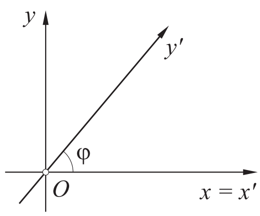
Kosokutni koordinatni sustav

Maja Starčević[1]

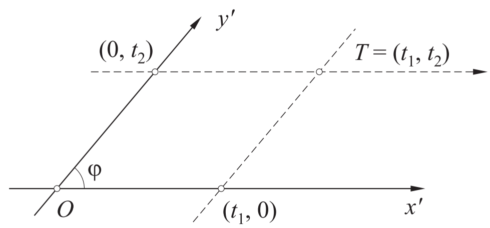


Slika 1.

Koordinatni sustav koji najčešće koristimo je pravokutni koordinatni sustav. Međutim, u primjenama se ponekad ispostavi da je neke probleme lakše riješiti prijelazom na neki drugi tip sustava kao što su npr. sferni i cilindrički (polarni) koordinatni sustav. Postoji i sustav koji je dosta blizak pravokutnom koordinatnom sustavu i također nalazi svoje mjesto u primjenama. Radi se o kosokutnom koordinatnom sustavu. Njegova osobitost je u tome što mu koordinatne osi nisu postavljene okomito.

Promatrat ćemo kosokutni koordinatni sustav u ravnini kod kojeg koordinatne osi zatvaraju kut φ (slika 1).

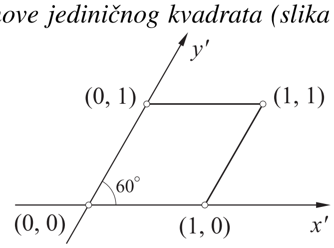
Postavimo prvo pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u točki O i koordinatnim osima x i y. Sada postavimo kosokutni koordinatni sustav s ishodištem u točki O i koordinatnim osima x' i y' tako da se os x' podudara s osi x, dok os y' čini kut φ s osi x'. Pretpostavljamo da je $0° < \varphi < 180°$, $\varphi \neq 90°$.



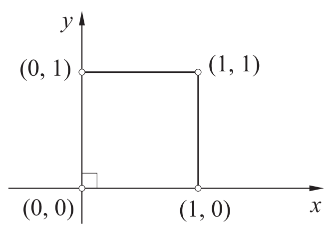
Slika 2.

Ako su koordinate točke T u pravokutnom sustavu jednake (x, y), koordinate iste točke u kosokutnom sustavu označavat ćemo s (x', y'). Iako se često kaže da koordinate u pravokutnom sustavu možemo pronaći tako da spustimo okomice iz točke na svaku od koordinatnih osi i očitamo pripadne vrijednosti, taj postupak možemo i drugačije opisati. Naime, koordinate točke očitavamo iz presjeka koordinatnih osi s pravcima koji prolaze kroz zadanu točku i paralelni su s koordinatnim osima. Upravo na taj način određujemo koordinate točaka u kosokutnom koordinatnom sustavu. Potrebno je dakle naći projekciju točke na svaku od koordinatnih osi u smjeru druge koordinatne osi i očitati odgovarajuće koordinate (slika 2).

Primjer 1. *Neka je zadan kosokutni koordinatni sustav za koji je* $\varphi = 60°$. *Uzmimo četverokut kojem su vrhovi u točkama* $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ *i* $(0,1)$. *U tom sustavu zadane točke predstavljaju vrhove romba sa stranicom duljine 1 i kutom* $60°$ *(slika 3). Za usporedbu, točke s istim koordinatama bi u pravokutnom sustavu predstavljale vrhove jediničnog kvadrata (slika 4).*



Slika 3.



Slika 4.

