ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 28. veljače 2018. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. $4/272$.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 144.

A) Zadatci iz matematike

3609. Nađi sve prirodne brojeve a, b, c takve da su rješenja sustava jednadžbi

$$x^2-2ax+b=0$$
$$x^2-2bx+c=0$$
$$x^2-2cx+a=0$$

prirodni brojevi.

3610. Dokaži da je za svaki prirodan broj n broj $19\cdot 8^n+17$ složen.

3611. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$\frac{5x}{3x^2-x+6}-\frac{2x}{3x^2+4x+6}=-\frac{1}{10}.$$

3612. Neka su a, b, c, d pozitivni cijeli brojevi takvi da je $\log_a b=\frac{3}{2}$ i $\log_c d=\frac{5}{4}$. Ako je $a-c=9$, koliko je $b-d$?

3613. Odredi sva realna rješenja sustava jedadžbi

$$x^3-3xy^2=1$$
$$3x^2y-y^3=1.$$

3614. Unutar trokuta ABC dana je točka O takva da je $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Izračunaj omjer površina trokuta ABC i AOC.

3615. U konveksnom četverokutu $ABCD$ dane su točke M i N na $\overline{AB}$ tako da je $|AM|=|MN|=|NB|$ te P i Q na $\overline{CD}$ tako da je $|CP|=|PQ|=|QD|$. Točka O je sjecište dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Dokaži da trokuti MOP i NOQ imaju jednake površine.

3616. Neka su AA_1, BB_1, CC_1 simetrale kutova trokuta ABC s duljinama stranica a, b, c. Dokaži jednakost

$$\frac{P(A_1B_1C_1)}{P(ABC)}=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

3617. Dana je bilo koja točka P unutar stranice $\overline{AB}$ jednakostraničnog trokuta ABC, a k_1 i k_2 su kružnice upisane trokutima APC i BPC. Druga zajednička tangenta siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki Q. Dokaži da Q ne ovisi o izboru točke P.

3618. Trokut ABC upisan je u kružnicu polumjera 1. Simetrale kutova α, β, γ sijeku kružnicu u A_1, B_1, C_1, tim redom. Koliko je

$$\frac{|AA_1|\cos\frac{\alpha}{2}+|BB_1|\cos\frac{\beta}{2}+|CC_1|\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}?$$

3619. Dokaži trigonometrijsku jednakost

$$\sin^2 20^\circ+\sin^2 40^\circ+\sin^2 80^\circ=\frac{3}{2}.$$

3620. Ako realni brojevi x i y zadovoljavaju izraz

$$(x+5)^2+(y-12)^2=14^2$$

odredi minimum od x^2+y^2.

3621. Bridovi trostrane piramide $ABCD$ koji izlaze iz vrha A su u parovima okomiti i njihove duljine su a, b, c. Odredi volumen kocke upisane u piramidu čiji je jedan vrh u točki A.

3622. Odredi sumu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}\cos\frac{3\pi}{2^{n+2}}.$$

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 430. Jupiterov satelit Io je geološki najaktivnije tijelo u Sunčevom sustavu, ima više od 400 aktivnih vulkana. Od Jupitera je udaljen 421 700 kilometara, a za jedan okret oko Jupitera treba mu samo 1.77 dana. Našem Mjesecu, koji je od Zemlje prosječno udaljen 384 400 kilometara, za jedan okret treba 27.32 dana. Izračunaj brzine ovih svemirskih tijela i odredi koliko je puta Iova brzina veća od Mjesečeve.

OŠ – 431. Učenik je dobio zadatak da odredi gustoću kamena. Izmjerio je da je masa kamena 84 grama. U menzuru od 100 cm^3 je ulio 70 cm^3 vode. Kad je u menzuru stavio kamen razina se vode podigla 8 milimetara iznad oznake za 100 cm^3. Izmjerio je da razmak između oznaka za 90 cm^3 i 100 cm^3 iznosi 2 centimetra. Kolika je gustoća kamena?

OŠ – 432. Neopterećena opruga ima duljinu 10 centimetara. Njena je konstanta elastičnosti 40 N/m. Koliko utega mase 50 grama treba objesiti na nju da joj duljina bude 25 centimetara?

OŠ – 433. Kad su dva jednaka otpornika spojena serijski na izvor napona 12 V kroz njih teče struja od 200 miliampera. Kolika će struja teći kroz njih ako ih na isti izvor spojimo paralelno i na tu paralelu serijski spojimo treći otpornik od $25\ \Omega$?

1658. Pri jednoliko ubrzanom gibanju tijelo prevali put s u vremenu t. Prvih 54 % puta tijelo prevali u 65 % vremena. Kolika je početna brzina v_0, ako je konačna brzina (nakon vremena t) jednaka $10.8\ \text{m/s}$?

