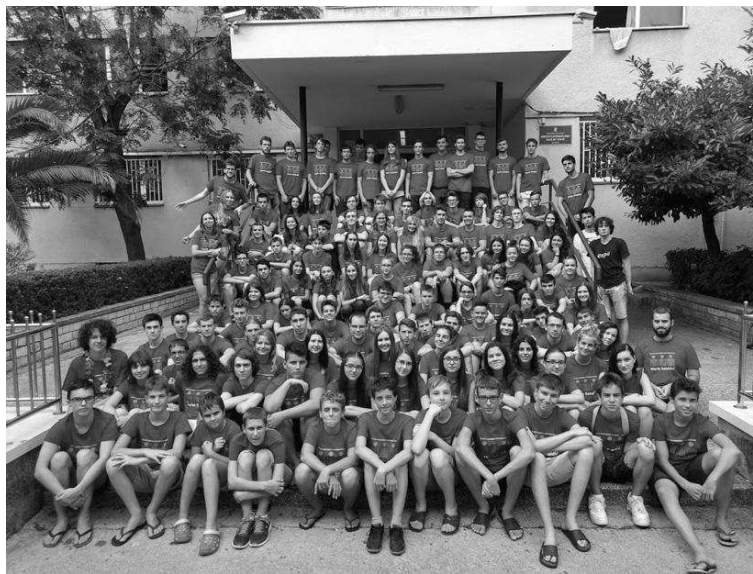


## Ljetni kamp mladih matematičara 2017. g.

Ove se godine, od 13. do 20. kolovoza, u organizaciji udruge Mladi nadareni matematičari “Marin Getaldić”, u Zadru održao 8. Ljetni kamp mladih matematičara. Kao i svake godine dosad, srušen je rekord u broju učenika i mentora koji su sudjelovali na kampu. Tako je aktivnostima kampa prisustvovalo ukupno 99 srednjoškolaca te učenika koji su završili 7. ili 8. razred osnovne škole i čak 29 mentora. Time je zabilježen značajan porast sudionika kampa, ali i općenito porast broja zaprimljenih prijava. Po običaju, glavne aktivnosti u rasporedu bile su predavanja, rad na projektima te popularno-znanstvena predavanja. Naravno, dio vremena iskoristili smo i za odmor, zabavu i druženje sudionika i mentora.



Slika 1. Zajednička slika svih sudionika kampa (učenika i mentora) u “kampovskim” majicama.

Predavanja natjecateljske tematike održavali smo u jutarnjem terminu, a teme su generalno podijeljene u četiri područja: algebra, kombinatorika, geometrija i teorija brojeva. Osim unaprjeđivanja znanja stečenih kroz redovnu i dodatnu nastavu tijekom godine, ovisno o razini predznanja, sudionici su se upoznali i s brojnim zanimljivim i nešto manje poznatim matematičkim područjima te tehnikama rješavanja zadataka. Učenici su bili podijeljeni u devet grupa te su oni u svakoj od njih odslušali pet predavanja. Težina zadataka, ovisno o grupi, kretala se od osnovnoškolskih pa sve do olimpijskih.

Popodneva smo tradicionalno provodili u radu na projektima kojima se učenicima pokušava dočarati primjena matematike u nekom specifičnom području. Tako je sudionicima na početku kampa ponuđen izbor između čak dvadeset projekata raznovrsne tematike, čime smo uspjeli osigurati ponešto zanimljivo i primjereno za svakoga. Na projektima učenici provedu petnaestak sati kroz rad u manjim grupama, a na kraju kampa novostečeno znanje prezentiraju pred svim sudionicima kampa.

Projekt *Trikovi s kartama* bio je namijenjen učenicima 7. i 8. razreda, a naučili su raznovrsne trikove s kartama koji u pozadini imaju matematičko objašnjenje. Pritom su naučili i primjenjivali kongruencije, algebarske trikove, permutacije i još neke osnovne kombinatorne pojmove koje su primijenili u objašnjavanju poznatih te izvođenju nešto manje poznatih trikova.

U projektu *Teorija igara* također su sudjelovali učenici 7. i 8. razreda, točnije oni s nešto naprednijim programerskim predznanjem, a proučavala se asimptotska gustoća gubitničkih pozicija u nekim nizovima nepristranih igara. Obrađeni su osnovni pojmovi teorije igara te smo algoritamski tražili pobjedničku strategiju za neke poznate igre, na primjer Nim i Hackenbush.

