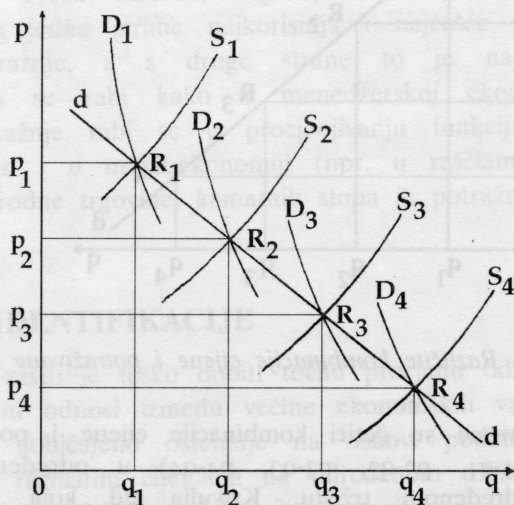


Slika 1. Različite kombinacije cijene i potraživane količine.

Na slici 1. prikazane su četiri kombinacije cijene i potraživane količine nekog dobra (p_1-q_1 , p_2-q_2 , p_3-q_3 , p_4-q_4) u određenom vremenskom razdoblju na određenom tržištu. Krivulja dd koja spaja točke tih kombinacija R_1 , R_2 , R_3 i R_4 negativnog je nagiba i pokazuje obratan odnos između cijene koja se mijenja i potraživane količine. Postavlja se pitanje: da li je krivulja dd krivulja potražnje za tim dobrom?

Raspoloživi podaci su nedovoljni za zaključak da je krivulja dd krivulja potražnje. Naime, promatrajući u vremenu (slika 2.) mijenjaju se cijena i potraživana količina no promatrane četiri kombinacije cijena/količina leže na različitim krivuljama ponude i potražnje čija presjecišta davaju točke R_1 - R_4 . Kad se krivulje ponude i potražnje ne bi pomicala ravnotežna se cijena ne bi mijenjala. Međutim, krivulja potražnje pomiče se zbog promjene nekog od utjecajnih činitelja na potražnju (dohotka, cijena ovisnih dobara ili pak samo zbog promjene ukusa) dok se krivulja ponude slično tome pomiče zbog promjene cijena činitelja proizvodnje, tehnologije ili nekog drugog utjecajnog činitelja. Pomicanje krivulja ponude i potražnje u vremenu rezultiralo je padom cijene i rastom potraživane količine ali točke R_1 - R_4 nisu na jednoj krivulji potražnje već na različitim. Upravo zato krivulja dd nije krivulja potražnje za promatranim dobrom jer nije jednoznačno određena i otud proizlazi problem identifikacije. Kad poduzeće o ovom ne bi vodilo računa napravilo bi pogrešku smatrajući da

će se sniženjem cijene sa p_1 na p_2 povećati potraživana količina sa q_1 na q_2 dok bi takvo sniženje cijene sigurno imalo za rezultat puno manje povećanje potraživane količine jer je stvarna krivulja potražnje znatno neelastičnija od krivulje dd .



Slika 2. Problem identifikacije

Sada je pitanje da li i kada krivulja dd može biti krivulja potražnje za promatranim dobrom, odnosno da li se i kada pokazatelji cijene i količine mogu koristiti za procjenjivanje potražnje. Mogu se koristiti pod sljedećim uvjetima: (1) krivulja potražnje nije se pomicala (utjecajni činitelji na potražnju su stabilni) a pomicala se krivulja ponude, ili (2) postoji dovoljno informacija koje određuju kako se svaka od krivulja pomicala u promatranom razdoblju.

Prema tome, kad se krivulja potražnje pomiče, da bi se dobila krivulja potražnje za određenim dobrom treba utvrditi učinke promjena utjecajnih činitelja na potražnju koji uzrokuju pomake krivulje potražnje za promatranim dobrom, ispraviti pomake krivulje potražnje i tako dobiti izravnu vezu između cijene i potraživane količine koja daje stvarnu krivulju potražnje za dobrom. S duge strane, *krivulju ponude ne treba ispravljati* jer upravo neispravljeni pomaci krivulje ponude uz ispravljenu krivulju potražnje omogućuju dobijanje stvarne krivulje potražnje.

Ako su nepoznate informacije o utjecajnim činiteljima na potražnju regresijskom analizom nije moguće procijeniti potražnju. Tada često marketinške tehnike i to ankete o potrošnji i tržišni eksperimenti mogu dati potrebite informacije.

2. METODE PROCJENJIVANJA POTRAŽNJE

2.1. Marketinške tehnike

2.1.1. Ankete o potrošnji

Ankete o potrošnji ili intervjui potrošača sastoje se u prikupljanju podataka ispitivanjem postojećih ili mogućih potrošača o tome kako bi reagirali na promjene cijene proizvoda, dohotka, cijena ostalih dobara, troškove oglašavanja i druge varijable u funkciji potražnje.

Prema načinu uspostavljanja kontakta s ispitanicima razlikuju se osobna anketa, anketa telefonom i anketa poštom. **Osobna anketa** najviše se koristi i provodi se izravnim kontaktom anketara i ispitanika. **Anketa telefonom** uglavnom se rabi kad se u kratkom roku nastoje dobiti podaci na temelju malog broja precizno definiranih, kratkih i jasnih pitanja. Za razliku od toga u **anketi poštom** ispitanicima se šalju precizno sročeni upitnici s uputstvom za ispunjavanje a primjenjuje se kad se pretpostavlja da će ispitanici radije dati tražene podatke bez prisustva anketara ili kad je teritorijalna rasprostranjenost ispitanika od posebnog značenja. Ankete se mogu provoditi na **slučajnom uzorku** (osobna anketa u supermarketu npr.) ili **posebno odabranom uzorku** potrošača (slanje poštom upitnika određenom segmentu potrošača npr.).

Iako se anketom mogu dobiti mnogi korisni podaci koji agregiranjem omogućuju poduzeću predviđanje potražnje ili čak procjenjivanje određenih parametara u funkciji potražnje za nekim dobrom, u zbilji su podaci često nepouzdana zbog toga što ispitanici ne mogu ili ne žele dati precizne odgovore. Naime, tri su zamke u intervjuima potrošača i to:

(1) **pogrešan uzorak** - anketari pitaju pogrešne ljude što je posebice moguće kod slučajnog uzorka

(2) **pogrešan odgovor** - ispitanici odgovaraju onako kako vjeruju da anketar želi čuti ("odličan vam je proizvod i u svakom slučaju nastavit ću ga

kupovati”) ili odgovorom pokušavaju utjecati na donošenje odluke (“ako podignete cijene neću kupovati vaš proizvod”)

(3) **točnost odgovora** - mogućim je potrošačima zbog apstrakcije teško odgovoriti na pitanja tipa “što-ako”, odnosno teško je odgovoriti npr. na pitanje kako ćeš reagirati na povećanje cijene nekog proizvoda ako taj proizvod ne kupuješ.²

Isto tako, kao poteškoća u provođenju ankete o potrošnji potrebno je istaći troškove. Iako postoje specijalizirana poduzeća za provođenje i obradu anketa, ankete na velikom uzorku i s velikim brojem pitanja vrlo su skupe pa je kao i u donošenju bilo koje druge odluke potrebno uzeti u obzir troškove i koristi dodatne informacije.

Navedene zamke i poteškoće nikako ne znače da ankete o potrošnji nemaju vrijednosti ili da su nepotrebite. Tako npr. ako se anketom utvrdi da većina potrošača ne zna za razliku između cijene proizvoda poduzeća i konkurentskih proizvoda to može biti pokazatelj da je potražnja cjenovno neelastična pa poduzeće neće pokušati povećati potražnju, odnosno ukupan prihod smanjivanjem cijene jer će pad cijene dovesti do smanjivanja ukupnog prihoda. Osim toga nekad su ankete o potrošnji nezamjenjive kad je u pitanju dobijanje podataka o mogućoj reakciji potrošača. Tako je npr. u kratkoročnom predviđanju potražnje anketa nezamjenjiva u dobijanju podataka o stavovima i očekivanjima potrošača glede budućih uvjeta kupnje ili pak u slučaju uvođenja novog proizvoda ili inovacije postojećeg, anketa je jedini način na koji se mogu doznati buduće reakcije potrošača.

2.1.2. TRŽIŠNI EKSPERIMENTI

U cilju dobijanja točnijih podataka o stvarnom ponašanju potrošača često se rabe tržišni eksperimenti. Postoje dvije vrste tržišnih eksperimenata. Jedni se poduzimaju na zbiljskom tržištu gdje poduzeće odabire jedno ili više tržišta sa sličnim socioekonomskim obilježjima i prati reakcije kupaca na promjene cijene, ambalaže, oglašavanja i drugih varijabli funkcije potražnje (npr. određuju se različite cijene proizvodu u različitim vremenskim razdobljima ili se određuju različite cijene proizvodu na različitim lokacijama prodavaonica i prati se da li ima i koje su razlike u prodaji).

² Vidi - Samuelson W.F., Marks S.G., *Managerial Economics*, Second Edition, The Dryden Press, Forth Worth, 1995., str. 128-129.