1659. Koliku masu bi trebala imati olovna kugla ako želimo da njezino gravitacijsko polje na površini kugle iznosi $0.001\ \text{m/s}^2$? Gustoća olova je $11\,340\ \text{kg/m}^3$. Koliki je radijus kugle?

1660. Pomoću digitalnog fotoaparata (ili mobitela) slikamo kovanicu od 5 kuna na udaljenosti od 50 cm. Na fotografiji dobijemo oštru sliku, tako da kovanica promjera 26 mm zauzima na slici krug promjera 150 pixela. Kolika je kutna razlučivost fotoaparata? Uzmimo da će fotoaparat na oštroj slici razlučiti detalje ako su udaljeni 1 pixel ili više. Kolika je linearna razlučivost na slici kovanice?

1661. Kineski satelit *Tiangong 1* past će na Zemlju početkom 2018. godine. Kolika će biti energija oslobođena padom, ako uzmemo da satelit pada iz kružne orbite visine 150 km iznad površine Zemlje? Masa satelita Tiangong 1 iznosi 8600 kg. Koliki postotak otpada na kinetičku, a koliki na potencijalnu energiju satelita? Za Zemlju uzeti $GM = 3.986 \cdot 10^{14}\ \text{m}^3/\text{s}^2$, $R = 6371\ \text{km}$.

1662. Kemijski element platina (Pt) u prirodi ima šest izotopa prosječne mase $195\,\text{g/mol}$. Međutim najlakši i najmanje zastupljen ^{190}Pt je radioaktivan (α-emiter) s vremenom poluraspada 650 milijardi godina. Njegova zastupljenost u prirodnoj platini iznosi 0.01 %. Koliko se raspada dogodi u 1 kg platine u jednoj minuti? Avogadrov broj iznosi $6.022 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$.

1663. Na 20 cm ispod površine vode nalazi se točkasti izvor svjetlosti. Odredi površinu kroz koju svjetlost izlazi iz vode u zrak. Indeks loma vode u odnosu na zrak je 1.33.

1664. Parcijalni tlak zasićene vodene pare mijenja se eksponencijalno s temperaturom. Pri $0\,^\circ\text{C}$ iznosi 610.5 Pa, a pri $10\,^\circ\text{C}$ je 1191.6 Pa. Izračunajte tlak pri $15\,^\circ\text{C}$.

C) Rješenja iz matematike

3581. *Nađi sva rješenja jednadžbe*

$$\sqrt[3]{72-x} - \sqrt[3]{16-x} = 2.$$

Rješenje. Stavimo

$$\sqrt[3]{72-x} = u, \quad \sqrt[3]{16-x} = v.$$

Jednadžba prelazi u

$$u - v = 2, \quad u^3 - v^3 = 56,$$

odakle je $u - v = 2$, $u^2 + uv + v^2 = 28$, a iz

$$v = u - 2, \quad u^2 - 2u - 8 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $u_1 = -2$, $u_2 = 4$. Rješenje polazne jednadžbe se dobije iz

$$\sqrt[3]{72-x} = u, \quad \text{tj.} \quad x = 72 - u^3.$$

Za $u = -2$, $x = 80$, a za $u = 4$, $x = 8$.

Almedina Bajrić (4)

3582. *Pokaži da razlika rješenja kvadratne jednadžbe*

$$5x^2 - 2(5m+3)x + 5m^2 + 6m + 1 = 0$$

ne ovisi o m.

Rješenje. Imamo

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$= \left[\frac{2(5m+3)}{5}\right]^2 - 4 \cdot \frac{5m^2 + 6m + 1}{5}$$

$$= \frac{100m^2+120m+36}{25} - \frac{20m^2+24m+4}{5} = \frac{16}{25}$$

tj. $x_1 - x_2 = \pm\dfrac{4}{5}$.

Ahmedin Hasanović (3),
Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH

3583. *Nađi sve prirodne brojeve n za koje je $2^8 + 2^{11} + 2^n$ potpuni kvadrat.*

Rješenje. Lako se provjeri da za $n \leqslant 8$ ne postoji takav broj.

Neka je $n > 8$. Tada je

$$2^8 + 2^{11} + 2 = 2^8(9 + 2^{n-8}).$$

Dakle, $9 + 2^{n-8}$ mora biti potpuni kvadrat tj. $9 + 2^{n-8} = x^2$, $x \in \mathbf{N}$ tj.

$$2^{n-8} = x^2 - 9 = (x-3)(x+3).$$

Brojevi $x-3$ i $x+3$ moraju biti potencije broja 2. To je moguće samo za $x = 5$ tj. $n = 12$.

