ACB i kružnice opisane trokutu BDC. Pretpostavimo da je E unutar trokuta ABC i da postoji sjecište N pravca DE i kružnice Γ takvo da je E polovište dužine $\overline{DN}$.

Dokažite da je N polovište dužine $\overline{I_B I_C}$, pri čemu su I_B i I_C redom središta kružnica pripisanih trokutu ABC nasuprot B i C.

T-6. Neka je ABC šiljastokutni trokut za koji vrijedi $|AB| \neq |AC|$, te neka je Γ kružnica opisana tom trokutu sa središtem O. Tangente kroz B i C na kružnicu Γ sijeku se u točki D, a pravac AO siječe pravac BC u točki E. Neka je M polovište dužine $\overline{BC}$ i neka pravac AM siječe kružnicu Γ drugi put u točki $N \neq A$. Konačno, neka je $F \neq A$ točka na kružnici Γ takva da su točke A, M, E i F konciklične. Dokažite da pravac FN raspolavlja dužinu $\overline{MD}$.

T-7. Odredite sve prirodne brojeve $n \geqslant 2$ za koje postoji permutacija $x_0,\ x_1,\ \ldots,$ x_{n-1} brojeva 0, 1, ..., $n-1$ takva da n brojeva

$$x_0,\ x_0+x_1,\ \ldots,\ x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}$$

daje međusobno različite ostatke pri dijeljenju s n.

T-8. Za prirodni broj $n \geqslant 3$ definiramo niz $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$ kao niz eksponenata u rastavu $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, pri čemu su brojevi $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ prosti.

Odredite sve prirodne brojeve $n \geqslant 3$ takve da je $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$ geometrijski niz.

58. Međunarodna matematička olimpijada 2017. g.

Na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi u Rio de Janeiru šesteročlana hrvatska ekipa pod vodstvom *Mee Bombardelli* i *Ivana Krijana* ostvarila je 35. mjesto od ukupno 111 država. Ekipa je izabrana temeljem rezultata Hrvatske matematičke olimpijade i činili su ju: *Adrian Beker*, *Lugo Mihovilić*, *Petar Nizić-Nikolac*, *Lukas Novak*, *Borna Šimić*, *Marin Varivoda*. Prije olimpijade sudjelovali su na pripremama na Fakultetu elektrotehnike i računalstva od 5. do 20. lipnja i u Ogulinu početkom srpnja.

IMO 2017
RIO DE JANEIRO - BRASIL

Rio de Janeiro je bio ugodan, s toplih, ali ne prevrućih 25 °C u zimskom dijelu godine te s mnogo toga za vidjeti, osjetiti i doživjeti. Ceremonija otvaranja je prošla u opuštenom brazilskom duhu sa sambom, klaunovima i maskotom Aramatom.

Dan prije natjecanja smo proveli ponavljajući ideje i metode iz poučnih zadataka koje smo prošli tokom svih naših priprema, a također smo svi zajedno razmijenili iskustva i savjete kako pristupiti zadatcima na natjecanju poput IMO-a. Također, imali smo i prilike ići pogledati dvoranu u kojoj ćemo rješavati zadatke na samom natjecanju te isprobati stol za kojim ćemo sjediti.

Prvi dan natjecanja sastojao se iz teorije brojeva na prvom zadatku, algebre, tj. funkcijske jednadžbe na drugom i kombinatorikom na trećem. Prvi zadatak nam je svima bio lagan i skoro svi smo ga u potpunosti riješili i dobili skoro sve bodove na njemu. Drugi zadatak je tražio podosta vremena da se riješi, ali usprkos tome smo svi uspjeli izvući neke bodove. U potpunosti ga je jedino riješio Petar, Lukas je skupio 6 bodova, Adrian 4, Borna i Marin svako po 3 i Lugo 2. Na trećem zadatku nitko iz ekipe nije osvojio ni bod.

Drugi dan natjecanja se sastojao od geometrije na četvrtom zadatku, kombinatorike na petom i teorije brojeva na šestom. Drugi dan je bio dosta zahtjevan. Zadatci su bili kvalitetni, lijepi, ali i puni zamki. Većinom smo svi riješili geometriju ili dobili dosta bodova na njoj, a od ostalih zadataka je jedino Adrian uspio skupiti 2 boda na petom zadatku.

Nakon natjecanja smo u početku bili malo razočarani s našim nastupom na drugom danu, ali smo ubrzo doznali da su i ostali natjecatelji riješili slično ili čak manje od nas te nas je to donekle oraspoložilo. Nakon rješavanja zadataka išli smo na dosta izleta (koje smo većinom sami organizirali s našom voditeljicom).