Prednosti ovakvog eksperimenta su u tome što se mogu izvoditi na velikom uzorku te što potrošači i ne znaju da sudjeluju u eksperimentu pa je pouzdanost dobivenih rezultata veća. S druge strane nedostaci su što se uobičajeno izvodi u kratkom vremenskom razdoblju zbog visokih troškova odakle proizlazi problem kratkoročnih nasuprot dugoročnih efekata, te u poteškoćama koje proizlaze iz nekontroliranih dijelova eksperimenta. Tako promjene ekonomskih uvjeta za vrijeme eksperimenta (npr. otpuštanje radnika većeg poslodavca na području gdje se izvodi eksperiment; mogućnost konkurencije da ometa eksperiment promjenom cijena svojih proizvoda) mogu umanjiti rezultate kao i loši vremenski uvjeti npr. Osim toga ako poduzeće eksperimentira s visokim cijenama može izgubiti dio kupaca. Ipak tržišni eksperimenti često se rabe kao podloga za vođenje uspješne politike cijena poduzeća.

Drugi tržišni eksperiment je **kontrolirani laboratorijski eksperiment** gdje je potrošačima, koji se odabiru tako da predstavljaju socioekonomsko obilježje promatranog tržišta, na raspolaganju određeni iznos novca i moraju ga u cijelosti potrošiti u simuliranoj prodavaonici a uobičajeno dobra koja tijekom eksperimenta kupe mogu zadržati. Na taj način pokušavaju se dobiti stvarne reakcije kupaca na promjene cijena, ambalaže i dugih činitelja potražnje.

Ovakav eksperiment ima prednost nad eksperimentom koji se provodi na zbiljskom tržištu zbog veće kontrole mogućih vanjskih utjecaja, te nižih troškova ali ima i nedostataka. Najveći je što sudionici u eksperimentu znaju da su dio eksperimenta što može utjecati na njihovo ponašanje pa mogu npr. pokazati veću osjetljivost na promjene cijena nego u svakodnevnoj kupovini. Osim toga zbog visokih troškova ovakvih eksperimenata oni se uobičajeno izvode na manjem uzorku potrošača što smanjuje mogućnost uopćavanja dobivenih podataka.

2.2. Regresijska analiza

Marketinškim tehnikama procjenjivanja potražnje - anketom o potrošnji i tržišnim eksperimentom - mogu se dobiti korisni podaci u cilju procjene potražnje međutim regresijska analiza je najraširenija metoda procjenjivanja potražnje. Iako postoje ograničenja, odnosno problemi u primjeni ove tehnike ona daje objektivnu i pouzdanu procjenu potražnje uz niske troškove.

Regresijska analiza je statistička tehnika za ocjenjivanje kvantitativne veze između varijable koju želimo objasniti - zavisne varijable - i jedne ili više nezavisnih varijabli. Osnovni zadatak regresijske analize jest ocjena oblika zavisnosti promatranih pojava i pokazivanje kako se zavisna varijabla mijenja s promjenom nezavisne varijable.³

Prvi korak u regresijskoj analizi jest specificiranje varijabli koje utječu na potražnju i prikupljanje podataka o njima, zatim je potrebno specificirati model odnosno utvrditi oblik funkcije potražnje, procijeniti koeficijente odnosno kvantitativni učinak svake nezavisne varijable na zavisnu, te vrednovati regresijske rezultate. Nakon toga rezultati se mogu rabiti kao podloga za donošenje poslovnih odluka.⁴

U regresijskoj analizi potražnje zavisna varijabla je potraživana količina određenog dobra ili usluge. Ako se analizira odnos između zavisne varijable i jedne nezavisne varijable rabi se **jednostavna regresijska analiza**, a ako su u modelu dvije ili više nezavisnih varijabli rabi se **višestruka ili multipla regresijska analiza**. Na potražnju utječu cijena dobra, cijene ovisnih dobara, dohodak, broj potrošača, ukusi potrošača, izdaci za oglašavanje i druge varijable. Ukoliko se analizira npr. odnos između potraživane količine i cijene rabi se jednostavna regresijska analiza, a ako se analizira npr. odnos između potraživane količine, cijene dobra, te dohotka i/ili oglašavanja rabi se višestruka regresijska analiza. U cilju objašnjenja i ilustracije lakše je prvo razmotriti jednostavnu regresijsku analizu i nakon toga model proširiti na višestruku regresijsku analizu.⁵

³ Regresijska analiza istražuje funkcionalnu povezanost pojava dok korelacijska analiza istražuje statističku povezanost. Zadatak korelacijske analize jest mjerenje stupnja jakosti statističkih veza između pojava (statističke veze su slabije od funkcionalnih). Iako imaju različite zadatke korelacijska i regresijska analiza povezane su i često se zajedno rabe u istraživanjima.

⁴ Vidi - Keat P., Young P.K.Y., *Managerial Economics*, Maxwell Macmillan International Editions, Singapore, 1992., str. 153.

Naime, statistička metodologija ekonomskih modela sastoji se od *specificiranja, procjenjivanja i vrednovanja*. Specificiranje zahtijeva izražavanje ekonomskih odnosa matematičkom jednadžbom linearnog ili nelinearnog oblika. Procjenjivanje obuhvaća kalkulanje vrijednosti parametara ili koeficijenata jednadžbe zašto se najčešće rabi metoda najmanjih kvadrata a vrednovanje je sljedeći korak koji prihvaća ili odbacuje statističko značenje regresijske jednadžbe na temelju standardnih kriterija. Kad je izvedena jednadžba prihvatljiva može se rabiti kao podloga za donošenje poslovnih odluka.

⁵ Ovdje se ukratko razmatra uporaba regresijske analize u procjenjivanju potražnje dok opširnije o problematici jednostavne i višestruke regresijske analize vidi udžbenike iz statistike - npr. - Šošić I., Serdar V., *Uvod u statistiku*, deveto izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1995., str. 79-119.

2.2.1. JEDNOSTAVNA REGRESIJSKA ANALIZA

SPECIFICIRANJE I PRIKUPLJANJE PODATAKA O VARIJABLAMA

Kao što je već istaknuto, u analizi potražnje zavisna varijabla je potraživana količina mjerena u fizičkim jedinicama mjere. Nezavisne varijable koje utječu na potražnju brojne su - cijena dobra, cijene supstituta i komplementarnih dobara, dohodak potrošača, troškovi oglašavanja, broj potrošača, njihovi ukusi i preferencije, te druge varijable kao što su npr. kreditni uvjeti i kamatna stopa kod funkcije potražnje skupih trajnih dobara. Ne smiju se izostaviti važne varijable jer u suprotnom dobiveni rezultati ne bi odgovarali zbilji, a uvrštavanje velikog broja nezavisnih varijabli (više od pet) može prouzročiti probleme u izračunavanju. Prikupljanje podataka nije uvijek lako posebice kad se prikupljaju podaci iz prošlih godina, a uz to neke varijable, kao što je npr. stav potrošača glede kvalitete dobra, mogu se dobiti isključivo anketom koja unosi subjektivnost u podatak ili tržišnim eksperimentom koji nosi mogućnost pogrešnog podatka.

SPECIFIKACIJA OBLIKA FUNKCIJE POTRAŽNJE

Nakon specifikacije varijabli i prikupljanja podataka o njima, potrebno je odrediti oblik jednadžbe odnosno funkciju potražnje. Najjednostavniji model koji se najčešće rabi jest linearni model koji se može prikazati na sljedeći način

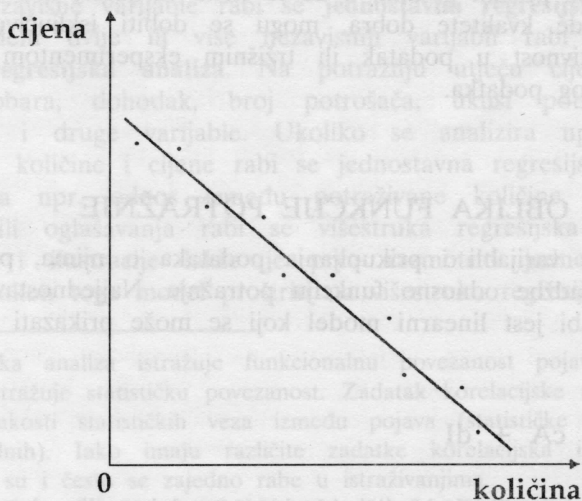
$$Q = a + bP + cA + dI \quad (1)$$

gdje Q predstavlja potraživanu količinu odnosnog dobra ili usluge, P cijenu dobra ili usluge, A troškove oglašavanja, a I raspoloživi dohodak.

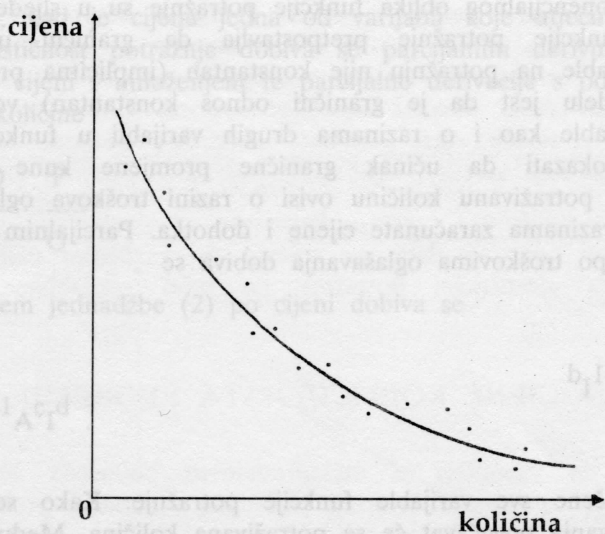
Promjena zavisne varijable u linearnom modelu za jediničnu promjenu nezavisne varijable uvijek je jednaka za svaku vrijednost nezavisne varijable. To znači npr. ako je $b = -2$ potraživana količina opadati će za 2 jedinice za svako jedinično povećanje cijene dobra ili usluge.