Muamer Parić (4),
Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH

3584. *Riješi jednadžbu*

$$x^x + 139x^{-x} - 108x^{-2x} = 32.$$

Rješenje. Označimo $x^x = t$. Tada je

$$t + \frac{139}{t} - \frac{108}{t^2} = 32, \quad \text{tj.}$$

$$t^3 - 32t^2 + 139t - 108 = 0.$$

Jedno rješenje ove jednadžbe je $t_0 = 1$. Nadalje

$$t^3 - 32t^2 + 139t = (t-1)(t^2 - 31t + 108) = 0.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe $t^2 - 31t + 108 = 0$ su $t_1 = 4$, $t_2 = 27$. Iz

$$x^x = 1 \implies x = 1,$$
$$x^x = 4 \implies x = 2,$$
$$x^x = 27 \implies x = 3.$$

Rješenja dane jednadžbe su $x \in \{1, 2, 3\}$.

Almedina Bajrić (4)

3585. *Odredi minimalnu vrijednost iznosa $x^2 + y^2 + z^2$ gdje su x, y, z brojevi za koje je $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$.*

Rješenje. Primijetimo da je

$$1 = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \quad (1)$$

Neka je $A = x^2 + y^2 + z^2$ i $B = x + y + z$.

Tada je

$$B^2 - A = 2(xy + yz + zx).$$

Nadalje,

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$$
$$= \frac{1}{2}((x-z)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2) \geq 0$$

pa je $B > 0$.

Jednadžba (1) postaje

$$B\left(A - \frac{B^2 - A}{2}\right) = 1.$$

tj.

$$A = \frac{1}{3}\left(B^2 + \frac{2}{B}\right) = \frac{1}{3}\left(B^2 + \frac{1}{B} + \frac{1}{B}\right)$$
$$\geq \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt[3]{B^2 \cdot \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{B}} = 1.$$

Minimum je $A = 1$, i postiže se za, npr. $(x, y, z) = (1, 0, 0)$.

Adva Medošević (3),
Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH

3586. *Neka su $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ takvi da je $\cos x + \cos y + \cos z = 1$. Dokaži nejednakost*

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z \geq 16\sqrt{2}.$$

Rješenje. Nejednakost je ekvivalentna sljedećoj

$$\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y \operatorname{tg}^2 z \geqslant 512$$
$$\iff \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y} \cdot \frac{1-\cos^2 z}{\cos^2 z} \geqslant 512$$
$$\iff \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 y} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos^2 z} - 1\right)$$
$$\geqslant 512.$$

Stavimo $a = \cos x$, $b = \cos y$, $c = \cos z$. Tada je a, b, $c \in (0, 1)$,

$$a + b + c = 1$$
$$\left(\frac{1}{a^2} - 1\right)\left(\frac{1}{b^2} - 1\right)\left(\frac{1}{c^2} - 1\right) \geqslant 512.$$

Vidi rješenje zadatka 3572.

Faik Tahirović (2),
Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH

3587. *Riješi sustav jednadžbi*

$$\log(2xy) = \log x \log y$$
$$\log(yz) = \log y \log z$$
$$\log(2zx) = \log z \log x$$

za $x, y, z > 0$.

Rješenje. Iz $\log(2xy) = \log 2 + \log x + \log y$ i analognih izraza dobivamo

$$\log 20 = (\log x - 1)(\log y - 1) \qquad (1)$$
$$1 = (\log y - 1)(\log z - 1) \qquad (2)$$
$$\log 20 = (\log z - 1)(\log x - 1). \qquad (3)$$

Množenjem ovih jednakosti i vađenjem drugog korijena imamo

$$\pm \log 20 = (\log x - 1)(\log y - 1)(\log z - 1).$$

Odavde i iz (1) imamo $\log z - 1 = \pm 1$,

$$\log z = 1 \implies z = 100$$
$$\log z = 0 \implies z = 1;$$

iz (2) je $\log x - 1 = \pm \log 20$,

$$\log x = \log 20 + 1 = \log 200 \implies x = 200$$
$$\log x = -\log 20 + 1 = \log \frac{1}{2} \implies x = \frac{1}{2};$$

iz (3) je $\log y - 1 = \pm 1$,

$$\log y = 2 \implies y = 100$$
$$\log y = 0 \implies y = 1.$$

Odavde su rješenja sustava

$$(200, 100, 100) \quad \text{i} \quad \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right).$$

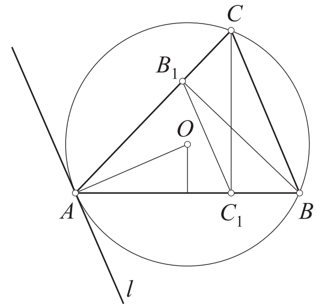
Hamza Begić (3),
Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH

3588. *U šiljastokutnom trokutu* ABC *spuštene su visine* $\overline{BB_1}$ *i* $\overline{CC_1}$. *Dokaži da je:*

a) tangenta u točki A *na opisanu mu kružnicu paralelna s pravcem* B_1C_1,

b) $B_1C_1 \perp OA$, *gdje je* O *središte opisane kružnice trokuta* ABC.