[1] Autorica je s Matematičkog odsjeka PMF-a, Zagreb; e-pošta: `mstarcev@math.hr`

Sada nas zanima veza između koordinata (x, y) i (x', y') točke T u pravokutnom, odnosno u kosokutnom koordinatnom sustavu. Najlakše ćemo ju naći koristeći vektorski zapis. Neka su $\vec{\imath}$ i $\vec{\jmath}$ jedinični vektori u smjeru osi x i y, dok su $\vec{\imath}'$ i $\vec{\jmath}'$ jedinični vektori u smjeru osi x' i y' redom. Tada je

$$\overrightarrow{OT} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' \ .$$

Kako je $\vec{\imath}' = \vec{\imath}$ i $\vec{\jmath}' = \cos\varphi\vec{\imath} + \sin\varphi\vec{\jmath}$, imamo

$$x = x' + \cos\varphi \cdot y', \qquad y = \sin\varphi \cdot y' \ . \tag{1}$$

Obratno, iz pravokutnih koordinata u kosokutne prelazimo zamjenom

$$x' = x - \operatorname{ctg}\varphi \cdot y, \qquad y' = \frac{y}{\sin\varphi} \ . \tag{2}$$

Nadalje, zanima nas kako prijelaz iz pravokutnog u kosokutni koordinatni sustav utječe na jednadžbu pravca. Neka je zadan pravac $p \ldots ax + by + c = 0$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ u pravokutnom koordinatnom sustavu. Koristeći zamjenu koordinata (1) dobivamo da je u kosokutnom koordinatnom sustavu jednadžba istog pravca dana s

$$a(x' + \cos\varphi \cdot y') + b\sin\varphi \cdot y' + c = 0 \ ,$$

odnosno

$$ax' + (a\cos\varphi + b\sin\varphi)y' + c = 0 \ .$$

Prvo što se može primijetiti je da je oblik jednadžbe pravca ostao jednak, odnosno jednadžba se postavlja pomoću polinoma prvog stupnja u dvije varijable. Pritom je došlo do modifikacije u jednom koeficijentu jednadžbe. Zadani pravac u kosokutnom sustavu ima dakle jednadžbu $a'x' + b'y' + c' = 0$, gdje je

$$a' = a, \qquad b' = a\cos\varphi + b\sin\varphi, \qquad c' = c \ . \tag{3}$$

Očito vrijedi i $(a')^2 + (b')^2 \neq 0$.

Eksplicitni oblik jednadžbe pravca p u pravokutnom sustavu, za $b \neq 0$, glasi $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = kx + \ell$. Analogno možemo zapisati eksplicitni oblik jednadžbe pravca u kosokutnom sustavu, za $b' \neq 0$. On glasi $y' = -\frac{a'}{b'}x' - \frac{c'}{b'} = k'x' + \ell'$. Koeficijent ℓ' i ovdje predstavlja odsječak pravca na drugoj osi sustava, odnosno na osi y'. S druge strane, znamo $k = -\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)}$, gdje je α kut između pravca p i osi x. U kosokutnom sustavu zbog (3) za $b \neq 0$ imamo sljedeću interpretaciju analognog koeficijenta:

$$\begin{aligned} k' &= -\frac{a'}{b'} = -\frac{a}{a\cos\varphi + b\sin\varphi} = -\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}\cos\varphi + \sin\varphi} \\ &= \frac{\operatorname{tg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha\cos\varphi + \sin\varphi} = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi\cos\alpha - \sin\alpha\cos\varphi} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi - \alpha)} \ . \end{aligned}$$

Lako je vidjeti da za $b = 0$, zbog $\alpha = 90^\circ$, formula također vrijedi.

Proučimo nadalje hoće li se sačuvati kriteriji koje imamo za paralelnost i okomitost pravaca u pravokutnom sustavu. Neka su dana dva pravca p_1 i p_2 čije su jednadžbe u pravokutnom sustavu $p_1 \ldots a_1x + b_1y + c_1 = 0$ i $p_2 \ldots a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Zapišimo i njihove jednadžbe u kosokutnom sustavu koristeći formule (3). Imamo jednadžbe

$$p_1 \ \ldots \ a_1'x' + b_1'y' + c_1' = 0, \qquad p_2 \ \ldots \ a_2'x' + b_2'y' + c_2' = 0 \ ,$$

gdje je

$$a_1' = a_1, \qquad b_1' = a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi, \qquad c_1' = c_1 \ , \tag{4}$$

$$a_2' = a_2, \qquad b_2' = a_2 \cos\varphi + b_2 \sin\varphi, \qquad c_2' = c_2 \ . \tag{5}$$