Linearna funkcija potražnje najčešće se rabi zato što, s jedne strane, često odgovara zbilji, a, s druge strane, zato što se mogu koristiti prikladne statističke tehnike kao što je metoda najmanjih kvadrata kako bi se procijenili parametri odnosno koeficijenti regresije a, b, c i d.

Za izbor oblika funkcije potražnje često se koristi **dijagram rasipanja**. To je grafički prikaz koji se konstruira u pravokutnom koordinatnom sustavu gdje apscisa mjeri nezavisnu a ordinata zavisnu varijablu pa se unošenjem podataka dobivaju točke a na osnovu njihovog rasporeda donosi se sud o mogućem obliku funkcije. Ako su točke takvog rasporeda da su postavljene oko zamišljenog pravca (slika 3.) potražnja se može izraziti linearnom regresijom, a ako su raspoređene oko zamišljene krivulje potražnja se može izraziti krivolinijskom regresijom (slika 4.). Ako ne postoji sustavan raspored točaka u dijagramu ne postoji korelacija između varijabli a što je udaljenost točaka od zamišljenog pravca ili krivulje manja korelacija je veća i obratno.



Slika 3. Dijagram rasipanja - linearni odnos



Slika 4. Dijagram rasipanja - nelinearni odnos

Shodno tome dijagram rasipanja zavisne varijable u odnosu na svaku nezavisnu varijablu može pokazati da podacima više odgovara nelinearni oblik funkcije od linearnog. Od nelinearnih oblika funkcije potražnje najčešće se rabi eksponencijalna funkcija koja u odnosu na varijable u (1) ima oblik

$$Q = aP^b A^c I^d \quad (2)$$

Jednadžba (2) lako se može transformirati u linearne odnose logaritmiranjem lijeve i desne strane

$$\log Q = \log a + b \cdot \log P + c \cdot \log A + d \cdot \log I \quad (3)$$

Jednadžbe (2) i (3) su istoznačne a oblik (3) omogućuje procjenu parametara ($\log a$, b , c i d) metodom najmanjih kvadrata.

Prednosti eksponencijalnog oblika funkcije potražnje su u sljedećem.⁶ Prvo, ovaj oblik funkcije potražnje pretpostavlja da granični učinak svake nezavisne varijable na potražnju nije konstantan (implicitna pretpostavka u linearnom modelu jest da je granični odnos konstantan) već zavisi od razine te varijable kao i o razinama drugih varijabli u funkciji. Tako se lako može pokazati da učinak granične promjene kune utrošene u oglašavanje na potraživanu količinu ovisi o razini troškova oglašavanja isto tako kao i o razinama zaračunate cijene i dohotka. Parcijalnim deriviranjem jednadžbe (2) po troškovima oglašavanja dobiva se

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = acP^b A^{c-1} I^d$$

∂A

čime su uključene sve varijable funkcije potražnje. Kako se povećavaju troškovi oglašavanja povećavat će se potraživana količina. Međutim, malo je vjerojatno da će to povećanje biti linearno. Naime, pri nižoj razini trošenja granični učinak kune utrošene na oglašavanje vjerojatno će biti velik a pri visokoj razini trošenja na oglašavanje može doći do efekta zasićenja koji će rezultirati smanjenjem graničnog učinka na potražnju svake dodatne kune utrošene na oglašavanje.

Druga prednost eksponencijalnog oblika funkcije potražnje jest u tome da ocijenjeni koeficijenti istovremeno označavaju elastičnosti potražnje i to prosječne elastičnosti. To se može pokazati npr. na cjenovnoj elastičnosti potražnje za dobrom čija je funkcija potražnje dana jednadžbom (2).

Polazeći od toga da je potražnja funkcija cijene $Q = f(P)$, cjenovna elastičnost potražnje jednaka je

$$Edp = \frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dP}{P}} = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$$

⁶ Usp. Hirschey M., Pappas J.L., *Fundamentals of Managerial Economics*, Fifth Edition, The Dryden Press, Forth Worth, 1995., str. 99. i Salvatore D., isto djelo, str. 152-153.

Prema tome, kad je cijena jedna od varijabli koje utjeĉu na potražnju, cjenovna elastiĉnost potražnje dobiva se parcijalnim deriviranjem funkcije potražnje po cijeni i množenjem te parcijalne derivacije s odnosom cijene i potraživane koliĉine

$$Ed_p = \frac{\partial Q}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q} \quad (4)$$

Diferenciranjem jednadžbe (2) po cijeni dobiva se

$$\frac{\partial Q}{\partial P} = abP^{b-1} A^c I^d \quad (5)$$

Prema tome,

$$Ed_p = abP^{b-1} A^c I^d \cdot \frac{P}{Q} \quad (6)$$

Supstituiranjem (2) za Q u (6) dobiva se

$$Ed_p = abP^{b-1} A^c I^d \cdot \frac{P}{aP^b A^c I^d} \quad (7)$$

Otud,

$$Ed_p = \frac{abP^{b-1} A^c I^d}{1} \cdot \frac{P}{aP^b A^c I^d}$$

odnosno,

$$Ed_p = \frac{abP^b A^c I^d}{P} \cdot \frac{P}{aP^b A^c I^d}$$

a poslije poništavanja

$$Ed_p = b. \quad (8)$$

Prema tome, cjenovna elastičnost potražnje jednaka je eksponentu cijene u funkciji potražnje (2) a budući je elastičnost jednaka b ona nije funkcija odnosa cijene i količine i otud je konstanta za razliku od elastičnosti u linearnoj funkciji potražnje koja se mijenja pri različitim razinama cijene. Ovo vrijedi za elastičnosti potražnje po svim varijablama u funkciji potražnje.

PRIMJERI PROCJENE KOEFICIJENATA REGRESIJE

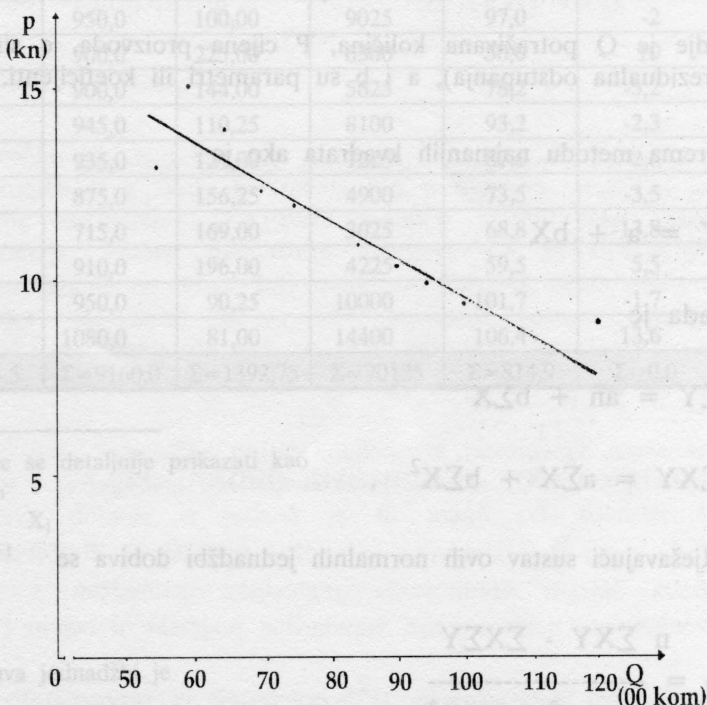
Pretpostavimo da menadžer u maloprodajnom poduzeću želi izračunati tekuću potražnju na temelju stvarnih podataka o cijeni i prodanoj količini posljednjih deset tjedana. Podaci su dani u tabeli 1.

Tabela 1

POTRAŽIVANA KOLIČINA I CIJENA PROIZVODA "X"

Potraživana količina (00 kom.)	Cijena (kn)
95	10,0
60	15,0
75	12,0
90	10,5
85	11,0
70	12,5
55	13,0
65	14,0
100	9,5
120	9,0

Najprije se konstruira dijagram rasipanja (slika, 1.) gdje apscisa mjeri potraživanu količinu a ordinata cijenu proizvoda. Iz dijagrama se vidi da postoji obratan odnos između cijene i potraživane količine te da rasporedu točaka može odgovarati linearna regresija. Između točaka može se ucrtati pravac prema modelu najmanjih kvadrata tako da je zbroj kvadratnih odstupanja od pravca minimalan. Regresijski pravac predstavlja potražnju kao funkciju cijene.



Slika 5. Dijagram rasipanja

U praksi se matematičko izvođenje regresijske jednadžbe, odnosno procjena koeficijenata regresije vrši na sljedeći način.⁷

⁷ Procjena koeficijenata obično se vrši na računaru a ovdje će se ručno obaviti da bi se pokazalo kako se točno obavlja i što donosi regresijska analiza.

LINEARNI MODEL

Linearni model potražnje je

$$Q = a + bP + e$$

gdje je Q potraživana količina, P cijena proizvoda, e simbol za pogrešku (rezidualna odstupanja), a i b su parametri ili koeficijenti.

Prema metodu najmanjih kvadrata ako je

$$Y = a + bX \quad (9)$$

tada je

$$\sum Y = an + b\sum X \quad (10)$$

$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$$

Rješavajući sustav ovih normalnih jednadžbi dobiva se

$$b = \frac{n \sum XY - \sum X \sum Y}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} \quad (11)$$

$$a = \frac{\sum Y - b \sum X}{n}, \quad (12)$$

gdje je n veličina promatranih situacija.⁸
 Sada se formira tabela 2 u kojoj su potrebni podaci za dalju raščlambu.