Rješenje. a) Neka je l tangenta u A na opisanu kružnicu $\triangle ABC$. Dokažimo da je $\measuredangle C = \measuredangle(l, AB)$.



Četverokut BCB_1C_1 je tetivni pa je

$$\measuredangle B_1C_1C = \measuredangle B_1BC = 90^\circ - \measuredangle C.$$

Stoga je

$$\measuredangle(AB, B_1C_1) = \measuredangle AC_1B_1 = 90 - \measuredangle B_1C_1C$$
$$= \measuredangle C. \qquad (1)$$

Sada je

$$\measuredangle(l, AB) = 90^\circ - \measuredangle OAB = 90^\circ - (90^\circ - \measuredangle C)$$
$$= \measuredangle C. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi $B_1C_1 \| l$.

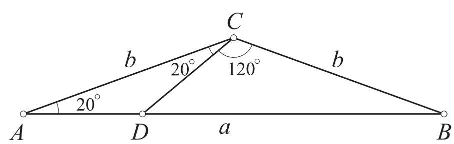
b) Kako je $OA \perp l$ i $l \| B_1C_1$ vrijedi $OA \perp B_1C_1$.

Hana Ćatić (2),
Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH

3589. *Ako je u jednakokračnom trokutu* ABC, $|AB| = a$, $|AC| = |BC| = b$ *i* $\measuredangle ACB = 140^\circ$, *dokaži da vrijedi jednakost* $a^3 - b^3 = 3ab^2$.

Rješenje. Na stranici $\overline{AB}$ odredimo točku D tako da je $\measuredangle ACD = \measuredangle CAD = 20^\circ$. Trokuti ADC i ACB imaju jednake unutarnje kutove, pa su slični. Iz te sličnosti slijedi $|AD| : |AC| = |AC| : |AB|$ ili $|AD| = \dfrac{|AC|^2}{|AB|} = \dfrac{b^2}{a}$.

Tada je $|BD| = a - |AD| = \dfrac{a^2 - b^2}{a}$.



Primjenom kosinusovog poučka na trokut BCD dobivamo

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2|BC||CD| \cos \sphericalangle BCD$$

ili

$$\left(\frac{a^2-b^2}{a}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2 - 2b \cdot \frac{b^2}{a} \cdot \cos 120^\circ,$$

tj.

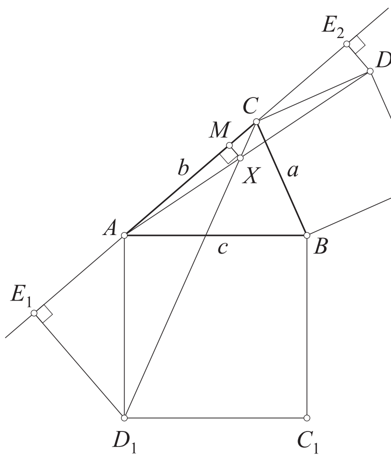
$$(a^2-b^2)^2 = a^2b^2 + (b^2)^2 - 2ab^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),$$

a odavde dobivamo traženu jednakost.

Ur.

3590. *Nad stranicama* $\overline{AB}$ *i* $\overline{BC}$ *šiljastokutnog trokuta* ABC *konstruirani su s vanjske strane kvadrati* ABC_1D_1 *i* A_2D_2CB. *Dokaži da se pravci* AD_2 *i* CD_1 *sijeku na visini* $\overline{BH}$.

Rješenje. Neka je X točka presjeka pravaca AD_2 i CD_1; M, E_1 i E_2 su ortogonalne projekcije točaka X, D_1 i D_2 na pravac AC. Tada je $|CE_2| = |CD_2| \sin\gamma = a \sin\gamma$, $|AE_1| = |AD_1| \sin\alpha = c \sin\alpha$. Kako je $a \sin\gamma = c \sin\alpha$ imamo $|CE_2| = |AE_1| = q$.



Prema tome

$$\frac{|XM|}{|AM|} = \frac{|D_2E_2|}{|AE_2|} = \frac{a\cos\gamma}{b+q},$$

$$\frac{|XM|}{|CM|} = \frac{|D_1E_1|}{|CE_1|} = \frac{c\cos\alpha}{b+q}.$$

Slijedi, $\dfrac{|AM|}{|CM|} = \dfrac{c\cos\alpha}{a\cos\gamma}$. Visina $\overline{BH}$ dijeli stranicu $\overline{AC}$ u tom omjeru pa je $H = M$.

