

## Sudoku – napredne metode rješavanja (5.1)

Žarko Čulić<sup>1</sup>

Metode koje smo do sada obradili dovoljne su za uspješno rješavanje velike većine sudokua, uključujući i svih onih u dnevnim tiskovinama. Podsjetimo se koje su to metode: a) osnovne metode (četiri klasične: metoda eliminacije po redcima i stupcima, metoda pretraživanja, metoda pozicioniranja i metoda jednoznačno određenog broja, ili jedna jednostavna i brza: metoda skeniranja plus osnovno pozicioniranje); b) standardne metode (upis kandidata te njihova eliminacija na temelju: (1) utvrđivanja jednoznačnog broja, (2) pronađenih podskupova: parova, trojki, četvorki i petorki, (3) položaja nekog kandidata u određenom kvadratu, (4) položaja nekog kandidata u određenom retku ili stupcu, i rijetko (5) gotovo zaključenih kandidata u određenom kvadratu i retku ili stupcu); te c) četiri grupe naprednih metoda: krila, jednoznačnost, mreže i jednostavni lanci.

No, navedene metode neće biti dovoljne za teške, vrlo teške (*unfair, fiendish*) i ekstremno teške sudokue (*ekstreme, nightmare*). Postoji nekoliko grupa metoda koje mogu pomoći pri rješavanju takvih sudokua, a nisu toliko komplicirane i složene kao *napredni lanci*. U ovom nastavku ćemo obraditi grupu metoda koju nazivamo *bojanje (Coloring)*. To je tehnika u kojoj se analizira jednog kandidata (*single digit technique*) i ima brojne varijante s različitim stupnjevima složenosti od koji ćemo ovdje obraditi dvije osnovne varijante: *Simple Colors* i *Multi Colors*. *Metode bojanja* omogućuju brže pronalaženje (običnih i/ili složenih) *lanaca*, budući da su one puno jednostavnije nego pretraživanje cijelog sudokua u svrhu pronalaženja *lanaca*.

Kod metode *jednostavnog bojanja (Simple Colors)* traži se povezano područje (redak, stupac ili kvadrat) u kojem postoje samo dva polja s određenim kandidatom (*jaka povezanost* između istog kandidata u ta dva polja) i ta polja se naizmjenice označavaju s dvije različite boje. U metodi bojanja se brojevi s takvom *jakom vezom (strong link)* nazivaju *konjugirani par (conjugate pair)*. Može se odabrati bilo koji kandidat i krenuti iz bilo kojeg polja u mreži, no najbolje je da postoji neki red i da izabrani kandidat ima više konjugiranih parova. Nakon što je završeno bojanje svih polja s traženim kandidatom, mreža se pretražuje radi pronalaska kontradikcija koje dovode do eliminacije tog kandidata iz određenih polja. Primjenom dvije različite boje za konjugirane parove istog kandidata, samo kandidati u poljima jedne boje mogu biti točni tako da možemo eliminirati sve kandidate označene drugom bojom.

Moguće su sljedeće kontradikcije nakon bojenja svih polja kod *Simple Colors metode*:

1. traženog kandidata možemo eliminirati iz svih neobojenih polja koja vidi polja s obje boje (Color Trap)
2. traženog kandidata možemo eliminirati iz svih polja s istom bojom koja se međusobno vide (Color Wrap).

Prva kontradikcija proizlazi iz činjenice da su točni kandidate ili jedne ili druge boje, pa ako polje sadrži tog kandidata i vidi (nalazi se u povezanom području) obje boje, očito je da on ne može biti točan. Druga kontradikcija proizlazi iz činjenice da su točni ili svi ili nijedan kandidat jedne boje, pa ako su kandidati obojeni određenom bojom točni ne smiju se međusobno vidjeti jer bi tada u povezanom području imali više polja s točnim kandidatom, što je protivno osnovnom pravilu.

<sup>1</sup> Autor je predavač na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: zculic@math.hr

Metoda se zove bojanje, jer se polja u različitim bojama najlakše razaznaju i uoče eventualne kontradikcije. Umjesto boja može se koristiti i različito označavanje konjugiranih parova, npr. zaokruživanjem i uokvirivanjem ili podcrtavanjem s jednom i dvije crtice, ili pak prepisivanjem samo tog kandidata u prazni obrazac s različitim kemijskim olovkama. Bitno je da se polja parova jednoznačno razlikuju. Traženje konjugiranih parova može početi od bilo kojeg polja u mreži, no nekako je uobičajeno da se kreće od prvog polja u mreži A1. Za pretraživanje je najbolje odabrati broj koji ima što više konjugiranih parova u mreži.