Poznato je da su pravci p_1 i p_2 paralelni ako i samo ako vrijedi $(a_1, b_1) = \lambda(a_2, b_2)$, za neki $\lambda \in \mathbf{R}$, a to zbog relacija (4)–(5) vrijedi ako i samo ako je $(a_1', b_1') = \lambda(a_2', b_2')$. Ako su pravci p_1 i p_2 zapisani u eksplicitnim oblicima $p_1 \ \ldots \ y' = k_1'x' + \ell_1'$ i $p_2 \ \ldots \ y' = k_2'x' + \ell_2'$ u kosokutnom sustavu, onda koristeći prethodno navedeni kriterij za paralelnost zaključujemo da su ti pravci paralelni ako i samo ako je $k_1' = k_2'$. To odgovara kriteriju za paralelnost pravaca zapisanih jednadžbama u pravokutnom sustavu. Pravci $p_1 \ \ldots \ y = k_1x + \ell_1$ i $p_2 \ \ldots \ y = k_2x + \ell_2$ su paralelni ako i samo ako je $k_1 = k_2$.

Pretpostavimo sada da su pravci p_1 i p_2 okomiti. Pravci su okomiti ako i samo ako je $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$. Uvjet u kosokutnom sustavu tada glasi

$$0 = a_1a_2 + b_1b_2 = a_1'a_2' + \frac{(b_1' - a_1' \cos\varphi)(b_2' - a_2' \cos\varphi)}{(\sin\varphi)^2} \ ,$$

odnosno

$$(\sin\varphi)^2 a_1'a_2' + (b_1' - a_1' \cos\varphi)(b_2' - a_2' \cos\varphi) = 0 \ . \tag{6}$$

Zapišimo taj kriterij ako su pravci zadani u eksplicitnom obliku. U pravokutnom sustavu on glasi $k_1k_2 = -1$. Kako je $k_1' = -\dfrac{a_1'}{b_1'}$ i $k_2' = -\dfrac{a_2'}{b_2'}$, iz (6) dobivamo kriterij okomitosti u kosokutnom sustavu koji glasi

$$(\sin\varphi)^2 k_1'k_2' + (1 + k_1' \cos\varphi)(1 + k_2' \cos\varphi) = 0 \ . \tag{7}$$

Zaključujemo da uvjet okomitosti pravaca nema istu formu kao kod pravokutnog sustava, već ovisi o kutu između koordinatnih osi.

Pogledajmo i kako glasi formula za udaljenost dviju točaka u kosokutnom sustavu. Neka su dane točke T_1 i T_2 s koordinatama (x_1, y_1) i (x_2, y_2) u pravokutnom sustavu. Tada je njihova udaljenost jednaka $|T_1T_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Prijelazom na kosokutne koordinate zbog (1) imamo sljedeću formulu

$$|T_1T_2| = \sqrt{[(x_2' - x_1') + (y_2' - y_1') \cos\varphi]^2 + [(y_2' - y_1') \sin\varphi]^2} \ ,$$

iz čega dobivamo

$$|T_1T_2| = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + 2(x_2' - x_1')(y_2' - y_1') \cos\varphi} \ . \tag{8}$$

Pogledajmo još i jednadžbu pravca kroz dvije točke. Neka su zadane točke $T_1 = (x_1', y_1')$ i $T_2 = (x_2', y_2')$, $x_1' \neq x_2'$, svojim koordinatama u kosokutnom sustavu. Tražimo eksplicitnu jednadžbu pravca $y' = k'x' + \ell'$ kroz te dvije točke. Uvrštavanjem koordinata zadanih točaka u tu jednadžbu dobivamo sustav

$$k'x_i' + \ell' = y_i', \qquad i = 1, 2 \ .$$

Iz njega je lako izraziti k' i ℓ', odnosno tražena jednadžba pravca je

$$y' = y_1' + \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}(x' - x_1') \ .$$

Drugim riječima, formula za jednadžbu pravca je analogna onoj iz pravokutnog koordinatnog sustava, odnosno ne ovisi o kutu φ.