Ur.

3591. *Ako su* a, b, c *pozitivni realni brojevi, dokaži nejednakost*

$$\frac{a^3-2a+2}{b+c} + \frac{b^3-2b+2}{c+a} + \frac{c^3-2c+2}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Rješenje. Primijetimo, najprije, da vrijedi nejednakost $a^3 - 2a + 2 \geq a$. Ona je redom ekvivalentna sljedećima:

$$a^3 - 3a + 2 \geq 0$$

$$\iff (a-1)(a^2+a-2) \geq 0$$

$$\iff (a-1)^2(a+2) \geq 0.$$

Sada je

$$\frac{a^3-2a+2}{b+c} + \frac{b^3-2b+2}{c+a} + \frac{c^3-2c+2}{a+b}$$

$$\geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Preostaje dokazati nejednakost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Ona je ekvivalentna s

$$2a^3+2b^3+2c^3 \geq a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2.$$

Pokazat ćemo $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$, i analogno za preostala dva slučaja. Nejednakost se može zapisati u obliku

$$(a-b)^2(a+b) \geq 0.$$

Kako je ova nejednakost ispravna, vrijedi i polazna.

Adva Medošević (3), Sarajevo, BiH

3592. *Odredi najveći pozitivan broj* M *za koji vrijedi nejednakost*

$$x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z) \geq M(xy+yz+zx)^2$$

za sve $x, y, z \in \mathbf{R}$.

Rješenje. Za $x = y = z$ nejednakost postaje $6x^4 \geqslant M \cdot 9x^4$ tj. $M \leqslant \dfrac{2}{3}$. Pokazat ćemo da je $M = \dfrac{2}{3}$ najveća vrijednost. Imamo

$$x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z) \geqslant \frac{2}{3}(xy+yz+zx)^2 \tag{1}$$

$$\iff 3(x^4+y^4+z^4) + 3xyz(x+y+z)$$

$$\geqslant 2(xy+yz+zx)^2.$$

Dovoljno je pokazati da vrijedi

$$3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+3xyz(x+y+z) \geqslant 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+4xyz(x+y+z) \quad (2)$$

$$\iff x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-xyz(x+y+z)\geqslant 0$$

$$\iff (xy)^2+(yz)^2+(zx)^2 - (yz)(yx)-(yz)(zx)-(zx)(xy)\geqslant 0$$

$$\iff \frac{1}{2}[(xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2]\geqslant 0.$$

Kako vrijedi ova nejednakost, vrijedi (2) i polazna (1).

Hana Ćatić (2), Sarajevo, BiH

3593. *Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost*

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\binom{2n+1}{3}.$$

Rješenje. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Za $n=1$ je

$$1^2=\binom{2\cdot 1+1}{3}$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n\geqslant 1$. Tada je

$$\begin{aligned}
&1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2+(2n+1)^2\\
&=\binom{2n+1}{3}+(2n+1)^2\\
&=\frac{(2n+1)\cdot 2n\cdot(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}+(2n+1)^2\\
&=\frac{(2n+1)[4n^2-2n+6(2n+1)]}{1\cdot 2\cdot 3}\\
&=\frac{(2n+1)(4n^2+10n+6)}{1\cdot 2\cdot 3}\\
&=\frac{(2n+1)(2n+3)(2n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\\
&=\binom{2n+3}{3}=\binom{2(n+1)+1}{3},
\end{aligned}$$

tj. tvrdnja vrijedi i za $n+1$.

Prema pretpostavci matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svako $n\geqslant 1$.

Lav Balašev-Samarski (2),
Druga gimnazija Sarajevo, Sarajevo, BiH

3594. *Odredi sve funkcije $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ takve da vrijedi*

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x^2+y^2)$$

za sve prirodne brojeve x i y.

Rješenje. Očito je konstantna funkcija $f(x)=k$, gdje je k pozitivan cijeli broj, rješenje. To je i jedino rješenje.

Pretpostavimo suprotno tj. da postoje dva prirodna broja a, b takva da je $f(a)<f(b)$. Tada imamo

$$(a+b)f(a)<af(b)+bf(a)<(a+b)f(b),$$

što je ekvivalentno s

$$(a+b)f(a)<(a+b)f(a^2+b^2)<(a+b)f(b).$$

Možemo dijeliti s $a+b$ i dobivamo

$$f(a)<f(a^2+b^2)<f(b).$$

To znači da bi između dva prirodna broja postojao drugi prirodan broj. Ovaj postupak bi mogli ponoviti beskonačno mnogo puta što nije moguće.

Ur.

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 422. *Učenik je na stalak objesio oprugu konstante elastičnosti $10\ N/m$. Na nju je objesio drugu oprugu mase 50 grama i konstante elastičnosti $15\ N/m$. Na tu je oprugu objesio uteg i izmjerio da su se obje opruge jednako produljile. Kolika je bila masa utega?*

Rješenje.