Voditelji Ivan i Mea su bili i vrlo uspješni u dobivanju bodova te su za svakog od nas izvukli zasluženi maksimum. Objava rezultata nas je usrećila te smo na završnu ceremoniju uglavnom došli zadovoljni. Ovo su naši rezultati:

- *Adrian Beker*, XV. gimnazija, Zagreb, 4. r. – *srebrna medalja*
- *Lugo Mihovilić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, 4. r. – *pohvala*
- *Petar Nizić-Nikolac*, XV. gimnazija, Zagreb, 3. r. – *brončana medalja*
- *Lukas Novak*, Gimnazija Josipa Slavenskog, Čakovec, 4. r. – *srebrna medalja*
- *Borna Šimić*, Gimnazija "Matija Mesić", Slavonski Brod, 3. r. – *brončana medalja*
- *Marin Varivoda*, Gimnazija Franje Petrića, Zadar, 2. r. – *brončana medalja*

natjecatelj	P1	P2	P3	P4	P5	P6	ukupno	osvojeno
A. Beker	7	4	0	7	2	0	20	srebrna
L. Mihovilić	3	2	0	7	0	0	12	pohvala
P. Nizić-Nikolac	7	7	0	2	0	0	16	brončana
L. Novak	7	6	0	7	0	0	20	srebrna
B. Šimić	7	3	0	7	0	0	17	brončana
M. Varivoda	7	3	0	7	0	0	17	brončana
ekipni rezultat	38	25	0	37	2	0	102	S, S, B, B, B, P

Najbolja je bila Južna Koreja, koja je to isto postigla i 2012. godine, a na drugom i trećem mjestu našle su se Kina i Vijetnam, ispred prošlogodišnjeg prvaka SAD-a na četvrtom mjestu.

Zadovoljni smo uspjehom na, po mnogima najtežem IMO-u dosad, i nadamo se iduće godine u Cluj-Napoci postići još bolji rezultat.

Borna Šimić, Lukas Novak

Zadatci

Prvi dan, Rio de Janeiro, utorak, 18. srpnja 2017.

Zadatak 1. Za svaki cijeli broj $a_0 > 1$, definiran je niz a_0, a_1, $a_2, \ldots$ tako da je za svaki $n \geqslant 0$

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{ako je } \sqrt{a_n} \text{ cijeli broj,} \\ a_n + 3 & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredi sve vrijednosti broja a_0 za koje postoji broj A takav da je $a_n = A$ za beskonačno mnogo vrijednosti n.

Zadatak 2. Neka je $\mathbf{R}$ skup svih realnih brojeva. Odredi sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Zadatak 3. Lovac i nevidljivi zec igraju igru u euklidskoj ravnini. Početna točka zeca, A_0, i početna točka lovca, B_0, su iste. Nakon $n-1$ rundi igre, zec je u točki A_{n-1}, a lovac u točki B_{n-1}. U n-toj rundi, redom se odvija sljedeće:

(i) Zec se neprimjetno premješta u točku A_n tako da je udaljenost između A_{n-1} i A_n točno 1.

(ii) Uređaj za lociranje dojavljuje lovcu točku P_n, garantirajući samo da je udaljenost između P_n i A_n najviše 1.

(iii) Lovac se vidljivo premješta u točku B_n tako da je udaljenost između B_{n-1} i B_n točno 1.

Može li lovac uvijek, za bilo koje pomake zeca i za bilo koje točke koje dojavi uređaj za lociranje, birati svoje poteze tako da udaljenost između njega i zeca nakon 10^9 rundi bude najviše 100?

Drugi dan, Rio de Janeiro, srijeda, 19. srpnja 2017.

Zadatak 4. Neka su R i S međusobno različite točke na kružnici Ω takve da $\overline{RS}$ nije promjer. Neka je ℓ tangenta na kružnicu Ω u točki R. Neka je T točka takva da je S polovište dužine $\overline{RT}$. Točka J nalazi se na kraćem luku $\widehat{RS}$ kružnice Ω tako da se opisana kružnica Γ trokuta JST i pravac ℓ sijeku u dvije različite točke. Neka je A ono sjecište od Γ i ℓ koje je bliže točki R. Pravac AJ siječe kružnicu Ω još u točki K. Dokaži da pravac KT dodiruje kružnicu Γ.