Na projektu *Rubikova kocka* poznatu slagalicu promatrali smo u svjetlu teorije grupa kako bismo ustanovili koje su konfiguracije valjane i kako se do njih dolazi. Učenici su usvojili osnove teorije grupa te uz stečeno znanje i kombinatorne argumente dolazili do poteza koji vode do željenih mogućih konfiguracija ili pak pokazivali zašto neke konfiguracije nije moguće dobiti.

Projekt *Rekurzije* bio je namijenjen mlađim srednjoškolcima, a na njemu smo promatrali neke poznate probleme s rekurzivnim rješenjima koji su motivirali općenitije razmatranje rekurzija. Kroz rješavanje problema s Fibonaccijevim zečevima te Hanojskim tornjevima zaključili smo da vrijedi znati "Da bi naučio rekurzije, prvo moraš naučiti rekurzije!"



Slika 2. Na projektu *Rekurzije*.

Projekt *Probabilistički algoritmi* bio je namijenjen sudionicima kampa koji već imaju iskustva u programiranju na srednjoškolskim natjecanjima. Tijekom rada na projektu učenici su upoznali osnovne probabilističke algoritme, njihovu svrhu i primjenu. Kroz promatranje Monte Carlo i Las Vegas algoritama, usvojili su primjere pouzdanijih i točnijih algoritama te objašnjenja i argumente za pouzdanost, odnosno brzinu pojedinog algoritma.

U projektu *Origami* pokazana je matematička osnova origamija, popularne japanske umjetnosti oblikovanja papira. Najprije su predstavljene aksiomi ovog matematičkog područja, a zatim primjeri rješavanja nekih svjetski poznatih matematičkih problema savijanjem papira (trisekcija kuta, duplikacija kocke).

Cilj projekta *Matematičko modeliranje u biologiji* bio je prikaz primjene diferencijalnog računa u izradi pojednostavnjenog modela širenja zaraze, s primjerom epidemije AIDS-a. Za potrebe projekta, učenici su upoznali osnove diferencijalnog računa zajedno s nekim osnovnim teoremima i metodama korištenim u modeliranju ovog i sličnih modela u raznim problemima.

*Policija treba pomoć mladih nadarenih matematičara koji jedini mogu razriješiti misterij svojim matematičko-informatičkim moćima.* U pozadini ovog dramatičnog opisa projekta *Matematička forenzika* stoji nešto rada sa skupovima i skupovnim operacijama te kvalitetna i brza analiza velike količine podataka. Na projektu su sudjelovali učenici 7. i 8. razreda osnovne škole.



Slika 3. Jutarnje predavanje za najmlađu grupu (završeni 7. razred osnovne škole).

Na projektu *Kako rade kalkulatori* objasnili smo pozadinu izvršavanja nekih operacija u kalkulatorima. Počeli smo sa zapisom brojeva te pojavom i akumulacijom grešaka u računalu, nastavili s uvodom u diferencijalni račun, a projekt smo zaključili s brojnim korisnim primjerima pametnog osmišljavanja algoritama za računanje konkretnih funkcija koristeći stečeno znanje i algebarske manipulacije.

U projektu *Markovljevi lanci*, to je važno područje teorije vjerojatnosti predstavljeno učenicima kroz igre s grahom i predviđanje ishoda nogometnih utakmica. Učenici su naučili netrivialne činjenice iz linearne algebre, vjerojatnosti te se upoznali s matricama i pripadnim operacijama kroz niz zanimljivih i poučnih igara.

Kroz projekt *Klasifikacija* učenicima je prikazana primjena analize velike količine podataka, popularni Big Data, područja od velikog interesa kod matematičara i informatičara u posljednje vrijeme. Osnove ovog kompleksnog područja izložene su kroz elemente planetarno popularne igre Pokemon Go.

Na projektu *Linearna regresija* naučili smo modelirati podatke osnovnim krivuljama, poput linearne, kvadratne i logaritamske funkcije. Izveli smo jednadžbu optimalne krivulje s obzirom na podatke, kao i statistiku za usporedbu dobrote različitih modela te procjenu greške modela. Na kraju smo na temelju raznih podataka o automobilima pokušali pronaći model koji najbolje predviđa akceleraciju određenog modela.

