



## Coulombov zakon i Lorentzova sila

Miroslav Dorešić<sup>1</sup>

### Sažetak

Sličnost između elektriciteta i magnetizma otkrio je, prije više od 150 godina, J. C. Maxwell. Od tada je fizika jako napredovala u unificiranju sila, ali u srednjoj školi učenici i danas električnu i magnetsku silu uče gotovo na isti način kako se to radilo u 19. stoljeću. Već tada su fizičari uvidjeli da Maxwellove jednačbe nisu invarijantne na Galilejeve transformacije, tj. prepostavimo li da vrijede u jednom inercijalnom sustavu ne možemo zaključiti da vrijede i u nekom drugom. To je po prvi puta bacilo sumnju na ispravnost Galilejevih transformacija između dva inercijalna sustava. Lorentz i Poincaré su uspjeli iskonstruirati transformacije koje osiguravaju invarijantnost Maxwellovih jednačbi prelaskom iz jednog inercijalnog sustava u drugi.

Već učenik srednjoškolske dobi, posebno ako voli fiziku, može intuitivno osjetiti da postoji veza između električne i magnetske sile, ali redovni nastavni sadržaji mu ne daju pravi odgovor na takva razmišljanja. U radu je prikazano kako se tu prvu unifikaciju sila u prirodi može lako približiti srednjoškolcima, odnosno kako se Amperovu silu može izvesti iz Coulombovog zakona.

### Uvod

S obzirom da se u srednjoj školi obrađuje Gaussov zakon, a tada i njegova primjena za izračunavanje električnog polja električnih naboja razmještenih na pravcu linearne gustoće  $\lambda$ , ali i primjena Amperovog zakona na ravnu struju, to je najzgodnije uzeti ta dva primjera za ilustraciju unifikacije električne i magnetske interakcije. Upravo nevjerovatna je činjenica da niti u jednom srednjoškolskom udžbeniku, te niti u jednom udžbeniku opće fizike koja se predaje na fakultetima nitko ne spominje, a kamoli izvodi notornu činjenicu da STR (Einsteinova specijalna teorija relativnosti) povezuje spomenuta dva izraza. Dakle, nakon punih 112 godina, od 1905., kada je STR i objavljena! Da pojasnimo, kad ne bi vrijedila STR ne bi postojao ni magnetizam! Uređaji poput elektromotora, elektromagnetskih dizalica, pa ako hoćete i supravodljivih magneta ne bi postojali. Genijalnost Alberta Einsteina sastoji se upravo u tome da je žrtvovavši apsolutnost prostora i vremena, nama ljudima tako zorne i prirodne, omogućio suštinsko razumijevanje prirodnih zakona i njihovo povezivanje.

<sup>1</sup> Autor je teorijski fizičar u mirovini, Zagreb; e-pošta: doresic@irb.hr

## Primjena Gaussovog zakona na linearnu raspodjelu naboja

Pretpostavimo da se naboji gibaju duž pravca brzinom  $V$  koji se podudara s  $x$  i  $x'$  osi koordinatnog sustava  $S$  i  $S'$ , respektivno, i da je linearna gustoća naboja duž pravca  $x'$   $\lambda_0$  u sustavu  $S'$  koji se giba zajedno s nabojima, tj. naboji u tom sustavu miruju. Jakost električnog polja u točki na udaljenosti  $d$  od pravca u sustavu mirovanja naboja je

$$E' = \frac{\lambda_0}{2\pi d\epsilon_0}. \quad (1)$$

S  $\gamma(V)$  označimo izraz

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (2)$$

Lorentz-Einsteinove transformacije za inercijalne sustave  $S$  i  $S'$ , a gdje je  $V$  iznos brzine kojom se sustav  $S'$  giba u odnosu na  $S$  duž osi  $x$  i  $x'$ , koje se podudaraju kao i ishodišta sustava  $O$  i  $O'$  u trenutku  $t = t' = 0$ , glase:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(V)(x - Vt) \\ y' &= y, \quad z' = z \\ t' &= \gamma(V)\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), \end{aligned} \quad (3)$$

pri prijelazu iz inercijalnog sustava  $S$  u  $S'$  i obrnuto,

$$\begin{aligned} x &= \gamma(V)(x' + Vt') \\ y &= y', \quad z = z' \\ t &= \gamma(V)\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right), \end{aligned} \quad (4)$$

pri prijelazu iz inercijalnog sustava  $S'$  u  $S$ .

