Primjena diferencijalnog i integralnog računa na dokazivanje nekih algebarskih i trigonometrijskih jednakosti

Ilija Ilišević[1]

Neke algebarske i trigonometrijske jednakosti možemo dokazati pomoću diferencijalnog i integralnog računa. Pritom jednu stranu jednakosti označimo kao funkciju jedne varijable, zatim tu funkciju deriviramo, a nakon toga integriramo. Kada odredimo konstantu integracije, dobivamo drugu stranu jednakosti. Ponekad jednu stranu jednakosti, kao funkciju jedne varijable, najprije integriramo, a zatim deriviramo, pa dobivamo drugu stranu jednakosti. Hoćemo li najprije derivirati ili integrirati, ovisi o strukturi zadaće.

Riješit ćemo nekoliko zadataka, a zatim ćemo dati tri zadatka za vježbu.

Dokažite sljedeće jednakosti:

Zadatak 1.

$$(x+a+b)^2-(a+b-x)^2+(x+a-b)^2-(x+b-a)^2=8ax$$

Rješenje. Neka je

$$F(x)=(x+a+b)^2-(a+b-x)^2+(x+a-b)^2-(x+b-a)^2.$$

Tada je

$$F'(x)=2(x+a+b)+2(a+b-x)+2(x+a-b)-2(x+b-a)=8a.$$

Kako je $F(x)$ jedna od primitivnih funkcija funkcije $f(x)=8a$, to se ona nalazi u skupu funkcija $\int 8a\,dx$, tj. u skupu funkcija $8ax+C$. Odredit ćemo sada konstantu C, tako da je za svaki x ispunjena jednakost

$$(x+a+b)^2-(a+b-x)^2+(x+a-b)^2-(x+b-a)^2=8ax+C.$$

Uvrštavajući u posljednju jednakost, primjerice, $x=0$, dobivamo redom,

$$\begin{aligned}8a\cdot 0+C&=(0+a+b)^2-(a+b-0)^2+(0+a-b)^2-(0+b-a)^2,\\ C&=(a+b)^2-(a+b)^2+(a-b)^2-(a-b)^2,\\ C&=0.\end{aligned}$$

Prema tome,

$$(x+a+b)^2-(a+b-x)^2+(x+a-b)^2-(x+b-a)^2=8ax.$$

Zadatak 2.

$$(a+b+c+x)^2+(a+b-c-x)^2+(a+c-b-x)^2+(a+x-b-c)^2=4(a^2+b^2+c^2+x^2)$$

Rješenje. Neka je

$$F(x)=(a+b+c+x)^2+(a+b-c-x)^2+(a+c-b-x)^2+(a+x-b-c)^2.$$

Tada je

$$\begin{aligned}F'(x)&=2(a+b+c+x)-2(a+b-c-x)-2(a+c-b-x)+2(a+x-b-c)\\ &=8x.\end{aligned}$$

[1] Autor je profesor u mirovini u III. gimnaziji u Osijeku.

Stoga je

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int 8x\,dx = 4x^2 + C.$$

Dakle,

$$(a+b+c+x)^2 + (a+b-c-x)^2 + (a+c-b-x)^2 + (a+x-b-c)^2 = 4x^2 + C.$$

Da bismo odredili konstantu C, uvrstimo u posljednju jednakost, primjerice, $x = 0$. Tada je

$$(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a+c-b)^2 + (a-b-c)^2 = C.$$

Kvadriranjem trinoma i sređivanjem, dobivamo $C = 4(a^2+b^2+c^2)$. Konačno je

$$(a+b+c+x)^2+(a+b-c-x)^2+(a+c-b-x)^2+(a+x-b-c)^2 = 4(a^2+b^2+c^2+x^2).$$

Zadatak 3.

$$(x+a+b)^3 - (x+a-b)^3 - (x-a+b)^3 - (-x+a+b)^3 = 24abx$$

Rješenje. Stavimo

$$F(x) = (x+a+b)^3 - (x+a-b)^3 - (x-a+b)^3 - (-x+a+b)^3.$$

Tada je

$$F'(x) = 3(x+a+b)^2 - 3(x+a-b)^2 - 3(x-a+b)^2 + 3(-x+a+b)^2 = 24ab.$$

Odatle dobivamo

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int 24ab\,dx = 24abx + C.$$

Dakle,

$$(x+a+b)^3 - (x+a-b)^3 - (x-a+b)^3 - (-x+a+b)^3 = 24abx + C.$$

U ovu jednakost uvrstimo, primjerice, $x = 0$ i dobivamo $C = 0$. Stoga je

$$(x+a+b)^3 - (x+a-b)^3 - (x-a+b)^3 - (-x+a+b)^3 = 24abx.$$

Zadatak 4.