Zadatak 5. Dan je prirodni broj $N \geqslant 2$. U skupini od $N(N+1)$ nogometaša nikoja dva nisu iste visine. Ti su nogometaši poredani u red. Trener želi iz reda izbaciti $N(N-1)$ igrača tako da preostalih $2N$ igrača tvori red za koji vrijedi sljedećih N uvjeta:

(1) između dva najviša igrača nema nikoga,

(2) između trećeg i četvrtog igrača po visini nema nikoga,

$\vdots$

(N) između dva najniža igrača nema nikoga.

Dokaži da je to uvijek moguće napraviti.

Zadatak 6. Uređeni par (x, y) cijelih brojeva je *primitivna točka* ako je najveći zajednički djelitelj brojeva x i y jednak 1. Neka je S konačan skup primitivnih točaka. Dokaži da postoje prirodni broj n i cijeli brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ takvi da za sve točke (x, y) iz skupa S vrijedi:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Vrijeme rješavanja svakog dana: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Rang-lista

	nagrade				broj
	I	II	III	poh.	bod.
Južna Koreja	6				170
Kina	5	1			159
Vijetnam	4	1	1		155
SAD	3	3			148
Iran	2	3	1		142
Japan	2	2	2		134
Singapur	2	1	2	1	131
Tajland	3		2	1	131
Tajvan	1	4	1		130
Velika Britanija	3		2	1	130
Rusija	1	3	2		128
Grčka	1	4	1		127
Gruzija	1	2	3		127
Bjelorusija	1	1	4		122
Češka	1	2	2	1	122
Ukrajina	1	2	2	1	122
Filipini		3	3		120
Bugarska		4	2		116
Italija	2	1	1	2	116
Nizozemska	1	2	1	1	116
Srbija		4	2		116
Mađarska	2	1	1	1	115
Poljska	1		5		115
Rumunjska		3	2	1	115
Kazahstan	1	2	1	1	113
Argentina	1	2	1	2	111
Banglaseš		2	2	2	111
Hong Kong	1	1	3	1	111
Kanada	1	2	2	1	110
Peru		2	3	1	109
Indonezija		2	3	1	108
Izrael		3	2		107
Njemačka		1	3	2	106
Australija		3	2	1	103
Hrvatska		2	3	1	102
Turska		1	3	2	102
Brazil		2	1	3	101
Malezija		2	2	2	101
Francuska		2	2	2	100
Saudijska Arabija		2	2	1	100
Armenija		2	2	1	99
Azerbejdžan			4	2	98
Meksiko		1	2	3	96
Bosna i Hercegovina			4	2	95
Tađikistan			3	3	95
Makao	1			5	94
Novi Zeland			3	3	94
Cipar			5	1	93
Mongolija		1	2	3	93
Turkmenistan			2	4	93
Švedska		1	2	3	91
Indija			3	3	90
Slovenija			2	4	90
Portugal			2	2	89
Španjolska			3	2	86
Sirija		1		5	85
Latvija			3	2	84
Moldavija		1		4	83
Švicarska			1	5	83
Južnoafrička Republika			2	4	81
Kolumbija			1	5	81
Belgija		1	2	2	80
Irska			2	4	80
Šri Lanka			3	3	80
Danska			1	5	77
Makedonija			1	4	77
Kirgistan			2	3	75
Maroko			1	4	75
Slovačka			1	5	75
Austrija		2		2	74
Estonija		1		4	72
Norveška			2	3	71
Alžir			1	4	70
Litva			2	3	69
Uzbekistan (5)		1		4	69
Albanija			1	5	67
Čile			1	4	67
Ekvador			1	4	66
Tunis (5)			1	3	59
Venecuela (5)			2	2	59
Kostarika				5	58
Pakistan			1	3	58
Salvador (4)			1	3	57
Finska				6	56
Kosovo (5)			1	2	55
Portoriko (5)				4	55
Nigerija (4)				4	51
Paragvaj				2	48
Island				3	45
Luksemburg			1	1	45
Nikaragva (4)			1	2	44
Urugvaj				3	43
Crna Gora (4)			1	2	42
Bolivija				4	41
Lihtenštajn (3)				2	22
Uganda				1	22
Gvatemala (4)				1	20
Bocvana				1	19
Mianmar				1	15
Panama (1)				1	15
Trinidad i Tobago (1)				1	15
Kuba (1)				1	13
Irak (4)				1	13
Honduras (2)					12
Kambodža				1	11
Obala Bjekolosti					11
Kenija					8
Gana (1)					6
Tanzanija (2)					5
Egipat (3)					3
Nepal					3

Broj u zagradi je broj natjecatelja kada je on manji od 6.