Označimo s  $\vec{v}$  i  $\vec{v}'$  brzine čestice naboja  $Q$  u sustavu  $S$ , odnosno  $S'$ , respektivno. Relativistička transformacija komponente brzine čestice naboja  $Q$  okomite na smjer translacije sustava  $S'$  prema sustavu  $S$  brzinom  $\vec{V}$  jest

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma(V)\left(1 + \frac{V}{c^2}v'_x\right)}. \quad (5)$$

Komponenta sile na česticu naboja  $Q$  okomito na smjer translacije je

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} \quad (6)$$

gdje je

$$p_y = m_0\gamma(v)v_y = \frac{m_0v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7)$$

S obzirom da je  $t' = \gamma(V)\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$ , dobivamo

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma(V)\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right). \quad (8)$$

Lako je pokazati da vrijedi

$$\gamma(v) = \gamma(V)\gamma(v')\left(1 + \frac{V}{c^2}v'_x\right) \quad (9)$$

kao i simetrična jednakost

$$\gamma(v') = \gamma(V)\gamma(v)\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right). \quad (10)$$

Koristeći (3), (4), (5), (6) i (7) dobijemo

$$F_y = \gamma(V)\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right)\frac{d}{dt'}(m_0\gamma(v')v'_y) \quad (11)$$

$$F_y = \gamma(V)\left(1 - \frac{V}{c^2}v_x\right)\frac{dp'_y}{dt'}, \quad (12)$$

a korištenjem jednakosti (8) konačno dobijemo

$$\gamma(v)F_y = \gamma(v')F'_y. \quad (11)$$

Iz jednakosti (1) i uzimajući u obzir da je zbog Lorentzove kontrakcije u sustavu  $S$  linearna gustoća naboja  $\lambda$  na pravcu uvećana za faktor  $\gamma(V)$ , dobivamo

$$F'_y = QE' = Q\frac{\lambda}{2\pi d\epsilon_0}\gamma^{-1}(V), \quad (14)$$

a što uz jednakost (10) i oznaku  $\mu_0 = \frac{1}{c^2\epsilon_0}$  daje

$$F_y = Q\frac{\lambda}{2\pi d\epsilon_0} - Qv_x\mu_0\frac{\lambda V}{2\pi d}. \quad (15)$$

S obzirom da je jakost struje koja teče duž osi  $x$  jednaka

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\lambda\Delta x}{\Delta t} = \lambda V, \quad (16)$$

možemo konačno pisati

$$F_y = Q\frac{\lambda}{2\pi d\epsilon_0} - Qv_x\mu_0\frac{I}{2\pi d}. \quad (17)$$

Očito drugi član u prethodnoj jednakosti sadrži magnetsko polje, a cijeli taj član je Lorentzova sila na česticu s nabojem  $Q$ . Prvi član je elektrostatska sila na naboj  $Q$  u sustavu  $S$ .

$$|\vec{B}| = \mu_0\frac{I}{2\pi d}, \quad |\vec{F}_L| = Qv_x|\vec{B}|. \quad (18)$$

Dakle, primjena Lorentz-Einsteinovih transformacija na izraz za električno polje naboja smještenih na pravcu dovodi do pojave magnetske sile koju poznajemo pod nazivom Lorentzova sila, a u čijem izrazu figurira veličina koju tradicionalno zovemo magnetsko polje ili magnetska indukcija.

## Primjena dobivenih rezultata na vodič kojim teče električna struja

Zamislimo vodič beskonačne duljine koji miruje u sustavu  $S$  (pozitivne jezgre), a elektronski plin se giba brzinom  $V$  i s njime sustav  $S'$ . Pored žice paralelno s njom giba se naboj  $Q$  brzinom  $v_x$  u sustavu  $S$ . Linearna gustoća pozitivnog naboja u vodiču koji miruje u sustavu  $S$  je  $\lambda_+ = \lambda_0$ , a s  $\lambda'_-$  označimo iznos linearne gustoće elektronskog plina koji se giba zajedno sa sustavom  $S'$  brzinom  $V$  u odnosu na sustav  $S$ , pa je također  $\lambda'_- = \lambda_0$ .

Sila na naboj  $Q$  od pozitivnog naboja (atomske jezgare) na udaljenosti  $d$  od vodiča u sustavu  $S$  i  $S'$  je respektivno:

$$F_+ = Q \frac{\lambda_+}{2\pi d \epsilon_0} \quad (19)$$

$$F'_+ = \frac{\gamma(v)}{\gamma(v')} F_+ = \gamma(V) \left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x\right) F_+ = Q \frac{\lambda'_+}{2\pi d \epsilon_0} + Q v'_x \mu_0 \frac{\lambda'_+ V}{2\pi d}, \quad (20)$$

gdje je  $\lambda'_+ = \gamma(V) \lambda_+ = \gamma(V) \lambda_0$ .

Sila pak na naboj  $Q$  od negativnih naboja (elektronskog plina) na udaljenosti  $d$  od vodiča u sustavu  $S'$  i  $S$  je kako slijedi:

$$F'_- = -Q \frac{\lambda'_-}{2\pi d \epsilon_0} \quad (21)$$

$$F_- = \frac{\gamma(v')}{\gamma(v)} F'_- = \gamma(V) \left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right) F'_- = -Q \frac{\lambda_-}{2\pi d \epsilon_0} + Q v_x \mu_0 \frac{\lambda_- V}{2\pi d}, \quad (22)$$

gdje je  $\lambda_- = \gamma(V) \lambda'_- = \gamma(V) \lambda_0$ .