Tabela 2

PODACI I PRORAČUN ZA LINEARNU JEDNADŽBU POTRAŽNJE

Tjedna prodaja Y	Cijena po kom. Y	XY	X ²	Y ²	Y	Y - Y
95	10,0	950,0	100,00	9025	97,0	-2
60	15,0	900,0	225,00	6300	50,0	10
75	12,0	900,0	144,00	5625	78,2	-3,2
90	10,5	945,0	110,25	8100	93,2	-2,3
85	11,0	935,0	121,00	7225	87,6	-2,6
70	12,5	875,0	156,25	4900	73,5	-3,5
55	13,0	715,0	169,00	3025	68,8	-13,8
65	14,0	910,0	196,00	4225	59,5	5,5
100	9,5	950,0	90,25	10000	101,7	-1,7
120	9,0	1080,0	81,00	14400	106,4	13,6
Σ=815	Σ=116,5	Σ=9160,0	Σ=1392,75	Σ=70125	Σ=814,9	Σ=0,0

⁸ Relacija (10) može se detaljnije prikazati kao

$$\sum_{i=1}^n Y_i = n \cdot a + b \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i = a \sum_{i=1}^n X_i + b \sum_{i=1}^n X_i^2$$

a rješenje ovog sustava jednačbi je

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2} \quad a = \bar{Y} - b \bar{X}$$

gdje su \bar{X} i \bar{Y} srednje, odnosno prosječne vrijednosti X i Y pa su a i b ovako prikazani jednaki a i b u relacijama (11) i (12).

O metodu najmanjih kvadrata opširnije vidi - Cassimatis P., *Introduction to Managerial Economics*, Routledge, London, 1996., str. 60-62. i Šošić I., Serdar V., isto djelo, str. 83-84.

Izračunavanje parametara a i b:

$$b = \frac{10(9160) - 116,5(815) - 3347,5}{10(1392,75) - (116,5)^2} = \frac{-3347,5}{355,25} = -9,4$$

$$a = \frac{815 - (-9,4)116,5}{10} = 191,0$$

Prema tome regresijska jednadžba krivulje potražnje jest

$$Y = 191,0 - 9,4X$$

ili

$$Q = 191,0 - 9,4P$$

VREDNOVANJE REGRESIJSKE JEDNADŽBE

Prije nego li se dobivena jednadžba uporabi za donošenje poslovnih odluka treba izvršiti vrednovanje regresijske jednadžbe i to izračunavanjem koeficijenta determinacije, standardne pogreške u ocjeni i t-testom.

Koeficijent determinacije (r^2) pokazatelj je reprezentativnosti regresije koji mjeri postotak promjene zavisne varijable kao posljedice promjena nezavisne varijable a kvadratni korijen koeficijenta determinacije naziva se **koeficijent korelacije** i pokazuje stupanj povezanosti zavisne i nezavisne varijable.

Koeficijent determinacije izračunava se po formuli

$$r^2 = b \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{n\sum Y^2 - (\sum Y)^2}, \quad (13)$$

što u analiziranom primjeru iznosi

$$r^2 = (-9,4) \frac{10(9160) - 116,5(815)}{10(70125) - (815)^2} = 0,85$$

Koeficijent determinacije varira u intervalu od nule do jedan. Iako teorijski nema minimuma vrijednosti r^2 koja bi trebala biti prihvatljiva, poželjna je velika vrijednost tog koeficijenta (što bliža jedinici) jer je tako mala disperzija oko regresije. Većina menedžera zahtijeva da za donošenje poslovnih odluka koeficijent ne smije biti manji od 0,8. U ovom slučaju vrijednost koeficijenta 0,85 znači da se 85% variranja potražnje može objasniti variranjem cijene proizvoda dok se 15% variranja potražnje mora objasniti drugim činiteljima.⁹

U vrednovanju regresijske jednadžbe pored koeficijenta terminacije može se kao pokazatelj rabiti i **prilagođeni koeficijent determinacije** (\bar{r}^2) koji ovisi i o broju stupnjeva slobode a jednak je ili manji od koeficijenta determinacije. Izračunava se po formuli

⁹ Koeficijent determinacije može se dati i kao omjer protumačenog i ukupnog zbroja kvadrata po formuli

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2},$$

gdje je \bar{Y} regresijska funkcija s ocijenjenim parametrima a \bar{Y} je srednja vrijednost Y. U razmatranom primjeru uporabom navedene formule rezultat je,

$$r^2 = 3134,58/3702,50 = 0,85.$$

$$r^2 = 1 - \frac{(1 - r^2)(n - 1)}{n - k} \quad (14)$$

gdje je k broj parametara u jednadžbi. U analiziranom primjeru

$$r^2 = 1 - \frac{(1 - 0,85) \cdot 9}{8} = 0,83$$

Drugi važan kriterij u vrednovanju preciznosti regresijske jednadžbe je standardna pogreška ocjene ili standardna devijacija S_e . Ona mjeri karakterističnu razliku između zbiljskih vrijednosti Y i

procijenjenih vrijednosti \hat{Y} , odnosno rezidualnih odstupanja u ($u = Y - \hat{Y}$). Y dobiva se supstituiranjem vrijednosti X u regresijsku jednadžbu, a standardna pogreška ocjene dobiva se po formuli

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum(Y - \hat{Y})^2}{n - 2}} \quad \text{ili} \quad S_e = \sqrt{\frac{\sum Y^2 - a\sum Y - b\sum XY}{n - 2}} \quad (15)$$

Primjećuje se da se u gornjim formulama veličina uzorka smanjuje za 2, odnosno za broj parametara (k) u jednadžbi (n - k naziva se *broj stupnjeva slobode*).

Prema tome,

$$S_e = \sqrt{\frac{70125 - 191(815) + 9,4(9160)}{10 - 2}} = \sqrt{\frac{564}{8}} = 8,4 \text{ stotina komada}$$

Što je manja standardna pogreška ocjene manja je disperzija podataka oko regresijske linije. U zbilji se uzima da je normalna distribucija kad je 95% podataka unutar $\pm 2 S_e$ standardne pogreške ili $\pm 2 S_e$ od linije regresije što znači da će uz danu vrijednost nezavisne varijable X predviđena vrijednost zavisne varijable Y biti unutar tog intervala. Za uzorke manje od 30 taj interval dobiva se uporabom t-distribucije ili $\pm tS_e$.

Dalji korak u vrednovanju regresijske jednadžbe jest **t-test** koji pokazuje da li su procijenjeni koeficijenti regresije različiti od nula. t pokazatelj dobiva se dijeljenjem parametra sa standardnom pogreškom, pa je za parametar b

$$t = b/S_b \quad (16)$$

s tim da se standardna pogreška koeficijenta regresije dobiva po formuli

$$S_b = S_e / \sqrt{\sum X^2 - \bar{X}\sum X} \quad (17)$$

Sve dok je izračunata vrijednost t (u apsolutnom iznosu) veća od njegove kritične vrijednosti t_c (koja se dobiva iz tabela) koeficijent regresije ima smisao, signifikantan je, odnosno različit je od nula.

U razmatranom primjeru

$$S_b = \frac{8,4}{\sqrt{1392,75 - 11,65(116,5)}} = 1,4$$

pa je

$$t_b = -9,4/1,4 = -6,7$$

Kritična vrijednost t, pri razini signifikancije od 95%, prema tablici je 2,306 pa kako je $t_b > t_c$ sigurno je koeficijent regresije u jednadžbi potražnje različit od nule.¹⁰

¹⁰ Tablica kritičnih vrijednosti t-distribucije uobičajeno se daje u udžbenicima iz statistike.

PREDVIĐANJE POTRAŽNJE

Ako je poslije vrednovanja regresijska jednadžba signifikantna, može se rabiti u predviđanju potraživane količine za danu razinu cijene. Tako bi u analiziranom primjeru predviđena potraživana količina za razinu cijene 11,5 kn bila jednaka

$$Q = 191 - 9,4(11,5) = 82,9 \text{ stotine komada proizvoda.}$$

Međutim ovo predviđanje zavisi od pogreške koja je $\pm tS_e$. Uz pouzdanost od 5% interval predviđanja bit će

$$tS_e = 2,306(8,4) = 19,4 .$$

Otud je predviđena razina potraživane količine

$$Q_f = 82,9 \pm 19,4 \text{ stotina komada proizvoda.}$$

Interval predviđanja je relativno velik usprkos visokim vrijednostima r^2 i t -testa pa menadžer može tražiti drugi model koji bi odgovarao podacima u dijagramu rasipanja. Kako bi podacima očigledno više odgovarala krivulja a ne pravac, potrebno je postaviti nelinearnu regresijsku jednadžbu.

NELINEARNI MODEL

Ako se od nelinearnih oblika funkcije potražnje izabere eksponencijalna funkcija

$$Q = aP^b \tag{18}$$

logaritmiranjem lijeve i desne strane, (18) se može transformirati u linearnu funkciju

$$\log Q = \log a + b \cdot \log P. \tag{19}$$

Sada se u formule za izračunavanje parametara a i b, te u formule za izračunavanje kriterija statističke signifikancije r^2 , S_e i t-test umjesto Y i X uvrštavaju log Y i log X pa je

$$b = \frac{n \sum \log X \log Y - \sum \log X \sum \log Y}{n \sum (\log X)^2 - (\sum \log X)^2}$$

$$\log a = \frac{\sum \log Y - b \sum \log X}{n}^{11}$$

$$r^2 = (b) \frac{n \sum \log X \log Y - \sum \log X \sum \log Y}{n \sum (\log Y)^2 - (\sum \log Y)^2}$$

$$\log S_e = \sqrt{\frac{\sum (\log Y)^2 - \log a \sum \log Y - b \sum \log X \log Y}{n - 2}}$$

$$t = b/S_b$$

$$S_b = S_e / \sqrt{\sum (\log X)^2 - \log \bar{X} \sum \log X}$$

Dalje, formira se tabela 3 u kojoj su potrebni podaci za dalju analizu.