Projekt *Gerrymandering* proučavao je istoimeni fenomen koji objašnjava politički pristranu podjelu izbornih područja, što je česta pojava u brojnim državama. Matematika u ovom procesu zahtijeva dobro baratanje pojmovima površine i duljine granice ne nužno pravilnih rubova za što je bilo potrebno usvajanje osnova diferencijalnog i integralnog računa.

Na projektu *Fourierovi redovi* učenici su imali priliku naučiti ponešto o Fourierovim redovima i njihovim sveobuhvatnim primjenama. Nezaobilazni su u analizi signala, formatiranju fotografija te računalnoj grafici, a sudionici su, uz teorijsku pozadinu, naučili kako se njima koristiti i primijeniti ih u modeliranju raznih periodičkih procesa.

Kroz projekt *Matematičke osnove fizike* učenici su upoznali formalnu definiciju osnovnih pojmova iz fizike (kao što su brzina i akceleracija) preko derivacija i integrala. Nadalje je uz osnove diferencijalnog računa objašnjavana mehanika, a posljednji dan proveden je i zanimljiv eksperiment određivanja gustoće vode preko frekvencije osciliranja slamke u vodi (odnosno otopini) koji je završen s rezultatima iznimno bliskim teorijski dobivenim vrijednostima.

Projekt *Fold and cut teorem* kao bazu je imao zanimljivu činjenicu iz teorije grafova o mogućnostima savijanja papira i skupu oblika koji se tim skupom poteza mogu dobiti. Koristeći jednu metodu, obrađeni su algoritmi za formiranje raznih oblika i argumentirana je njezina valjanost.

Projektom *Evolucijski algoritmi* proučavali su se računalni programi koji se mogu poboljšavati iz generacije u generaciju, slično kao i životinjske vrste. Za izvrsnu ilustraciju tih procesa, sudionici projekta su takvim programima pokušali "nacrtati" slike

što sličnije nekim poznatim djelima poput slavne Mona Lise, a rezultati su znali biti zbilja impresivni.

Na projektu *Matematika CT-a* učenici su upoznati s matematičkom osnovom rada mnogih uređaja, važnih prvenstveno za medicinske svrhe. Za potrebe projekta, učenici su upoznati s brojnim netrivialnim područjima i pojmovima poput diferencijalnog i integralnog računa te sinograma, ali i s radom u poznatom i vrlo korištenom matematičkom alatu MATLAB-u.

Projekt *Algebarske metode u geometriji* bio je fokusiran na usvajanje teorijske pozadine kompleksnih koordinata i baricentričnih koordinata u geometriji te njihove primjene na iznimno teškim, uglavnom olimpijskih natjecateljskih problema. Cilj je bio dati alternativu klasičnom planimetrijskom pristupu zahtjevnim geometrijskim zadacima.

Još jedan projekt koji se bavio natjecateljskom temom bio je *Vjerojatnosna metoda*. U projektu su učenici, od kojih su neki već i sudjelovali na matematičkim olimpijadama, naučili primjenjivati ovu metodu u rješavanju zahtjevnih olimpijskih zadataka.

Nešto drugačiji raspored aktivnosti na kampu imala je ekipa koja je predstavljala Hrvatsku na ovogodišnjoj Srednjoeuropskoj matematičkoj olimpijadi u Litvi. U jutarnjim i popodnevним satima izmjenjivala su se zahtjevna predavanja puna iznimno teških zadataka olimpijske razine te individualne i ekipne simulacije natjecanja. Za provedbu priprema MEMO ekipe na kampu odgovorno je nekoliko članova udruge koji su prethodnih godina zabilježili iznimne uspjehe na međunarodnim natjecanjima, a organizacija je ostvarena kroz suradnju s voditeljima MEMO ekipe, Matijom Bašićem i Ivanom Kokanom. Rezultat ovih priprema, a ponajprije napornog cjelogodišnjeg rada, su jedna zlatna i četiri brončane medalje, a ostaje tuga za jednim bodom koji nas je dijelio od ekipne medalje. Sve u svemu, bio je to još jedan jako dobar nastup hrvatskih olimpijaca na ovom natjecanju.