$m_2 = 50$ g

$k_1 = 25$ N/m, $\quad k_2 = 10$ N/m

$m = ?$

$$\Delta l_1=\Delta l_2$$

$$\frac{F_1}{k_1}=\frac{F_2}{k_2}$$

$$\frac{(m_2+m)g}{k_1}=\frac{mg}{k_2}$$

$$m_2k_2+mk_2=mk_1$$

$$m(k_1-k_2)=m_2k_2$$

$$m=\frac{m_2k_2}{k_1-k_2}=\frac{50\text{ g}\cdot 10\text{ N/m}}{15\text{ N/m}-10\text{ N/m}}=100\text{ g}$$

Ur.

OŠ – 423. *Automobil mase 1.5 tona na putu od 100 metara ubrza iz mirovanja do brzine 90 km/h. Faktor trenja kotača sa cestom iznosio je 0.04, a trenje sa zrakom zanemari. Kolikom je silom djelovao motor automobila?*

Rješenje.

$m = 1.5 \text{ t} = 1500 \text{ kg}$

$s = 100 \text{ m}$

$v_0 = 0 \text{ m/s}$

$v = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$

$\underline{\mu = 0.04}$

$F = ?$

$G = m \cdot g = 1500 \text{ kg} \cdot 10 \,/\,\text{kg} = 15\,000 \text{ N}.$

Iz $v^2 = 2as$ slijedi $a = \dfrac{v^2}{2s}$

$$a = \frac{(25 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 100 \text{ m}} = 3.125 \text{ m/s}^2$$

$F_{tr} = \mu \cdot G = 0.04 \cdot 15\,000 \text{ N} = 600 \text{ N}$

$$F_{ubrzavanja} = m \cdot a = 1500 \text{ kg} \cdot 3.125 \text{ m/s}^2 = 4687.5 \text{ N}$$

$F = F_{tr} + F_{ubrzavanja} = 5287.5 \text{ N}$

Ur.

OŠ – 424. *Zvuk frekvencije 440 Hz ima valnu duljinu u zraku 75 centimetara. Kolika je valna duljina tog zvuka u vodi ako zvuk u vodi prijeđe udaljenost od 3.3 kilometra 7.8 sekundi brže nego što tu udaljenost prijeđe u zraku?*

Rješenje.

$f_1 = f_2 = f = 440 \text{ Hz}$

$\lambda_1 = 75 \text{ cm} = 0.75 \text{ m}$

$s_2 = s_1 = s = 3.3 \text{ km} = 3300 \text{ m}$

$\underline{t_2 = (t_1 - 7.8) \text{ s}}$

$\lambda_2 = ?$

Kako je brzina zvuka u zraku

$v_1 = \lambda_1 \cdot f = 0.75 \text{ m} \cdot 440 \text{ m/s} = 330 \text{ m/s},$

vrijeme za koje zvuk prijeđe udaljenost $s = 3300$ m

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{3300 \text{ m}}{330 \text{ m/s}} = 10 \text{ s}.$$

Zvuk u vodi prijeđe istu udaljenost za vrijeme

$$t_2 = (t_1 - 7.8) \text{ s},$$

odnosno

$$t_2 = (10_1 - 7.8) \text{ s} = 2.2 \text{ s}.$$

Brzina zvuka u vodi je

$$v_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{3300 \text{ m}}{2.2 \text{ s}} = 1500 \text{ m/s},$$

a pošto se frekvencija zvuka ne mijenja, valna duljina zvuka u vodi je

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{f},$$

$$\lambda_2 = \frac{1500 \text{ m/s}}{440 \text{ Hz}} = 3.409 \text{ m} \approx 3.41 \text{ m}.$$

Valna duljina tog zvuka u vodi je 3.41 m.

Borna Cesarec (8), OŠ Augusta Cesarca, Krapina

OŠ – 425. *Voda za kupanje treba imati temperaturu 42 °C. Vruća voda ima temperaturu 60 °C, a hladna 16 °C. Prilikom miješanja toplina ne prelazi samo na hladnu vodu, 15 posto se izgubi u okolinu. Da bi se dobilo 120 litara vode za kupanje koliko treba uliti vruće, a koliko hladne vode?*

Rješenje.

$t = 42\,^\circ\text{C}$

$t_2 = 60\,^\circ\text{C}$

$t_1 = 16\,^\circ\text{C}$

$0.85Q_2 = Q_1$

$\underline{V = 120 \text{ l}}$

$m_1 = ?$

$m_2 = ?$

Masa vode:

$m = \rho \cdot V = 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 0.120 \text{ m}^3 = 120 \text{ kg}.$

85 % ili 0.85 dio topline tople vode utroši se na zagrijavanje hladne vode.