¹¹ Prema formulama datim u bilješci 8,

$$\sum_{i=1}^n \log X_i \log Y_i - n \overline{\log X} \overline{\log Y}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n \log X_i \log Y_i - n \overline{\log X} \overline{\log Y}}{\sum_{i=1}^n (\log X_i)^2 - n \overline{\log X}^2}; \quad \log a = \overline{\log Y} - b \overline{\log X}$$

Primjena nelinearne jednadžbe potražnje koeficijent determinacije r^2 znatno

Tabela 3

PODACI I PRORAČUN ZA NELINEARNU JEDNADŽBU POTRAŽNJE

Tjedna prodaja Y	Cijena po kom. X	log Y	log X	logYlogX	(logY) ²	(logX) ²
95	10,0	1,9772	1,0000	1,9772	3,9093	1,0000
60	15,0	1,7782	1,1761	2,0913	3,1620	1,3832
75	12,0	1,8751	1,0792	2,0236	3,5160	1,1647
90	10,5	1,9542	1,0212	1,9956	3,8189	1,0428
85	11,0	1,9294	1,0414	2,0092	3,7226	1,0845
70	12,5	1,8451	1,0969	2,0239	3,4044	1,2032
55	13,0	1,7404	1,1139	1,9386	3,0290	1,2408
65	14,0	1,8129	1,1461	2,0778	3,2866	1,3135
100	9,5	2,0000	0,9777	1,9554	4,0000	0,9559
120	9,0	2,0792	0,9542	1,9840	4,3231	0,9105
Σ=815	Σ=116,5	Σ=18,9917	Σ=10,6067	Σ=20,0766	Σ=36,1719	Σ=11,2991

$$b = \frac{10(20,0766) - 10,6067(18,9917)}{10(11,2991) - (10,6067)^2} = \frac{-0,6733}{0,4889} = -1,3772$$

$$\log a = \frac{18,9917 + 1,3772(10,6067)}{10} = \frac{33,5992}{10} = 3,36$$

$$r^2 = \frac{10(20,0766) - 10,6067(18,9917)}{10(36,1719) - (18,9917)^2} = \frac{-0,6733}{1,0343} = -0,6462$$

$$= 0,90$$

$$\bar{r}^2 = 1 - \frac{9}{8} (1 - 0,90) = 0,89$$

$$\log S_e = \sqrt{\frac{36,1719 - 3,36(18,9917) - (-1,3772)20,0766}{10 - 2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{-0,6733}{8}} = 0,0346$$

$$S_e = 1,08$$

$$S_b = \frac{0,0346}{\sqrt{11,2991 - 1,0607(10,6067)}} = \frac{0,0346}{0,2205} = 0,1569$$

$$t_b = \frac{-1,3772}{0,1569} = -8,7776$$

PRIMJER

Prema tome, logaritamski oblik jednadžbe potražnje jest

$$\log Q = 3,36 - 1,3772 \log P$$

uz

$$\bar{r}^2 = 0,90$$

$$S_e = 1,08$$

Primjenom nelinearne jednadžbe potražnje koeficijent determinacije r^2 znatno je veći nego u linearnoj jednadžbi primijenjenoj prije, dok je

standardna pogreška ocjene znatno manja a t-test pokazuje signifikantnost koeficijenta regresije.

Predviđena potraživana količina za razinu cijene 11,5 kn jednaka je

$$\log Q = 3,36 - 1,3772(1,0607) = 1,8992$$

$$Q = 79,28 \approx 79,3 \text{ stotine komada}$$

Uzimajući u obzir pogrešku $\pm tS_e$, uz pouzdanost od 5%, interval predviđanja bit će

$$tS_e = 2,306(1,08) = 2,49$$

što je relativno mala veličina pa je predviđena razina potraživane količine

$$Q_f = 79,3 \pm 2,49 \text{ stotina komada proizvoda.}$$

Uz pretpostavku da nema jednadžbe koja bolje odgovara podacima ovaj model može biti podloga menadžeru za donošenje odluke.

2.2.2. Višestruka regresijska analiza

U nekim situacijama jedna nezavisna varijabla ne može objasniti sve promjene zavisne varijable. Kao što je već naglašeno, na potražnju osim cijene utječu i oglašavanje, dohodak potrošača, te još neke varijable. Da bi se model približio zbilji i poboljšala njegova signifikancija potrebno je postaviti regresijsku jednadžbu koja uključuje i druge varijable. Višestruka ili multipla regresijska jednadžba uključuje dvije ili više nezavisnih varijabli koje nisu u korelaciji jedna s drugom ali simultano određuju vrijednost nezavisne varijable.

Višestruki linearni regresijski model općenito se može prikazati na sljedeći način

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n + e \quad (20)$$

Model uključuje k parametara, k-1 nezavisnih varijabli i pogrešku e koja je rezultat efekata izostavljenih varijabli.

Ako postoje samo dvije nezavisne varijable tada je višestruki linearni regresijski model

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + e \quad (21)$$

Kako model ima dvije nezavisne varijable i tri nepoznata parametra, ocjene parametara dobivaju se rješenjem sustava normalnih jednadžbi

$$\Sigma Y = a \cdot n + b_1 \Sigma X_1 + b_2 \Sigma X_2$$

$$\Sigma X_1 Y = a \Sigma X_1 + b_1 \Sigma X_1^2 + b_2 \Sigma X_1 X_2 \quad (22)$$

$$\Sigma X_2 Y = a \Sigma X_2 + b_1 \Sigma X_1 X_2 + b_2 \Sigma X_2^2$$

PRIMJER

LINEARNI MODEL

Pretpostavimo da menadžer u primjeru razmatranom u dijelu 2.2.1. vjeruje da na potraživanu količinu osim cijene utječe i oglašavanje pa se podacima u tabeli 1 dodaju podaci o troškovima oglašavanja u tisućama kuna posljednjih deset tjedana. Podaci za višestruku regresijsku analizu dani su u tabeli 4 gdje su: Y potraživana količina proizvoda u stotinama komada, X₁ cijena proizvoda u kunama, X₂ troškovi oglašavanja u tisućama kuna.

PRODAJA CIJENA OGLAS

PRODAJA	1.0000	
CIJENA	-0.9230	1.0000

Tabela 4.

PODACI I PRORAČUN ZA VIŠESTRUKU REGRESIJU

Y	X ₁	YX ₁	X ₁ ²	X ₂	YX ₂	X ₂ ²	X ₁ X ₂	Y ²
95	10,0	950	100,00	9	855	81	90,0	9025
60	15,0	900	225,00	8	480	64	120,0	3600
75	12,0	900	144,00	8	600	64	96,0	5625
90	10,5	945	110,25	9	810	81	94,5	8100
85	11,0	935	121,00	8	680	64	88,0	7225
70	12,5	875	156,25	7	490	49	87,5	4900
55	13,0	715	169,00	6	330	36	78,0	3025
65	14,0	910	196,00	6	390	36	84,0	4225
100	9,5	950	90,25	9	900	81	85,5	10000
120	9,0	1080	81,00	10	1200	100	90,0	14400
Σ=815	Σ=116,5	Σ=9160	Σ=1392,75	Σ=80	Σ=6735	Σ=656	Σ=913,5	Σ=70125

Uvrštavajući podatke iz tabele 4 u relaciju (22) dobiva se

$$815 = 10a + 116,5b_1 + 80b_2$$

$$9160 = 116,5a + 1392,75b_1 + 913,5b_2$$

$$6735 = 80a + 913,5b_1 + 656b_2$$

Rješenje gornjih jednačbi daje vrijednosti koeficijenata. U zbilji se višestruka regresijska analiza uobičajeno provodi jednim od brojnih statističkih računalskih programa pa će se tako i ovdje postupiti (koristit će se program STATISTIX 3.5).

