Rješavanje modela tržišne ravnoteže pomoću diferencijske jednadžbe

Boško Šego[1], *Tihana Škrinjarić*[2]

Uvod

U članku *Rješavanje modela tržišne ravnoteže pomoću diferencijalne jednadžbe* (MFL LXV, br. 4) spomenuli smo kako se mnogi ekonomski fenomeni mogu formulirati pomoću matematičkih modela i potom analizirati te rješavati odgovarajućim matematičkim alatom. Matematička ekonomija omogućava primjenu matematičke aparature kako bi se dobili odgovori na brojna pitanja u ekonomiji. Često se pretpostavlja kako su ekonomske varijable neprekidne i diferencijabilne funkcije, što olakšava analizu i omogućuje korištenje elegantne tehnike deriviranja. Kada ekonomisti rade sa stvarnim podacima, oni raspolažu s vrijednostima ekonomskih varijabli u određenim vremenskim trenucima, pa u biti nemaju na raspolaganju neprekidne nego diskretne funkcije, to jest funkcije čija domena nije interval nego diskretan skup. Stoga ćemo ovdje razmotriti diferencijske jednadžbe kao temelj za analizu ekonomskih pojava. Rezultat rješavanja diferencijske jednadžbe je vremenska putanja, čija se dinamička stabilnost ispituje u samoj analizi. Kao i u kontinuiranom slučaju, ispitivanje dinamičke stabilnosti svodi se na utvrđivanje postojanja granične vrijednosti varijable kada vrijeme teži u beskonačnost. U ekonomiji se to naziva dugi rok.

Najprije ćemo definirati temeljne pojmove o diferencijskim jednadžbama i neke metode za njihovo rješavanje, a potom na primjeru modela tržišne ravnoteže kao tipičnom primjeru implementacije diferencijskih jednadžbi u ekonomiji prikazati rješavanje diferencijskih jednadžbi.

Općenito o linearnim diferencijskim jednadžbama prvog reda

Ako je vrijednost ekonomske veličine y ovisna o vremenu t i ako želimo istaknuti da je veza između tih veličina diskretna, pišemo $y(t) \equiv y_t$. Jednadžba oblika

$$a_2 y_{t+1} + a_1 y_t = a_3, \quad a_2 \neq 0 \tag{1}$$

gdje je $y(t) = y_t$, $t \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, tražena vremenska putanja vremena, naziva se običnom diferencijskom jednadžbom prvog reda s konstantnim koeficijentima, a_1, a_2, $a_3 \in \mathbf{R}$. Rješenje jednadžbe (1) je vremenska putanja $y(t) = y_t$. Opće rješenje nehomogene diferencijske jednadžbe (1) je superpozicija općeg rješenja pripadajuće homogene diferencijske jednadžbe (uobičajeno se kaže komplementarnog rješenja)

[1] Prof. dr. sc. Boško Šego je redoviti profesor u trajnom zvanju; e-pošta: `bsego@efzg.hr`

[2] Tihana Škrinjarić, univ. spec. oec. je asistentica na Katedri za matematiku Ekonomskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: `tskrinjaric@efzg.hr`

i partikularnog rješenja, $(y_t)_c$ i $(y_t)_P$. Komplementarno rješenje, dakle, dobivamo rješavanjem korespondentne homogene diferencijske jednadžbe:

$$a_2 y_{t+1} + a_1 y_t = 0, \quad a_2 \neq 0 \tag{2}$$

Opće rješenje jednadžbe (2) tražimo u obliku

$$(y_t)_c = Cm^t, \quad m \neq 0. \tag{3}$$

Pokažimo da je rješenje jednadžbe (2) doista funkcija dana formulom (3). Doista,

$$\begin{gathered} a_2 Cm^{t+1} + a_1 Cm^t = 0, \quad a_2 \neq 0, \quad m \neq 0, \\ (a_2 m + a_1)Cm^t = 0 \\ a_2 m + a_1 = 0 \\ m = -\frac{a_1}{a_2}. \end{gathered}$$