$$2\cos^3 x \sin x - \cos x \sin x = \frac{1}{4}\sin 4x$$

Rješenje. Neka je

$$F(x) = 2\cos^3 x \sin x - \cos x \sin x.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \big(6\cos^2 x(-\sin x)\sin x + \cos x \cdot 2\cos^3 x\big) - (-\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x) \\
&= -6\sin^2 x\cos^2 x + 2\cos^4 x - \cos^2 x + \sin^2 x \\
&= -6\cos^2 x(1-\cos^2 x) + 2\cos^4 x - \cos^2 x + 1 - \cos^2 x \\
&= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = \cos 4x.
\end{aligned}$$

Slijedi

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\sin 4x + C.$$

Odatle dobivamo

$$2\cos^3 x \sin x - \cos x \sin x = \frac{1}{4}\sin 4x + C.$$

Uvrstimo u ovu jednakost, primjerice, $x = 0$, i dobijemo $C = 0$. Dakle,

$$2\cos^3 x \sin x - \cos x \sin x = \frac{1}{4}\sin 4x.$$

Zadatak 5.

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

Rješenje. Neka je $F(x) = \sin^4 x$. Tada je

$$\begin{aligned}
\int F(x)\,dx &= \int \sin^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int (2\sin^2 x)^2\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int \Big(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int \Big(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\Big)\,dx \\
&= \frac{3}{8}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.
\end{aligned}$$

Konačno,

$$F(x) = \Big(\int F(x)\,dx\Big)' = \frac{3}{8} - \frac{1}{4}\cdot 2\cos 2x + \frac{1}{32}\cdot 4\cos 4x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.$$

Zadatak 6.

$$\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + 4\operatorname{tg} 4x + 8\operatorname{tg} 8x + 16\operatorname{ctg} 16x = \operatorname{ctg} x$$

Rješenje. Stavimo li

$$F(x) = \operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + 4\operatorname{tg} 4x + 8\operatorname{tg} 8x + 16\operatorname{ctg} 16x,$$

tada je

$$\begin{aligned}
\int F(x)\,dx &= \int \operatorname{tg} x\,dx + \int 2\operatorname{tg} 2x\,dx + \int 4\operatorname{tg} 4x\,dx + \int 8\operatorname{tg} 8x\,dx + \int 16\operatorname{ctg} 16x\,dx \\
&= -\ln|\cos x| - \ln|\cos 2x| - \ln|\cos 4x| - \ln|\cos 8x| + \ln|\sin 16x| + C_1 \\
&= -\ln\left|\frac{\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x}{\sin 16x}\right| + C_1 \\
&= -\ln\left|\frac{\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x}{2\sin 8x\cos 8x}\right| + C_1 \\
&= -\ln\left|\frac{\cos x\cos 2x\cos 4x}{4\sin 4x\cos 4x}\right| + C_1 = -\ln\left|\frac{\cos x\cos 2x}{4\cdot 2\sin 2x\cos 2x}\right| + C_1 \\
&= -\ln\left|\frac{\cos x}{8\cdot 2\sin x\cos x}\right| + C_1 = -\ln\left|\frac{1}{16\sin x}\right| + C_1 \\
&= 0 + \ln 16 + \ln|\sin x| + C_1 = \ln|\sin x| + C,
\end{aligned}$$

gdje je $C = C_1 + \ln 16$. Dakle,

$$F(x) = \left(\int F(x)\,dx \right)' = \operatorname{ctg} x.$$

Zadatci za vježbu

Dokažite sljedeće jednakosti:

1. $\sin 3x \cos^3 x + \cos 3x \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin 4x$

2. $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x + 8 \operatorname{ctg} 8x = \operatorname{ctg} x$

3. $\cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$

Literatura

[1] B. Pavković, D. Svrtan, D. Veljan, *Matematika, zbirka zadataka za treći razred usmjerenog obrazovanja*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[2] B. Pavković, D. Veljan, *Matematika 1, zbirka zadataka za prvi razred srednjeg usmjerenog obrazovanja*, Školska knjiga, Zagreb, 1986.

[3] V. V. Vasilov, S. S. Meljnikov, S. N. Olehnik, P. I. Pasičenko, *Zadači po matematike*, Načala analiza, Nauka, Moskva, 1990.