Višestruki linearni regresijski model općenito se može prikazati na sljedeći način

STATISTIX 3.5

ID: Y X1 X2

UNWEIGHTED LEAST SQUARES LINEAR REGRESSION OF PRODAJA

PREDICTOR VARIABLES	COEFFICIENT	STD ERROR	STUDENT'S T	P
CONSTANT	101.40	37.967	2.67	0.0320
CIJENA	-6.0955	1.7069	-3.57	0.0091
OGLAS	6.3896	2.5434	2.51	0.0403
R SQUARED	0.9221	RESID. MEAN SQUARE (MSE)		41.18
ADJUSTED R SQUARED	0.8999	STANDARD DEVIATION		6.417

SOURCE	DF	SS	MS	F	P
REGRESSION	2	3414.2	1707.1	41.45	0.0001
RESIDUAL	7	288.27	41.182		
TOTAL	9	3702.5			

CASES INCLUDED 10 MISSING CASES 0

DURBIN-WATSON TEST FOR AUTOCORRELATION

DURBIN-WATSON STATISTIC 1.9796

P VALUES, USING DURBIN-WATSON'S BETA APPROXIMATION:

P (POSITIVE CORR) = 0.3909, P (NEGATIVE CORR) = 0.6091

EXPECTED VALUE OF DURBIN-WATSON STATISTIC 2.1609

EXACT VARIANCE OF DURBIN-WATSON STATISTIC 4.1396E-01

CASES INCLUDED 10 MISSING CASES 0

CORRELATIONS (PEARSON)

	PRODAJA	CIJENA	OGLAS
PRODAJA	1.0000		
CIJENA	-0.9230	1.0000	

OGLAS 0.8833 -0.7760 1.0000
 CASES INCLUDED 10 MISSING CASES 0

PARTIAL CORRELATIONS WITH PRODAJA

CONTROLLED FOR CIJENA

OGLAS 0.6886

CASES INCLUDED 10 MISSING CASES 0

PARTIAL CORRELATIONS WITH PRODAJA

CONTROLLED FOR OGLAS

CIJENA -0.8035

CASES INCLUDED 10 MISSING CASES 0

Računalski ispis pokazuje rješenje koeficijenata ($a = 101,4$; $b_1 = -6,1$; $b_2 = 6,4$) i kriterij za statističku signifikanciju. Dobivena regresija potražnje je

$$Y = 101,4 - 6,1 X_1 + 6,4 X_2,$$

odnosno

$$Q = 101,4 - 6,1 P + 6,4 A$$

$$(-3,57) \quad (2,51)$$

gdje je Q potraživana količina u stotinama komada, P cijena proizvoda u kunama, A troškovi oglašavanja u tisućama kuna (uobičajeno se t vrijednosti ispisuju ispod odgovarajućih koeficijenata), dok je

$$r^2 = 0,92 ; \bar{r}^2 = 0,90 ; S_e = 6,42 ; F = 41,45 .$$

Vrednovanje modela višestruke regresije

Prvo se razmatra da li su predznaci koeficijenata ispravni. Cijena ima negativan koeficijent što pokazuje da će se (ukoliko su troškovi oglašavanja konstantni) potraživana količina smanjiti za 6,1 stotinu komada ako se cijena proizvoda poveća za 1 kunu. Isto tako, koeficijent oglašavanja pokazuje da oglašavanje ima utjecaj na potraživanu količinu te da će se (ukoliko je cijena konstantna) potraživana količina povećati za 6,4 stotine komada ako se troškovi oglašavanja povećaju za 1000 kuna.

Treba naglasiti da *uključivanje oglašavanja u model ima utjecaj i na koeficijent cijene*. U jednostavnoj linearnoj regresiji koeficijent cijene bio je -9,4 dok je u višestrukoj -6,1. To znači da je u jednostavnoj regresiji bila precijenjena veličina učinka cijene.

Dalje, koeficijent determinacije r^2 pokazuje veliku vrijednost (0,92) što znači da se 92% variranja potražnje može objasniti simultanim variranjem cijene i oglašavanja s tim da prilagođeni koeficijent determinacije ima vrijednost 0,90.¹²

Standardna pogreška ocjene S_e ima vrijednost 6,42. Kako je uzorak mali interval predviđanja mjeri se s $\pm tS_e$. Za razinu signifikancije 5% i sedam stupnjeva slobode

$$tS_e = 2,365(6,42) = 15,2 \text{ stotine komada.}$$

Računalski ispis pokazuje da su vrijednosti t (u apsolutnom iznosu) veće od kritične vrijednosti t_c (2,365) pa su koeficijenti regresije signifikantni. Isto tako, p vrijednost pokazuje kolika je vjerojatnoća da koeficijent bude

¹² Što je više nezavisnih varijabli u regresijskom modelu, koeficijent determinacije dobiva veću vrijednost,

jednak nula. Niske vrijednosti u ispisu (za cijenu 0,0091, a za oglašavanje 0,0403) znače da su koeficijenti signifikantni.

F - test pokazuje cjelokupnu signifikantnost modela. Vrijednost F dobiva se po formuli

$$F = \frac{r^2/(k-1)}{(1-r^2)/(n-k)} \quad (23)$$

Računalski ispis pokazuje vrijednost F u visini 41,45. Za stupanj signifikancije 5% i $k-1=2$ u brojniku, te $n-3=7$ u nazivniku, kritična vrijednost F koja se dobiva iz tabele jest 4,74. Prema tome, višestruka regresija potražnje u cjelini je statistički prihvatljiva.

U modelu višestruke regresije **multikolinearnost** označava da su dvije ili više nezavisnih varijabli u uskoj korelaciji. U ovom primjeru multikolinearnost ne postoji jer su: (1) rezultati prošli i F-test i t-test i (2) element korelacijske matrice (Pearson test) između cijene i oglašavanja je -0,7760 manji je od r ($r = \sqrt{r^2} = \sqrt{0,92} = 0,96$).

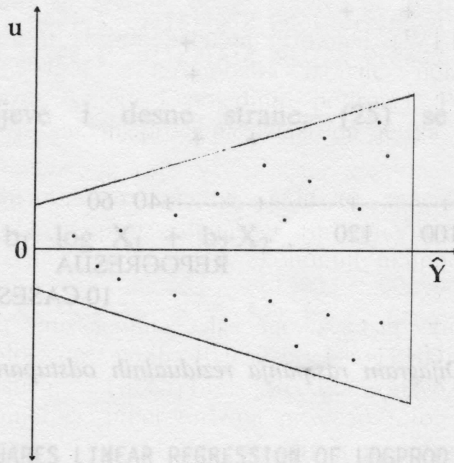
Autokorelacija označava postojanje korelacije između uzastopnih pogrešaka ili odstupanja a ispitiva se Durbin-Watsonovim testom, odnosno pokazateljem d koji je jednak

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} \quad (24)$$

gdje je e procijenjeni rezidual regresije. Ako je vrijednost d oko 2 nema autokorelacije, ali ako je znatno iznad ili ispod 2 rabe se tabele u kojima su dane gornja i donja granica vrijednosti. Ako je dobiveni d veći od

gornje granice nema autokorelacije, ako je manji od donje granice postoji autokorelacija, a ako je između donje i gornje granice test ne dovodi do zaključka. U ovom primjeru tablična donja granica je 0,697, a gornja 1,641. Kako je iskazani d u ispisu 1,9796 nema autokorelacije.

Heteroskedastičnost je problem u regresijskoj analizi koji se javlja kad varijanca pogreške nije konstantna za sve vrijednosti nezavisnih varijabli. U tom slučaju na dijagramu rasipanja (slika 6.) s povećanjem regresijskih vrijednosti povećavaju se i rezidualna odstupanja pa raspored dobiva oblik megafona. U razmatranom primjeru dijagram rasipanja rezidualnih odstupanja i regresije (slika 7.) pokazuje da nema heteroskedastičnosti.



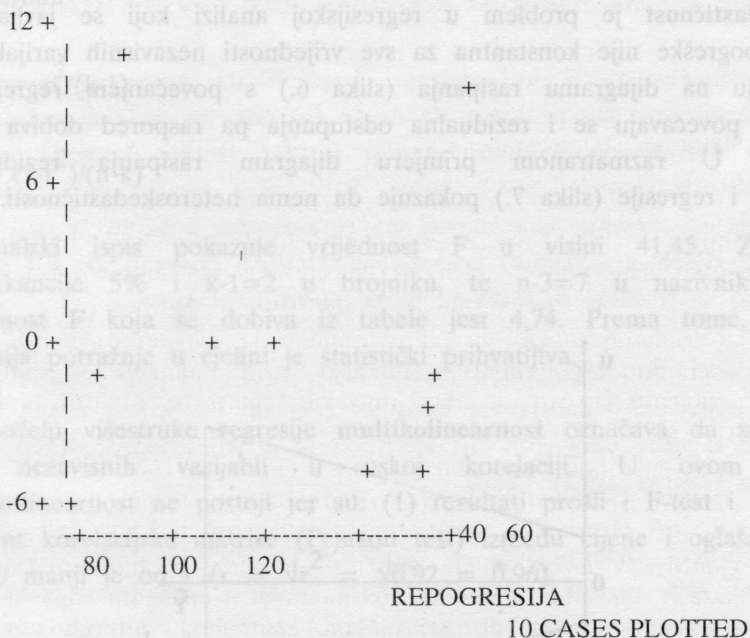
Slika 6. Dijagram rasipanja rezidualnih odstupanja i regresije u slučaju heteroskedastičnosti

STATISTIX 3.5

ID: Y X1 X2

REZIDUALI VS REGRESIJA

REZIDUALI



Slika 7. Dijagram rasipanja rezidualnih odstupanja i regresije

Predviđanje potražnje višestrukom linearnom regresijom

Kako je vrednovanje pokazalo da je model *signifikantan* po svim kriterijima može se rabiti za predviđanje potraživane količine. Tako je za cijenu 11,5 kn i troškove oglašavanja 8000 kn procijenjena potražnja

$$Q = 101,4 - 6,4(11,5) + 6,4(8) = 82,45 \text{ stotina komada proizvoda,}$$

odnosno

$$Q_f = 82,45 \pm 15,2 \text{ stotine komada proizvoda.}$$

Interval predviđanja je relativno velik pa menadžer može tražiti višestruki nelinearni regresijski model koji bi više odgovarao podacima.