Dakle, normiramo li jednadžbu (2), to jest pišemo li je u obliku

$$y_{t+1} + ay_t = 0, \tag{4}$$

pri čemu je $a = \frac{a_1}{a_2}$, opće rješenje jednadžbe (2) je

$$(y_t)_c = C(-a)^t, \quad C \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

Pokažimo da je traženo opće rješenje jednadžbe (2) $(y_t)_c$ dano izrazom (3). Doista, uvrstimo li (5) u (4), nalazimo

$$y_{t+1} + ay_t = C(-a)^{t+1} + Ca(-a)^t = C(-a)^{t+1} - C(-a)^{t+1} = 0. \tag{6}$$

Partikularno rješenje dobivamo rješavajući jednadžbu (1) pretpostavljajući da je riječ o nekoj konstanti k, to jest da je:

$$(y_t)_P = k, \quad k \in \mathbf{R}, \quad \text{za svako } t. \tag{7}$$

Uvrstimo li (7) u (1), slijedi

$$a_2 k + a_1 k = a_3, \tag{8}$$

pa je kako slijedi:

$$k = \frac{a_3}{a_2 + a_1}, \tag{9}$$

pri čemu je $a_2 \neq -a_1$.

U slučaju $a_2 = -a_1$, pretpostavljamo da je partikularno rješenje oblika $(y_t)_P = k_1 t$, pri čemu je $k_1 \in \mathbf{R}$ konstanta i izraz (1) postaje:

$$a_1 k_1 (t+1) - a_1 k_1 t = a_3, \tag{10}$$

odnosno

$$k_1 = \frac{a_3}{a_1}.$$

Dakle, opće rješenje linearne diferencijske jednadžbe (1) dano je izrazom:

$$y_t = (y_t)_c + (y_t)_P = \begin{cases} C(-a)^t + \dfrac{a_3}{a_2 + a_1}, & \text{ako je } a_2 \neq a_1 \\ y_0 + t \cdot \dfrac{a_3}{a_1}, & \text{ako je } a_2 = a_1 \end{cases} \tag{11}$$

Ekonomiste zanima dinamika kretanja neke varijable u kratkom, ali i u dugom roku. Za dugi rok razmatramo limes funkcije (11) kada t teži u beskonačno, uz pretpostavku da nema nikakvih promjena koje utječu na proces opisan jednadžbom (1). Razmatramo li slučaj $a_2 \neq -a_1$, računamo limes:

$$\lim_{t\to+\infty} y_t = \lim_{t\to+\infty}\left[C(-a)^t + \frac{a_3}{a_2+a_1}\right] \tag{12}$$

čija vrijednost ovisi o vrijednosti a. Ako je $|a| < 1$, limes na desnoj strani izraza (12) jednak je $\frac{a_3}{a_2+a_1}$. Ako je $|a| > 1$, za parne vrijednosti t limes (12) teži u $+\infty$, dok za neparne vrijednosti teži u $-\infty$. Za slučaj $a = -1$ navedeni limes jednak je $C + \frac{a_3}{a_2+a_1}$. Ako je pak $a = 1$, tada je za parne vrijednosti t limes jednak $C + \frac{a_3}{a_2+a_1}$, dok je za neparne jednak $-C + \frac{a_3}{a_2+a_1}$. Zaključno, ako se radi o slučajevima $|a| < 1$ i $a = -1$, proces y ćemo nazvati stacionarnim procesom, dok za preostale slučajeve govorimo o divergentnom procesu.

U slučaju $a_2 = -a_1$, očito je riječ o divergentnom procesu.

Model tržišta jednog poljoprivrednog proizvoda

Dinamički model tržišta jednog poljoprivrednog proizvoda, kojeg je prvi put analizirao Nicholas Kaldor, je model koji pokušava objasniti fluktuacije u cijenama na određenim vrstama tržišta. Često se ovaj model veže uz poljoprivrednu proizvodnju, pri čemu proizvođači moraju donijeti odluke o cijenama jedno razdoblje unaprijed.