U primjeru na slici 1 odabrali smo broj 3 i startajući od gornjeg lijevog kuta naizmjenice obojali sva polja s konjugiranim parovima. U prvo polje smo stavili tamnosmeđu boju, a u polje njegovog para svijetlosmeđu boju. Zatim smo nastavili naizmjenično bojanje na način da konjugirani par svijetlosmeđe boje opet ima tamnosmeđu boju i tako do kraja mreže. Budući da se radi o jakim vezama između parova, odabrani broj 3 je točan ili u svim tamnosmeđim ili u svim svijetlosmeđim poljima. Neobojena polja A9, C9 i H1 vide polja s obje boje, stoga odabrani broj 3 možemo eliminirati iz tih polja. To je takozvani *Color Trap*.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	2	1	4	5	5	6	5	5	5
B	5	5	7	9	1	2	1	5	4
C	5	5	5	4	5	7	1	5	5
D	5	5	1	8	7	4	4	3	2
E	5	5	2	6	9	4	4	5	5
F	5	4	8	5	2	1	5	5	6
G	4	2	5	7	5	9	8	6	1
H	5	5	9	1	6	8	4	4	5
I	1	8	6	2	4	5	5	5	9

Slika 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	6	5	9	4	2	2	2	1	3
B	4	4	1	8	9	3	7	9	6
C	2	8	3	1	6	5	7	8	4
D	4	2	5	5	9	6	3	1	4
E	3	6	4	7	1	2	1	2	4
F	9	1	5	3	5	4	7	8	6
G	7	9	4	6	1	1	8	2	5
H	5	4	6	4	2	4	2	3	9
I	1	3	2	5	5	3	9	4	7

Slika 2.

U primjeru na slici 2 odabrali smo broj 8 i startajući od gornjeg retka naizmjenice obojali sva polja s konjugiranim parovima. U poljima iste boje koja se međusobno vide odabrani kandidat ne može biti točan (imali bi dva ili više istih brojeva u povezanom području). Vidimo da se svijetlosmeđa polja B1 i B4, B1 i C2, C2 i I2, B4 i D4 te I2 i I5 međusobno vide. Stoga broj 8 možemo eliminirati iz svih svijetlosmeđih polja, a broj 8 je točan u svim tamnosmeđim poljima. To je *Color Wrap*. Što su zelena polja B2 i I4? Ako pažljivo tražite konjugirane parove, vidjet ćete da ta polja, iako imaju broj 8 i povezana su sa susjednim svijetlosmeđim poljima, ipak nisu dio konjugiranih parova i stoga iz njih ništa ne možemo eliminirati ovom metodom.

Metoda *višestrukog bojanja (Multi Colors)* koristi više od jednog para različitih boja za bojanje područja konjugiranih parova s istim kandidatom čija početna polja ne čine konjugirani par, odnosno ako se međusobno vide, barem je tri polja s odabranim kandidatom u povezanom području. Najčešće se koriste dva para različitih boja, a početna polja ta dva para možemo odabrati bilo gdje u mreži s tim da ona ne smiju imati *jaku povezanost* na odabranom kandidatu, odnosno prvi par ne smije činiti dio mreže konjugiranih parova drugog para.

Nakon što je završeno bojanje polja s odabranim kandidatom, sudoku se pretražuje radi pronalaska kontradikcija koje dovode do eliminacije pojedinih kandidata u određenim poljima.

Moguće kontradikcije nakon bojenja svih polja kod *Multi Colors metode* su sljedeće:

1. ako su dva polja od različitih konjugiranih parova međusobno povezana (*slaba veza*), tada oni ne mogu istovremeno biti točni, što implicira da je točan drugi član ili jednog ili drugog konjugiranog para i stoga možemo eliminirati odabranog kandidata iz svih polja koja vide ta oba kraja različitih konjugiranih parova (*Color Wings*)
2. ako kandidati iz polja iste boje prvog konjugiranog para vide obje boje drugog konjugiranog para, od kojih je po definiciji uvijek jedan broj u paru točan, tada jedan od tih kandidata u boji tog prvog para ne može biti točan pa se shodno definiciji da su kandidati iz jedne boje ili svi točni ili svi netočni, mogu eliminirati ti kandidati iz svih polja s tom bojom