NELINEARNI MODEL

Od nelinearnih oblika funkcije potražnje može se izabrati eksponencijalna funkcija oblika

$$Y = aX_1^{b_1}X_2^{b_2} \quad (25)$$

Logaritmiranjem lijeve i desne strane, (25) se transformira u linearnu funkciju

$$\log Y = \log a + b_1 \cdot \log X_1 + b_2 \cdot X_2 \quad (26)$$

STATISTIX 3.5

ID: Y X1 X2

UNWEIGHTED LEAST SQUARES LINEAR REGRESSION OF LOGPROD

PREDICTOR VARIABLES	COEFFICIENT	STD ERROR	STUDENT'S T	P
CONSTANT	2.5422	4.0690E-01	6.25	0.0004
LOGCIJ	-1.0011	2.2270E-01	-4.50	0.0028
LOGOGL	4.6679E-01	2.1711E-01	2.15	0.0686
R SQUARED	0.9355	RESID. MEAN SQUARE (MSE)		9.536E-04
ADJUSTED R SQUARED	0.9171	STANDARD DEVIATION		3.088E-02

SOURCE	DF	SS	MS	F	P
REGRESSION	2	9.6825E-02	4.8412E-02	50.77	0.0001
RESIDUAL	7	6.6752E-03	9.5360E-04		
TOTAL	9	1.0350E-01			

CASES INCLUDED 10 MISSING CASES 0

DURBIN-WATSON TEST FOR AUTOCORRELATION

DURBIN-WATSON STATISTIC 2.9632

P VALUES, USING DURBIN-WATSON'S BETA APPROXIMATION:

P (POSITIVE CORR) = 0.8960, P (NEGATIVE CORR) = 0.1040

EXPECTED VALUE OF DURBIN-WATSON STATISTIC 2.1940

EXACT VARIANCE OF DURBIN-WATSON STATISTIC 3.5925E-01

CASES INCLUDED 10 MISSING CASES 0

CORRELATIONS (PEARSON)

	LOGPROD	LOGCIJ	LOGOGL
LOGPROD	1.0000		
LOGCIJ	-0.9449	1.0000	
LOGOGL	0.8656	-0.7792	1.0000

CASES INCLUDED 10 MISSING CASES 0

PARTIAL CORRELATIONS WITH LOGPROD

CONTROLLED FOR LOGCIJ

LOGOGL 0.6307

CASES INCLUDED 10 MISSING CASES 0

PARTIAL CORRELATIONS WITH LOGPROD

CONTROLLED FOR LOGOGL

LOGCIJ -0.8618
 CASES INCLUDED 10 MISSING CASES 0

Računalski ispis ovog modela pokazuje rješenje koeficijenata ($\log a = 2,5422$; $\log b_1 = -1,0011$; $\log b_2 = 0,46679$) i kriterij za statističku signifikanciju. Dobivena regresija potražnje je

$$\log Y = 2,5422 - 1,0011 \log X_1 + 0,46679 \log X_2$$

(- 4,50) (2,15)

Međutim, kako je izračunata vrijednost t za koeficijent oglašavanja (2,15) manja od kritične vrijednosti t_c koja se dobiva iz tabele (2,365) koeficijent *nije signifikantan*. Zato se izabire drugi nelinearni oblik funkcije potražnje pa se tako može izabrati eksponencijalna funkcija oblika

$$Y = ab_1^{X_1} b_2^{X_2} \tag{27}$$

Logaritmiranjem lijeve i desne strane, (27) se transformira u linearnu funkciju

$$\log Y = \log a + X_1 \cdot \log b_1 + X_2 \cdot \log b_2 \tag{28}$$

STATISTIX 3.5
 ID: Y X1 X2

UNWEIGHTED LEAST SQUARES LINEAR REGRESSION OF LOGPROD

PREDICTOR VARIABLES	COEFFICIENT	STD ERROR	STUDENT'S T	P
-----	-----	-----	-----	-----
CONSTANT	2.0200	1.8778E-01	10.76	0.0000
CIJENA	-3.3021E-02	8.4420E-03	-3.91	0.0058
OGLAS	3.2987E-02	1.2579E-02	2.62	0.0343

R SQUARED 0.9319 RESID. MEAN SQUARE (MSE) 1.007E-03
 ADJUSTED R SQUARED 0.9124 STANDARD DEVIATION 3.174E-02

SOURCE	DF	SS	MS	F	P
REGRESSION	2	9.6449E-02	4.8224E-02	47.87	0.0001
RESIDUAL	7	7.0512E-03	1.0073E-03		
TOTAL	9	1.0350E-01			

CASES INCLUDED 10 MISSING CASES 0

DURBIN-WATSON TEST FOR AUTOCORRELATION

DURBIN-WATSON STATISTIC 2.7462

P VALUES, USING DURBIN-WATSON'S BETA APPROXIMATION:

P (POSITIVE CORR) = 0.8028, P (NEGATIVE CORR) = 0.1972

EXPECTED VALUE OF DURBIN-WATSON STATISTIC 2.1609

EXACT VARIANCE OF DURBIN-WATSON STATISTIC 4.1396E-01

CASES INCLUDED 10 MISSING CASES 0

CORRELATIONS (PEARSON)

	LOGPROD	CIJENA	OGLAS
LOGPROD	1.0000		
CIJENA	-0.9300	1.0000	
OGLAS	0.8849	-0.7760	1.0000

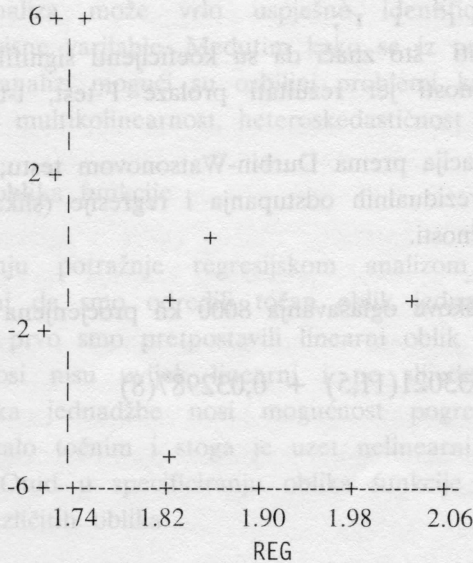
CASES INCLUDED 10 MISSING CASES 0

STATISTIX 3.5

ID: Y X1 X2

REG VS REG

REG X 10E-2



10 CASES PLOTTED

Slika 8. Dijagram rasipanja rezidualnih odstupanja i regresije

Prema računalskom ispisu regresija potražnje je

$$\log Y = 2,0200 - 0,033021 X_1 + 0,032987 X_2$$

(-3,92) (2,62)

s tim da je

$$r^2 = 0,93 ; \bar{r}^2 = 0,91 ; \log S_e = 0,03174 ; F = 47,87 ,$$

odnosno

$$S_e = 1,075 ; tS_e = 2,365(1,075) = 2,54 .$$

Dobiveni rezultati i vrednovanje *pokazuju da je model signifikantan* jer:

- (1) visoke su vrijednosti r^2 i \bar{r}^2 ;
- (2) niske su p vrijednosti što znači da su koeficijenti signifikantni;
- (3) nema multikolinearnosti jer rezultati prolaze F-test, t-test i Pearson test;
- (4) ne postoji autokorelacija prema Durbin-Watsonovom testu;
- (5) dijagram rasipanja rezidualnih odstupanja i regresije (slika 8.) pokazuje da nema heteroskedastičnosti.

Za cijenu 11,5 kn i troškove oglašavanja 8000 kn procjenjena potražnja je

$$\log Y = 2,0200 - 0,033021(11,5) + 0,032987(8)$$

$$\log Y = 1,90416$$

$$Y = 80,19$$

odnosno

$$Q = 80,19 \text{ stotina komada proizvoda}$$

pa je

$$Q_f = 80,19 \pm 2,54 \text{ stotine komada proizvoda.}$$

Dobiveni rezultat u odnosu na linearni model pokazuje bolje rezultate (manji je interval predviđanja) pa, uz pretpostavku da nema jednadžbe

koja bolje odgovara podacima, ovaj model se može koristiti kao podloga menadžeru za donošenje odluke.¹³

2.2.3. Problemi u regresijskoj analizi

Regresijska analiza može vrlo uspješno identificirati utjecaje ključnih činitelja na zavisne varijable. Međutim kako se iz provedene raščlambe vidi u regresijskoj analizi mogući su ozbiljni problemi kao što su specificiranje oblika funkcije, multikolinearnost, heteroskedastičnost i autokorelacija.

Specificiranje oblika funkcije

U procjenjivanju potražnje regresijskom analizom rijetko možemo biti potpuno sigurni da smo odredili točan oblik jednadžbe. U primjeru koji smo razmotrili prvo smo pretpostavili linearni oblik jednadžbe. Međutim, u stvarnosti odnosi nisu uvijek linearni i ne slijede pravac pa izabiranje linearnog oblika jednadžbe nosi mogućnost pogreške što se u našem primjeru pokazalo točnim i stoga je uzet nelinearni oblik koji se pokazao primjerenijim. Otud u specificiranju oblika funkcije treba biti fleksibilan i testirati više različitih oblika.

Isto tako postoji problem izostavljanja varijabli. Neuzimanje u obzir ključnih varijabli neizbježno pogoršava predviđanje. Naime, izostavljanje ključnih varijabli u biti znači da je njihov koeficijent jednak nuli te da ne utječu na potražnju. Međutim višestruka regresijska analiza jasno pokazuje da to nije točno te da izostavljene varijable također utječu i na koeficijent uključene varijable.

Multikolinearnost

Multikolinearnost se pojavljuje kad se dvije ili više nezavisnih varijabli nalaze u uskoj korelaciji. Može se otkriti ispitivanjem koeficijenta korelacije (r) između varijabli za koje se pretpostavlja da su usko povezane. Multikolinearnost postaje problem ako je vrijednost koeficijenta blizu 1 ili -

¹³ Procjena vrijednosti zavisne varijable odnosno interval ocjene može se statistički izračunati i na drugi način - vidi Šošić I., Serdar V., isto djelo, str. 286-287.