U ovome tržišnome modelu proizvođač donosi odluku o cijeni u sljedećem razdoblju. Stoga je ponuđena količina na tržištu Q_{st} funkcija cijene iz prethodnoga razdoblja P_{t-1}, pri čemu se pretpostavlja sljedeći funkcionalni oblik:

$$Q_{st} = aP_{t-1} - b, \quad a, b > 0. \tag{13}$$

S druge strane, količina koja se traži na tržištu u trenutku t, Q_{dt}, padajuća je i linearna funkcija cijena na tržištu u trenutku t:

$$Q_{dt} = c - dP_t, \quad c, d > 0. \tag{14}$$

Pretpostavlja se da se tržište u svakom trenutku "čisti", to jest da je ponuda jednaka potražnji:

$$Q_{st} = Q_{dt}. \tag{15}$$

Uvrstimo li (13) i (14) u (15), slijedi:

$$aP_{t-1} - b = c - dP_t \tag{16}$$

odnosno

$$dP_t + aP_{t-1} = b + c. \tag{17}$$

Izrazom (17) definirana je linearna diferencijska jednadžba prvog reda. Opće rješenje pripadajuće homogene jednadžbe nalazimo uz pretpostavku $(P_t)_c = Cm^t$, $m \neq 0$:

$$\begin{aligned} d \cdot Cm^t + a \cdot Cm^{t-1} &= 0 \ / \ : Cm^t \\ d + a \cdot m^{-1} &= 0 \\ m &= -\frac{a}{d}. \end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje pripadajuće homogene jednadžbe je $(P_t)_c = C\left(-\frac{a}{d}\right)^t$. Još valja odrediti partikularno rješenje $(P_t)_P$. To ćemo učiniti tako da pretpostavimo da je partikularno rješenje neka konstanta $k \in \mathbf{R}$, to jest da je $(P_t)_P = k$ za sve t, i navedeno uvrstimo u (17):

$$\begin{aligned} d \cdot k + a \cdot k &= b + c \\ k &= \frac{b+c}{d+a} \end{aligned} \tag{18}$$

Uočimo da je zbog uvjeta $a,\ d > 0$ nazivnik $a + d \neq 0$.

Prema tome, tražena vremenska putanja cijene je $P_t = C\left(-\frac{a}{d}\right)^t + \frac{b+c}{d+a}$, a dinamička stabilnost dobivene vremenske putanje očito ovisi o izrazu $-\frac{a}{d}$. Kako su $a,\ d > 0$, izraz $-\frac{a}{d}$ poprima negativnu vrijednost. Međutim, ako je $a > d$, radi se o divergentnom procesu, cijena će na tržištu "podivljati" i neće se ostvariti ravnoteža. Ako je $a = d$, radi se o oscilaciji cijene od vrijednosti $-\frac{aC}{d} + \frac{b+c}{d+a}$ do vrijednosti $\frac{aC}{d} + \frac{b+c}{d+a}$, dok će za $a < d$ cijena konvergirati prema cijeni $P^* = \frac{b+c}{d+a}$ i pritom se ostvaruje uvjet čišćenja tržišta.

Primjer. Zadan je model paučine za jedan proizvod na tržištu:

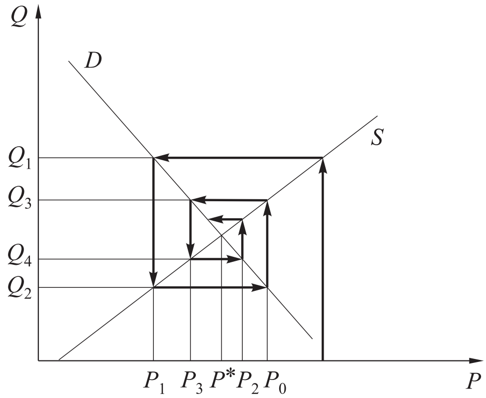
$$\begin{aligned} Q_{dt} &= 20 - 3P_t \\ Q_{st} &= -6 + P_{t-1} \\ Q_{dt} &= Q_{st} \\ P_0 &= 7.5. \end{aligned}$$

Izvedimo vremensku putanju cijene i ispitajmo njenu dinamičku stabilnost.