Postoje još neke formule koje imaju isti oblik i u pravokutnom i u kosokutnom koordinatnom sustavu. Uzmimo dvije točke T_1 i T_2 koje u pravokutnom sustavu imaju redom koordinate (x_1, y_1) i (x_2, y_2), a u kosokutnom (x_1', y_1') i (x_2', y_2'). Koordinate polovišta dužine $\overline{T_1T_2}$ u pravokutnom sustavu su (x_P, y_P), a u kosokutnom (x_P', y_P'). Poznato je da vrijedi

$$x_P = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_P = \frac{y_1 + y_2}{2} .$$

Sada koristeći formule (2) dobivamo

$$\begin{aligned} x_P' &= x_P - \operatorname{ctg}\varphi \cdot y_P = \frac{x_1 + x_2}{2} - \operatorname{ctg}\varphi \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &= \frac{1}{2}[(x_1 - \operatorname{ctg}\varphi \cdot y_1) + (x_2 - \operatorname{ctg}\varphi \cdot y_2)] = \frac{1}{2}(x_1' + x_2') . \end{aligned}$$

Analogno možemo vidjeti da vrijedi $y_P' = \frac{1}{2}(y_1' + y_2')$. Prema tome, dokazali smo da je formula za određivanje polovišta dužine u kosokutnom koordinatnom sustavu posve analogna onoj u pravokutnom sustavu.

Promotrimo sada formule za težište trokuta. Težište trokuta ABC s vrhovima $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ u pravokutnom sustavu ima koordinate (x_T, y_T), pri čemu je $x_T = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$, $y_T = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$. Lako je, kao i kod polovišta, dokazati da će formule za koordinate težišta u kosokutnom sustavu glasiti

$$x_T' = \frac{1}{3}(x_A' + x_B' + x_C'), \qquad y_T' = \frac{1}{3}(y_A' + y_B' + y_C') .$$

Dakle, pronašli smo još jedno svojstvo koje se ne mijenja prijelazom iz pravokutnog u kosokutni sustav.

Primjer 2. *Zadan je paralelogram $ABCD$ tako da je $|AB| = 5$, $|BC| = 10$, $\sphericalangle BAD = 75^\circ$. Pravac okomit na dijagonalu $\overline{AC}$, koji prolazi vrhom C, siječe pravce AB i AD u točkama E i F redom. Odrediti udaljenost točaka E i F.*

Rješenje. Riješimo ovaj zadatak postavljanjem kosokutnog koordinatnog sustava takvog da se njegovo ishodište O podudara s vrhom A. Os x' se podudara s pravcem AB, a os y' s pravcem AD (slika 5). Dakle, kut kosokutnog sustava je 75°. Koordinate točaka A i C u tom sustavu su redom $(0, 0)$ i $(5, 10)$. Jednadžba pravca AC je tada $y' = 2x'$. Neka je $EF \ldots y' = mx' + n$. Iz uvjeta okomitosti pravaca AC i EF (vidi (7)) imamo $2m(\sin 75^\circ)^2 + (1 + 2\cos 75^\circ)(1 + m\cos 75^\circ) = 0$.

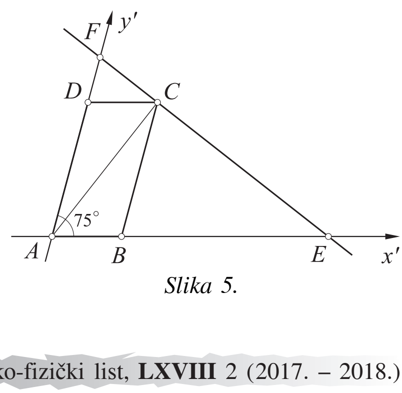
Prema tome,

$$m = -\frac{1 + 2\cos 75^\circ}{2 + \cos 75^\circ}.$$

Uvrštavanjem točke $(5, 10)$ u jednadžbu pravca EF dobivamo

$$n = \frac{5(5 + 4\cos 75^\circ)}{2 + \cos 75^\circ}.$$

Pravci AB i AD imaju redom jednadžbe $y' = 0$ i $x' = 0$ pa lako vidimo da su njihovi presjeci s pravcem EF redom točke $E = (-n/m, 0)$ i $F = (0, n)$.