1.¹⁴ Isto tako, ako je visoka vrijednost r^2 i rezultati prođu F-test (mjerjenje sveukupne signifikancije regresijske jednadžbe) a ne prođu t-test za svaki pojedini koeficijent regresije, to je uobičajeno znak postojanja multikolinearnosti.

Pretpostavimo da menadžer vjeruje kako potražnja ovisi o cijeni proizvoda i oglašavanju ali nije siguran koliki je utjecaj svakog od ta dva činitelja. Promatrajući podatke uočava sljedeće. Prodaja se povećava kad god poduzeće snizuje cijenu i vrši agresivno oglašavanje a opada kad se cijena povećava i smanjuju troškovi oglašavanja. Postavlja se pitanje: da li su promjene u prodaji rezultat promjene cijene ili oglašavanja? Regresijska analiza ne može odvojiti efekte varijabli koje se istovremeno mijenjaju pa je nemoguće odgovoriti na to pitanje. Ako se analiza radi pomoću računala u slučaju savršene korelacije između cijene i oglašavanja dobit će se poruka o pogrešci, a u slučaju povezanog kretanja cijene i oglašavanja program će omogućiti procjenu potražnje ali će procjena biti vrlo neprecizna (standardna pogreška ocjene bit će velika a vrijednosti t-testa vrlo male). Sada se postavlja pitanje: može li poduzeće koristiti postavljenu jednadžbu regresije? Može ako će i dalje snižavati cijenu uvijek kad povećava oglašavanje. Međutim, ako poduzeće namjerava sniziti cijenu bez oglašavanja ili oglašavati bez snižavanja cijene, bit će nepouzdana predviđanje potražnje.

Problem multikolinearnosti može se prevladati ili smanjiti proširenjem veličine uzorka, korištenjem a priori informacija, pretvaranjem funkcijskog odnosa i posebice izostavljanjem jedne od varijabli u uskoj korelacijskoj svezi.¹⁵ U slučaju izostavljanja jedne od varijabli mora se voditi računa da se ne izostavi varijabla koja teorijski mora biti uključena u model jer bi njezino izostavljanje dovelo do pristranog tumačenja regresije.

¹⁴ Uobičajeno se uzima da vrijednost koeficijenta korelacije 0,7 i više upućuje na mogućnost postojanja multikolinearnosti (Keat P., Young P.K.Y., isto djelo, str. 186.), a ako je vrijednost koeficijenta iznad 0,8 multikolinearnost je ozbiljan problem (Gujarati D.N., *Basic Econometrics*, Third Edition, McGraw-Hill, Inc., New York, 1995., str. 335.).

Opširnije o otkrivanju multikolinearnosti vidi - Gujarati D.N., isto djelo, str. 335-339.

¹⁵ Vidi Hirshey M., Pappas J.L., isto djelo, str. 113-114. i Gujarati D.N., isto djelo, str. 339-344.

Heteroskedastičnost

Heteroskedastičnost se javlja kad varijanca pogreške nije konstantna za sve vrijednosti nezavisne varijable. Vrlo je česta u podacima vremenskog presjeka gdje veličina pogreške raste (češći slučaj) ili pada (rjeđi slučaj) s veličinom nezavisne varijable. Heteroskedastičnost ima za posljedicu pristrane standardne pogreške i netočne statističke testove. Postoje računalski programi za njezino otkrivanje npr. Spearmanov, Parkov, Glejserov ili Goldfeld-Quandtov test. Problem se može prevladati transformiranjem varijable regresije u oblik logaritma ili omjera prije procjenjivanja, ili uporabom složenije regresijske metode vaganih najmanjih kvadrata (dijeljenjem zavisne i svih nezavisnih varijabli s varijablom koja uzrokuje heteroskedastičnost te regresijskom analizom tih transformiranih varijabli).¹⁶

Autokorelacija

Autokorelacija ili serijska korelacija jest postojanje korelacije između uzastopnih pogrešaka ili odstupanja. To je čest problem kod podataka vremenskih serija a može biti posljedica trendova u varijablama, nelinearnosti podataka ili izostavljanja ključne varijable iz regresije. U regresijskoj analizi potražnje često je uzrokuje sporo mijenjanje cijena, dohotka ili ukusa. Kad uzastopne pogreške imaju isti predznak radi se o pozitivnoj autokorelaciji a kad često mijenjaju predznak u pitanju je negativna autokorelacija. Pozitivna autokorelacija je češća od negativne.

U slučaju autokorelacije procijenjeni parametri nisu pristrani ali su pristrane njihove standardne pogreške pa je vrijednost t-testa preuveličana. Durbin-Watsonov test pokazuje na prisutnost autokorelacije. Efekti autokorelacije mogu se ublažiti uključivanjem ključne varijable koja nedostaje, postavljanjem nelinearne regresijske jednadžbe ili specificiranjem modela potražnje pomoću promjena svake varijable u uzastopnim vremenskim razdobljima.¹⁷

¹⁶ O mogućim rješenjima problema heteroskedastičnosti vidi opširnije - Gujarati D.N., isto djelo, str. 381-387.

¹⁷ Opširnije o rješavanju problema autokorelacije vidi - isto djelo, str. 426-433.

ZAKLJUČAK

Kako potražnja ima ključnu ulogu u većini poslovnih odluka, menadžeri moraju znati stvarni odnos između potražnje i činitelja koji na nju utječu.

Problem identifikacije potražnje proizlazi iz toga što se krivulja potražnje ne može dobiti jednostavnim povezivanjem točaka koje odgovaraju pojedinim odnosima cijene i potraživane količine jer je svaka ta točka određena sjecištem različitih krivulja ponude i potražnje dobra. Ti pokazatelji mogu se koristiti jedino pod uvjetom da se zbog stabilnih utjecajnih činitelja krivulja potražnje nije pomicala za razliku od krivulje ponude, ili kad postoji dovoljno informacija koje određuju kako se u promatranom razdoblju pomicala svaka od krivulja. Ako postoje podaci o utjecajnim činiteljima na potražnju, za izvođenje krivulje i procjenu potražnje rabi se regresijska analiza, a ako se problem identifikacije ne može riješiti na taj način koriste se ankete o potrošnji i tržišni eksperimenti.

Anketa o potrošnji je marketinška tehnika kojom se prikupljaju podaci o ponašanju potrošača. Iako su u zbilji dobiveni podaci često nepouzdana, anketa o potrošnji je u nekim slučajevima nezamjenljiva a posebice u kratkoročnom procjenjivanju potražnje. Tržišnim eksperimentima moguće je dobiti točnije podatke o stvarnom ponašanju potrošača. Mogu se provoditi na zbiljskom tržištu ili u simuliranoj prodavaonici. Nedostaci eksperimenta su poteškoće koje mogu izazvati nekontrolirani dijelovi eksperimenta i smanjena mogućnost uopćavanja dobivenih rezultata što je posljedica visokih troškova i stoga malog uzorka potrošača.

Regresijska analiza je statistička tehnika za ocjenjivanje kvantitativne veze između varijable koju želimo objasniti - zavisne varijable - i jedne ili više nezavisnih varijabli. To je najraširenija metoda procjenjivanja potražnje a njezina metodologija sastoji se od specificiranja odnosno utvrđivanja oblika funkcije potražnje, procjenjivanja parametara i vrednovanja rezultata. Ako se analizira odnos između potražnje i jednog činitelja koji na nju utječe rabi se jednostavna regresijska analiza, a ako se analizira odnos između potražnje i dva ili više utjecajnih činitelja rabi se višestruka regresijska analiza. Posebnu pozornost potrebno je dati vrednovanju zbog problema

koji mogu nastati kao posljedica specificiranja oblika funkcije potražnje, multikolinearnosti, heteroskedastičnosti i autokorelacije.

LITERATURA

- Cassimatis P., *Introduction to Managerial Economics*, Routledge, London, 1996.
- Gujarati D.N., *Basic Econometrics*, Third Edition, McGraw-Hill, Inc., New York, 1995.
- Hirschey M., Pappas J.L., *Fundamentals of Managerial Economics*, Fifth Edition, The Dryden Press, Forth Worth, 1995.
- Keat P., Young P.K.Y., *Managerial Economics*, Maxwell Macmillan International Editions, Singapore, 1992.
- Pappas J.L., Brigham E.F., *Managerial Economics*, Third Edition, Holt-Saunders International Editions, The Dryden Press, Hinsdale, Illinois, 1979.
- Salvatore D., *Ekonomija za menedžere*, drugo izdanje, MATE, Zagreb, 1994.
- Samuelson W.F., Marks S.G., *Managerial Economics*, Second Edition, The Dryden Press, Forth Worth, 1995.
- Šošić I., Serdar V., *Uvod u statistiku*, deveto izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

Đuro Benić, PhD.Sc.

Associate Professor

Faculty of Tourism and Foreign Trade, Dubrovnik

TECHNIQUES OF DEMAND ESTIMATION

Summary

Managers need to know techniques of demand estimation to facilitate effective business decisions. In estimating demand, three basic methods are used, of which two are marketing techniques - surveys on consumption and market experiments. The most beneficial and most used method of estimating demand is regression analysis. In regression analysis, special attention should be given to the evaluation of the model, due to problems which may arise as a result of specifying the form of demand function, multicollinearity, heteroscedasticity and autocorrelations.

Key words: demand, identification problem, survey on consumption, market experiment, regression analysis