Ako pretpostavimo da je masa tople vode m_2, onda je masa hladne vode $m_1 = 120 - m_2$.

$0.85 \cdot Q_2 = Q_1$

$0.85 \cdot c \cdot m_2 \cdot (t_2 - t) = c \cdot (120 - m_2) \cdot (t - t_1)$

$$0.85 \cdot m_2 \cdot (60\,^\circ\text{C} - 42\,^\circ\text{C}) = (120 - m_2) \cdot (42\,^\circ\text{C} - 16\,^\circ\text{C})$$

$0.85 \cdot m_2 \cdot 18\,^\circ\text{C} = (120 - m_2) \cdot 26\,^\circ\text{C}$

$15.3m_2 = 3120 - 26m_2$

$15.3m_2 + 26m_2 = 3120$

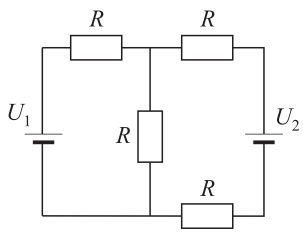
$41.3m_2 = 3120$

$m_2 = 75.5$ kg

Masa tople vode je 75.5 kg, a masa hladne vode je $m_1 = 120 - m_2 = 120$ kg $- 75.5$ kg $=$ 44.5 kg.

Borna Cesarec (8), Krapina

1644. *Koliki je napon na otporniku u sredini sheme? Kolika struja teče kroz taj otpornik? Sva četiri otpora iznose $R = 4.5\ \Omega$, a napon obaju izvora iznosi $U_1 = U_2 = 12$ V.*



Rješenje. Iz Kirchoffovog zakona, napon U_1 jednak je padu napona na dva otpornika u lijevom krugu sheme. Uz analogni uvjet na U_2 i desni krug, imamo:

$$U_1 = I_1R + (I_1 + I_2)R,$$
$$U_2 = I_2R + (I_1 + I_2)R + I_2R.$$

To se svodi na

$$U_1 = R(2I_1 + I_2)$$
$$U_2 = R(I_1 + 3I_2).$$

Uvrštavanje U i R daje $I_1 = \frac{8}{15}$ A i $I_2 = \frac{16}{15}$ A. Struja kroz srednji otpornik je $I_1 + I_2 = \frac{24}{15}$ A $= 1.6$ A, a napon na tom otporniku je $U = 1.6R = 7.2$ V.

Ur.

1645. *Komet se giba po paraboličnoj putanji oko Sunca. Brzina u perihelu, točki putanje najbliže Suncu, iznosi 64.5 km/s u odnosu na Sunce. Odredi najmanju udaljenost kometa od Sunca (u perihelu), brzinu u trenutku presijecanja Zemljine putanje i kut presijecanja te putanje. Masa Sunca je $1.989 \cdot 10^{30}$ kg, a Zemljina putanja neka je kružnica polumjera 1 a.j. $= 1.496 \cdot 10^{11}$ m.*

Rješenje. S obzirom da je suma kinetičke i potencijalne energije nula za paraboličnu putanju, za udaljenost od Sunca u perihelu dobivamo

$$\frac{Gm_Km_S}{r_{\min}} = \frac{1}{2}m_Kv_{\max}^2$$

$$r_{\min} = \frac{2Gm_S}{v_{\max}^2} = \frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 1.989 \cdot 10^{30}}{64\,500^2} = 6.38163 \cdot 10^{10}\ \text{m}.$$

Za brzinu presjecanja Zemljine putanje uvrstimo $r = 1.496 \cdot 10^{11}$ m, i dobijemo brzinu v iz istog izraza:

$$\frac{Gm_S}{r} = \frac{1}{2}v^2,$$
$$v = \sqrt{\frac{2Gm_S}{r}} = 42\,127\ \text{m/s}.$$

Kut presijecanja kružnice sa Suncem u središtu (tj. Zemljine putanje) tada je iz drugog Keplerovoog zakona jednak α:

$$v_{\max}r_{\min}\sin 90^\circ = vr\sin\alpha.$$

Odatle je

$$\sin\alpha = \frac{v_{\max}r_{\min}}{vr} = 0.65313,$$

što daje kut $\alpha = 40^\circ 46' 41''$.

Ur.

1646. *Neka je penjačko uže dugačko 20 m u neopterećenom stanju. Penjač visi na jednom kraju užeta, a drugi je kraj pričvršćen za okomitu stijenu. Pod težinom penjača od 80 kg, uže se istegne za dodatnih 35 cm. Odredi period malih oscilacija (gore-dolje) penjača na užetu.*

Rješenje. Za mala istezanja (sila mnogo manja od sile kidanja užeta), uže se ponaša kao elastična opruga. Konstanta elastičnosti iz zadanih parametara iznosi

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{784.8\ \text{N}}{0.35\ \text{m}} = 2242.3\ \text{N/m}.$$

Za period malih oscilacija imamo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 1.187\ \text{s}.$$

Ur.