Slika 5.

Prema (8) je

$$|EF| = \frac{1}{|m|}\sqrt{n^2 + m^2n^2 + 2\cos 75^\circ mn^2} \approx 20.89\ .$$

Primjer 3. *Odredimo krivulju koja je zadana jednadžbom* $(x')^2 + (y')^2 = 1$ *u kosokutnom koordinatnom sustavu s kutom* 45°.

Rješenje. Zadatak ćemo riješiti tako da zapišemo zadanu jednadžbu u pravokutnom sustavu pomoću zamjene koordinata (2). Imamo dakle, $x' = x - y$ i $y' = \sqrt{2}y$. Dobivamo jednažbu

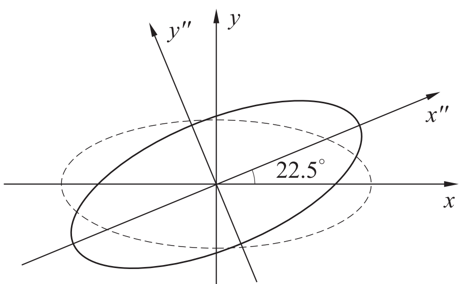
$$x^2 - 2xy + 3y^2 = 1\ . \tag{9}$$

Primjećujemo da se radi o krivulji drugog reda. Krivulju ćemo sada zapisati u novom pravokutnom koordinatnom sustavu koji se dobiva rotacijom postojećeg pravokutnog sustava oko njegovog ishodišta za kut ψ u pozitivnom smjeru. Prikladni kut ψ ćemo odrediti naknadno. Koordinate (x, y) u zarotiranom sustavu prelaze u koordinate (x'', y''). Supstitucija dakle glasi

$$x = \cos\psi \cdot x'' - \sin\psi \cdot y'', \qquad y = \sin\psi \cdot x'' + \cos\psi \cdot y''\ .$$

Uvrštavanjem u jednadžbu (9) dobivamo

$$\begin{aligned}(2 - \sin(2\psi) - \cos(2\psi))(x'')^2 + 2(\sin(2\psi) - \cos(2\psi))x''y''\\ +(2 + \cos(2\psi) + \sin(2\psi))(y'')^2 = 1.\end{aligned} \tag{10}$$



Slika 6.

Član koji sadrži $x''y''$ poništit ćemo odabirom kuta ψ za koji je $\sin(2\psi) = \cos(2\psi)$. Dakle, stavimo $\psi = 22.5^\circ$. Uvrštavanjem tog kuta u jednadžbu (10) dobivamo

$$(2 - \sqrt{2})(x'')^2 + (2 + \sqrt{2})(y'')^2 = 1\ ,$$

odnosno jednadžbu elipse s poluosima duljine $(\sqrt{2 - \sqrt{2}})^{-1}$ i $(\sqrt{2 + \sqrt{2}})^{-1}$. Konačno, zaključujemo da je zadana krivulja elipsa koja se dobiva rotacijom elipse

$$(2 - \sqrt{2})x^2 + (2 + \sqrt{2})y^2 = 1\ ,$$

za kut 22.5° u pozitivnom smjeru (slika 6).

Zaključujemo da isti oblik jednadžbe u pravokutnom i kosokutnom sustavu ne znači nužno da se radi o potpuno istoj vrsti krivulje. Naime, da je jednadžba bila zadana u pravokutnom koordinatnom sustavu, to bi bila jednadžba jedinične kružnice.