U primjeru na slici 3 odabrali smo broj 1 i krenuli od polja A5 bojanje prvih konjugiranih parova naizmjenice tamnosmeđom i svijetlosmeđom bojom te od polja B9 bojanje drugih konjugiranih parova naizmjenice tamnoljubičastom i svijetloljubičastom bojom. Bitno je da su različiti parovi obojani različitim parovima boja i da međusobno ne čine konjugirane parove.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	3	4	9	5	6	7	8		
B	5	5	7	3	9	4	1	6	
C	1	2	6	7	8	4	3	9	5
D	7	6	9	3	8	5	4		
E	9	4	5	7	2	6			
F	4	1	2	7	8	9			
G	6	9	3	8	5	2	4	1	7
H	2	1	4	9	7	5	3	3	
I	5	7	4	6	1	9	3	2	

Slika 3.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	7	5	5	5	4	6	2	8
B	2	8	6	7	4	1	6	3	5
C	5	6	1	2	6	8	1	7	3
D	8	4	1	3	9	1	2	5	6
E	9	6	4	5	3	7	4	5	1
F	5	1	4	3	3	2	4	3	3
G	1	2	2	3	2	3	6	6	2
H	6	8	9	1	6	5	4	2	
I	6	5	8	2	4	3	1	2	

Slika 4.

Vidimo da su u ovom primjeru dva kraja konjugiranih parova u poljima A7 i B9 međusobno povezana pa ne mogu biti istovremeno točna, već je 1 ili u A5 (tamnosmeđa) ili u E9 (svijetloljubičasta), stoga možemo eliminirati 1 iz svih polja koja vide te obje boje. Konkretno možemo eliminirati broj 1 iz polja E2 i E3 jer vide polja i s tamnosmeđom i svijetloljubičastom bojom.

Pogledajmo primjer na slici 4. Odabrali smo broj 3 i krenuli od polja A1 bojanje prvih konjugiranih parova te od polja E3 bojanja drugih konjugiranih parova različitim parovima boja. Budući da svijetlosmeđe obojeno polje F2 vidi svijetloljubičasto polje drugog para F9, a svijetlosmeđe polje H6 vidi tamnoljubičasto polje drugog para, možemo eliminirati 3 iz svih svijetlosmeđih polja. Naime, po definiciji konjugiranog para, odnosno jake veze, jedan broj para mora biti točan, a kako kandidati iz svijetlosmeđe boje drugog para vide obje boje prvog para, jedino logično rješenje je da kandidati u toj boji ne mogu biti točni.

Postoje i druge napredne metode koje spadaju pod tehnike bojanja poput *Week Colors* (*Simple Colors + Hinge*) koja predstavlja proširenje *Simple Colors* metode, *X-Colors* (*eXtended Colors*) koju možemo smatrati proširenjem *Week Colors* metode te *3D Medusa* (*Advanced Coloring*) koja za razliku od svih prethodnih metoda bojanja, analizira i može eliminirati više različitih znamenki istodobno. Više o navedenim metodama možete naći u stranoj literaturi i na internetu.

Zadaci za vježbu s rješenjima:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A									
B			3	9	4			6	
C		2		8				7	
D					5			9	3
E	1	3		6		9		4	7
F	5	7			3				
G		4				7		3	
H		5			8	6	2		
I									

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	6	9	5	1	7	3	4	8	2
B	7	8	3	9	4	2	1	6	5
C	4	2	1	8	6	5	3	7	9
D	2	6	4	7	5	1	8	9	3
E	1	3	8	6	2	9	5	4	7
F	5	7	9	4	3	8	6	2	1
G	8	4	2	5	1	7	9	3	6
H	9	5	7	3	8	6	2	1	4
I	3	1	6	2	9	4	7	5	8

Slika 5.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A		1			5		2		9
B				3					
C	5		6			4	1		7
D			3			2			
E	6								5
F				1			3		
G	1		7	2			6		3
H						9			
I	4		9		6				1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	8	1	4	6	5	7	2	3	9
B	7	9	2	3	8	1	4	5	6
C	5	3	6	9	2	4	1	8	7
D	9	4	3	5	7	2	8	6	1
E	6	7	1	4	3	8	9	2	5
F	2	5	8	1	9	6	3	7	4
G	1	8	7	2	4	5	6	9	3
H	3	6	5	8	1	9	7	4	2
I	4	2	9	7	6	3	5	1	8

Slika 6.