1647. *Za izradu kazališnog dalekozora na raspolaganju imamo konvergentnu leću jačine* $+4.25$ *dpt i divergentnu leću jačine* -10 *dpt. Na kojem međusobnom rastojanju treba postaviti leće? Koliko je tada uvećanje dalekozora?*

Rješenje. Za ovaj tip dalekozora (kazališni), uvjet dobivanja oštre slike za vrlo udaljen predmet i zdrave oči svodi se na uvjet poklapanja žarišta konvergentne i dvivergentne leće, tako da je konvergentna bliže predmetu (objektiv), a divergentna bliže oku (okular). Međusobno rastojanje leća tada je razlika apsolutnih vrijednosti njihovih žarišnih daljina, tj.

$$\begin{aligned} d &= |f_1| - |f_2| \\ &= \frac{1}{4.25} - \frac{1}{10} = 0.1353 \text{ m} = 13.53 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Uvećanje izračunamo iz omjera tih žarišnih daljina, tj.

$$M = \frac{-J_2}{J_1} = \frac{f_1}{-f_2} = \frac{10}{4.25} = 2.353.$$

Slika će biti uspravna $(M > 0)$ i uvećana $(|M| > 1)$.

Ur.

1648. *Napetost niti njihala iznosi 10 N za matematičko njihalo koje miruje u položaju ravnoteže. Otklonimo li njihalo* 8° *iz položaja ravnoteže i pustimo ga, ono će njihati. Odredi napetost niti pri njihanju, u trenutku prolaska kroz položaj ravnoteže i u trenutku maksimalnog otklona.*

Rješenje. Mirno njihalo ima napetost niti jednaku težini utega:

$$F_0 = mg = 10 \text{ N}.$$

U slučaju maksimalnog otklona, brzina njihala je nula, a napetost niti poništava samo komponentu težine u smjeru niti, tj.

$$F(8^\circ) = mg\cos 8^\circ = 9.90268 \text{ N}.$$

Pri prolasku kroz položaj ravnoteže, osim težine utega imamo i centrifugalnu silu, tj.

$$F(0^\circ) = mg + \frac{mv^2}{r},$$

a odgovarajući iznos odredimo iz očuvanja energije:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mgr(1 - \cos 8^\circ),$$

$$\frac{mv^2}{r} = 2mg(1 - \cos 8^\circ) = 0.19464 \text{ N}.$$

Dakle napetost niti u trenutku prolaska kroz položaj ravnoteže je

$$F(0^\circ) = 10.19464 \text{ N}.$$

Ur.

1649. *Jedan gram radija 226 ima (po definiciji) aktivnost jedan Curie (1 Ci). Vrijeme poluživota tog izotopa iznosi 1600 godina. Odredi aktivnost jednog grama ugljika 14 (^{14}C), s vremenom poluživota 5730 godina.*

Rješenje. Aktivnost (broj raspada u jedinici vremena), povezana je s ukupnim brojem atoma N i vremenom poluraspada T na sljedeći način:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \frac{N}{T}\ln 2.$$

Ako znamo da je broj atoma u jednom gramu obrnuto proporcionalan atomskoj masi M, možemo postaviti omjer:

$$A_1M_1T_1 = A_2M_2T_2.$$

Ako odaberemo tvar 1 – radij 226 i tvar 2 – ugljik 14 imamo

$$A_2 = A_1\frac{T_1}{T_2}\frac{M_1}{M_2} = 1 \text{ Ci}\cdot\frac{1600}{5730}\frac{226}{14} = 4.5076 \text{ Ci}.$$

Ur.

1650. *Odredi napon koji se inducira na krajevima krila zrakoplova. Neka avion leti brzinom 950* km/h*, uz okomitu komponentu Zemljinog polja* $B = 5\cdot10^{-5}$ *T, a raspon krila aviona je 45 metara.*

Rješenje. Inducirana elektromotorna sila jednaka je promjeni magnetskog toka u jedinici vremena:

$$U = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = B\frac{\Delta S}{\Delta t} = Bvd,$$

gdje je v brzina aviona, a d raspon krila. Dobivamo

$$U = Bvd = 5\cdot10^{-5}\cdot\frac{950}{3.6}\cdot 45 = 0.59375 \text{ V}.$$

Treba napomenuti da ako krajeve krila povežemo žicom, njome neće poteći struja, jer se u žici inducira napon istog iznosa (ako se giba zajedno s avionom).

Ur.