Sada uzmimo neku funkciju $f : \mathcal{D}_f \to \mathbf{R}$, gdje je $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbf{R}$. Njezin graf u pravokutnom sustavu je dan s $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}_f\}$. Označimo s $\mathcal{S}_f(x')$ skup svih rješenja jednadžbe $x - \operatorname{ctg}\varphi \cdot f(x) = x'$, za zadani x'. Iz formula za zamjenu koordinata (2) uz $y = f(x)$ dobivamo da se graf funkcije f u kosokutnom sustavu može zapisati s

$$\mathcal{G}'_f = \left\{ \left(x', \frac{f(s)}{\sin\varphi} \right) : x' \in \mathcal{D}'_f,\ s \in \mathcal{S}_f(x') \right\}\ ,$$

gdje je $\mathcal{D}'_f = \{x' \in \mathbf{R} : x' = x - \operatorname{ctg}\varphi \cdot f(x) \text{ za neki } x \in \mathcal{D}_f\}$.

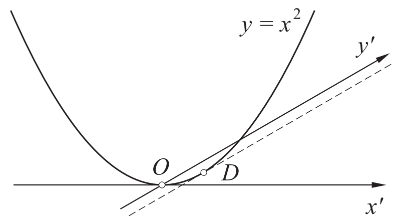
Primjer 4. *Zapišimo graf funkcije* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$*, definirane s* $f(x) = x^2$ *u kosokutnom koordinatnom sustavu s kutom* 30°.

Rješenje. U pravokutnom koordinatnom sustavu zadani graf zapisujemo kao $\mathcal{G}_f = \{(x, x^2) : x \in \mathbf{R}\}$. Jednadžba $x - \sqrt{3}x^2 = x'$ ima dva realna rješenja $x = \dfrac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - 12\sqrt{3}x'}}{6}$, za $x' < \dfrac{\sqrt{3}}{12}$ i jedno $x = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ za $x' = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Dakle, $\mathcal{S}_f(x') = \left\{ \dfrac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - 12\sqrt{3}x'}}{6} \right\}$ i $\mathcal{D}'_f = \left\langle -\infty, \dfrac{\sqrt{3}}{12} \right]$. Konačno, u zadanom kosokutnom koordinatnom sustavu možemo pisati

$$\mathcal{G}'_f = \left\{ (x', 2s^2) : x' \in \left\langle -\infty, \frac{\sqrt{3}}{12} \right],\ s = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - 12\sqrt{3}x'}}{6} \right\}.$$

Na slici 7 primjećujemo da postoje pravci paralelni y'-osi koji ne sadrže nijednu točku grafa funkcije f, što odgovara činjenici da $\mathcal{D}'_f$ nije jednak čitavom skupu $\mathbf{R}$. Također vidimo da pravci koji prolaze kroz točke $(x', 0)$, $x' < \dfrac{\sqrt{3}}{12}$, i paralelni su y'-osi sijeku graf u dvije točke, što se podudara s tim da je za te vrijednosti x' skup $\mathcal{S}_f(x')$ dvočlan skup. Samo u jednom slučaju pravac paralelan y'-osi siječe graf u samo jednoj točki, nazovimo ju D, i to za $x' = \dfrac{\sqrt{3}}{12}$. Točka D u pravokutnom sustavu ima koordinate $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}, \dfrac{1}{12}\right)$, dok u kosokutnom ima koordinate $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{12}, \dfrac{1}{6}\right)$, i to je točka dirališta jedine tangente na zadanu parabolu koja čini kut 30° s x-osi.



Slika 7.

Za kraj primijetimo da u kosokutnom koordinatnom sustavu možemo primjenjivati analogan test injektivnosti i surjektivnosti funkcije tako da promatramo pravce paralelne x'-osi i njihove presjeke s grafom funkcije. S druge strane, u presjeku grafa funkcije i pravaca paralelnih y'-osi oblika $x' = d'$, $d' \in \mathcal{D}'_f$, možemo naći i više točaka, što nikad nije slučaj s presjekom grafa funkcije i pravaca paralelnih y-osi oblika $x = d$, $d \in \mathcal{D}_f$, gdje dobivamo uvijek jedinstvenu točku.