Iz uvjeta čišćenja tržišta slijedi jednadžba $20 - 3P_t = -6 + P_{t-1}$, odnosno $3P_t + P_{t-1} = 26$. Uz pretpostavku da je partikularno rješenje konstanta $k \in \mathbf{R}$, nalazimo da je to konstanta $(P_t)_P = k = \frac{13}{2}$. Pretpostavimo li da je $(P_t)_c = Cm^t$, $m \neq 0$, lako se pokaže da je opće rješenje pripadajuće homogene jednadžbe $(P_t)_c = C\left(-\frac{1}{3}\right)^t$. Dakle, vremenska putanja cijene dana je formulom $P_t = C\left(-\frac{1}{3}\right)^t + \frac{13}{2}$. Uvrstimo li zadani početni uvjet $P_0 = 7.5$ u dobivenu funkciju, nalazimo vrijednost konstante C. Naime, iz $P_t = C\left(-\frac{1}{3}\right)^{\circ} + \frac{13}{2} = 7.5$ slijedi $C = 1$, pa je konačno tražena vremenska putanja cijene dana formulom $P_t = \left(-\frac{1}{3}\right)^t + \frac{13}{2}$. U dugom roku na razmatranom tržištu vrijedi: $P^* = \lim\limits_{t \to +\infty} P_t = \frac{13}{2}$, što znači da će se ostvariti dugoročna ravnoteža na tržištu.

Graf dobivene vremenske putanje je dan na slici 1.

Za početnu cijenu $P_0 > P^*$ nuđena količina u razdoblju $t = 1$ bit će jednaka Q_1. Kako bi i tražena količina bila jednaka, cijena u prvom razdoblju mora biti jednaka P_1. Uz cijenu P_1 nuđena količina u sljedećem razdoblju iznosi Q_2. Postupak se ponavlja u sljedećim razdobljima, pri čemu se "plete mreža" (odatle i naziv *model paučine*) pri čemu točke vremenske putanje naizmjenično pripadaju pravcu ponude (S), odnosno pravcu potražnje (D). Naravno, uvjet čišćenja tržišta (što smo matematički zapisali koristeći jednakost $Q_{st} = Q_{dt}$) znači da dvije sukcesivne točke te mreže (riječ je primjerice o točkama (P_0, Q_1) i (P_1, Q_1)) imaju jednake ordinate, a druge dvije (čije ordinate su parnog i zatim neparnog indeksa) imaju jednake apscise. Stoga su dijelovi paučine paralelni s koordinatnim osima P, odnosno Q. Uočimo da je vremenska putanja cijene konvergentna (slika 1) i iznosi P^*.



Slika 1. Grafički prikaz modela paučine

Literatura

[1] A. C. Chiang, *Osnovne metode matematičke ekonomije*, Mate d.o.o., Zagreb, 1994.

[2] E. T. Dowling, *Introduction to mathematical economics*, McGraw Hill, USA, 2001.

[3] B. Šego, T. Škrinjarić, *Rješavanje modela tržišne ravnoteže pomoću diferencijalne jednadžbe*, Matematičko-fizički list, LXV, broj 4, pp. 240–244, 2015.

[4] B. Šego, T. Škrinjarić, V. Kojić, *Odabrana poglavlja matematičke ekonomije*, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2014.

[5] N. Kaldor, *A Classificatory Note on the Determination of Equilibrium*, Review of Economic Studies, vol. I. (February, str. 122–136, 1934.

[6] N. Kaldor, *The Cobweb Theorem*, Quarterly Journal of Economics, vol. 52, no. 2, str. 255–280, 1938.