Slika 4. Večernja zabava uz gitaru s predavačem dr. sc. Mirzom Karamehmedovićem.

Tijekom kampa su održana i dva popularno-znanstvena predavanja vrlo zanimljive tematike. Najprije je dr. sc. Gordan Kreković održao predavanje "Matematika u stvaranju novih zvukova". Tim je predavanjem skrenuo pozornost na pojavljivanje sve veće količine umjetno stvorenih zvukova u modernoj glazbi i odlučio istaknuti i ulogu matematike u tom procesu. Tako je na primjeru svjetski popularnog hita "Shape of you" autora Eda Sheerana, probao ukrajno pojasniti kako određene transformacije utječu na mijenjanje zvuka. Vidjeli smo i primjere stvaranja nekih temeljnih

umjetnih zvukova, njihovo kombiniranje u kompliciranije zvukove te naučili o podešavanju optimalne čistoće zvuka. U pozadini svega leži kompleksna matematička aparatura, poput Fourierovih redova.

Drugo predavanje održao je dr. sc. Mirza Karamehmedović, popularno-znanstveni predavač s Danskog tehničkog sveučilišta, a govorio je o inverznim problemima. Najprije nam je ukrajno pojasnio što su uopće inverzni problemi i gdje ih nalazimo u prirodi i tehnici. Velikom vještinom uspio je iznijeti složeni matematički alat, uključujući napredniju linearnu algebru, kako bi dočarao probleme i metode njihova rješavanja. Iako je tema sama po sebi vrlo kompleksna i daleko nadmašuje predznanje sviju prisutnih slušatelja, dr. Karamehmedović uspio je postići razumljivost predavanja barem na intuitivnoj razini kod gotovo svakog slušatelja.

Bez obzira na gust raspored aktivnosti, ostalo nam je dovoljno vremena za zabavu. Budući da je i ovaj Ljetni kamp bio na moru, iskoristili smo mnoge slobodne trenutke za kupanje, ronjenje i picigin, ali nismo zaboravili odigrati i nekoliko košarkaških utakmica. U učeničkom domu dobro smo se zabavili igrajući stolni tenis, belu i trešet, a nekoliko večeri proveli smo uz nezaboravne karaoke i gitaru. Jednu smo večer već tradicionalno proveli igrajući pub kviz, a pobjedu je, iako tijesnu, odnio tim *Palekina IMO karijera*, osvojivši pritom vječnu slavu i kutiju domaćica. Ostale smo večeri uglavnom proveli igrajući “Mafiju” i družeći se.



Slika 5. S matematičko-nematematičkog pub-kviza.

Veselimo se sljedećem Ljetnom kampu, a još više nadolazećoj Zimskoj školi matematike u siječnju!

Vlatka Vazdar

## Sedma ljetna škola Pete

Ivana Martinić<sup>1</sup>

**Sažetak:** Sedma ljetna škola Pete na temu *CSI Peta* odvijala se od 3. do 7. srpnja 2017. svaki dan od 9 do 14 sati u V. gimnaziji, Zagreb.  
<http://www.petagimnazija.hr/ljsv/>

### Zašto CSI?



Slika 1. Spremni za odlazak na mjesto zločina.

Ljetna škola Pete svoj je put započela kao ljetna škola matematike sa željom da polaznici osvijeste gdje se sve i kako primjenjuje matematika u svakodnevnom životu. S godinama smo sve više uključivali ostale prirodoslovne predmete, a osluškajući želje i interese naših polaznika odlučili smo ovogodišnju ljetnu školu posvetiti forenzici. Na to nas je ponukala i prošlogodišnja suradnja s Centrom za forenzična ispitivanja, istraživanja i vještačenja “Ivan Vučetić”. Tema je iznimno aktualna i zanimljiva svim uzrastima te omogućuje brojna istraživanja iz kemije, biologije, matematike, fizike i informatike, što nam je i bio cilj. Posebno smo obratili pažnju na zablude i miskonceptije koje učenici mogu steći gledajući brojne serije s temom forenzike i istraživanja mjesta zločina.

<sup>1</sup> Autorica je profesorica matematike na V. gimnaziji u Zagrebu, e-pošta: [ivana.martinic@skole.hr](mailto:ivana.martinic@skole.hr)