Iz jednakosti (19) i (22) vidi se da je u sustavu  $S$  ukupna električna sila na naboj  $Q$  jednaka

$$F_e = \frac{Q}{2\pi d \epsilon_0} (\lambda_+ - \lambda_-) = \frac{Q \lambda_0}{2\pi d \epsilon_0} (1 - \gamma(V)), \quad (23)$$

a magnetska sila na naboj  $Q$  koji se giba brzinom  $v_x$  paralelno s vodičem jest

$$F_m = Q v_x \mu_0 \frac{\lambda_- V}{2\pi d} = Q v_x \mu_0 \frac{I}{2\pi d}, \quad (24)$$

gdje je  $I = \lambda_- V$  jakost električne struje elektronskog plina u vodiču mjerene iz sustava  $S$ .

Iz jednakosti (20) i (21) vidi se da je u sustavu  $S'$  ukupna električna sila na naboj  $Q$  jednaka

$$F'_e = \frac{Q}{2\pi d \epsilon_0} (\lambda'_+ - \lambda'_-) = \frac{Q \lambda_0}{2\pi d \epsilon_0} (\gamma(V) - 1), \quad (25)$$

a magnetska sila na naboj  $Q$  koji se giba brzinom  $v'_x$  paralelno s vodičem jest

$$F'_m = Q v'_x \mu_0 \frac{\lambda'_+ V}{2\pi d} = Q v'_x \mu_0 \frac{I'}{2\pi d}, \quad (26)$$

gdje je  $I' = \lambda'_+ V$  jakost električne struje pozitivnih jezgara u vodiču mjerene iz sustava  $S'$ .

## Diskusija i zaključak

Ključno pitanje je kolika je zapravo kolektivna brzina elektronskog plina u vodiču kojim teče električna struja u našim 'normalnim zemaljskim' uvjetima. Da bismo načinili prosudbu reda veličine te brzine, a to onda znači i red veličine naše brzine  $V$ , brzine translacije inercijalnih sustava  $S$  i  $S'$  u našem izvodu, uzet ćemo bakreni vodič presjeka  $1 \text{ mm}^2$  kojim teče električna struja jakosti  $1 \text{ A}$ . To je dovoljno za općenitost!

Označimo li s  $A$  površinu presjeka vodiča, s  $I$  jakost električne struje u vodiču, s  $\rho_e$  gustoću elektronskog plina u vodiču, s  $M_{\text{Cu}}$  molarnu (atomsku) masu bakra, s  $N_A$  Avogadrov broj, s  $e$  naboj elektrona, a s  $\rho_m$  masenu gustoću bakra, vrijede sljedeće relacije:

$$V = \frac{I}{A\rho_e}, \quad \rho_e = \frac{2eN_A\rho_m}{M_{\text{Cu}}}. \quad (27)$$

Faktor 2 u izrazu dolazi zbog činjenice da se dva elektrona iz zadnje ljuske atoma bakra oslobađaju i čine elektronski plin u metalnoj rešetki. Uvrstivši gore navedene numeričke podatke dobijemo kolektivnu brzinu elektronskog plina u vodiču kojim teče električna struja u našim 'normalnim zemaljskim' uvjetima:

$$V = 0.0369 \text{ mm/s}, \quad (28)$$

a zbog čega je

$$\gamma(V) - 1 = 7.5736 \dots \cdot 10^{-27}. \quad (29)$$

Sada je na kraju nužno u izrazima (23) i (24) za sustav  $S$  (analogno i u izrazima (25) i (26) za sustav  $S'$ ) izdvojiti dijelove

$$\frac{F_e d}{Q} = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}(1 - \gamma(V)), \quad \frac{F_m d}{Q} = v_x \mu_0 \frac{I}{2\pi} \quad (30)$$

i međusobno ih usporediti za neki proizvoljan iznos brzine  $v_x$  naboja  $Q$  u  $x$  smjeru, na primjer  $1 \text{ m/s}$ . Kako je u našem primjeru uzetih numeričkih vrijednosti  $\lambda_0 = \rho_e A = 2.70838 \cdot 10^{10} \text{ C/m}^3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 2.70838 \cdot 10^4 \text{ C/m}$ , dobivamo

$$\frac{F_e d}{Q} = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}(1 - \gamma(V)) = -3.7 \cdot 10^{-12} \text{ Nm/C} \quad (31)$$

$$\frac{F_m d}{Q} = v_x \mu_0 \frac{I}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Nm/C}. \quad (32)$$

Relacije (31) i (32) pokazuju da je relativistički učinak u prilog magnetske sile 100 tisuća puta veći od učinka u korist elektrostatske sile.

Dakle, magnetsko polje koje stvara električna struja koja teče vodičem nastaje kao relativistički efekt gibanja elektronskog plina u vodiču čija je brzina totalno nerelativistička. Dakle, to je relativistički efekt od nerelativističke brzine!