

Sudoku – napredne metode rješavanja (4.2)

Žarko Čulić¹

U ovom nastavku ćemo obraditi *mreže s repom* i *Sashimi mreže*. Nazivi za veličinu i tip mreže su isti kao i kod *standardnih mreža*.

Mreže s repom (*Finned Fishes*) su *standardne mreže* kod kojih jedan ili više *baznih* (*base*) kandidata nije pokriveno *pokrovnim* (*cover*) područjem. Nepokriveni *bazni* kandidati čine tzv. *rep* (*fin*). U toj mreži mogu se eliminirati samo oni *pokrovni* kandidati koji nisu *bazni* kandidati, a vide sve *repove*. Dakle, možemo eliminirati samo one *pokrovne* kandidate koji se nalaze u istom kvadratu gdje je i *rep*.

Pojašnjenje: ili su svi *repovi* netočni i tada imamo *standardnu mrežu* koja eliminira sve *pokrovne* kandidate koji nisu *bazni* kandidati, ili je jedan od *repova* točan i na taj način eliminira sve kandidate koji su s njim povezani, odnosno nalaze se u istom kvadratu. U oba slučaja za *mrežu s repom* vrijedi da možemo eliminirati sve *pokrovne* kandidate koji nisu *bazni* i vide sve *repove*.

Pogledajmo jedan jednostavan primjer na slici 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
A	¹ ₄		5	2	6	7	¹ ₉	3	⁴ ₉	8
B	¹ ₄	⁹	3	¹ _{8 9}	¹ _{4 8}	⁴ _{8 9}	5	6	2	7
C	6	7	¹ _{8 9}	⁴ ₈	3	2	5	⁴ ₉	1	
D	2	8	³ ₉	⁴ ₇	⁴ _{8 9}	6	1	³ ₇	5	
E	⁵ ₉	6	⁵ _{9 7 8}	¹ _{8 9}	¹ ₉		2	³ ₇	4	
F	7	1	4	5	2	3	8	6	9	
G	8	2	7	3	1	4	9	5	6	
H	¹ ₅	9	¹ ₅	2	6	7	4	8	3	
I	3	4	6	9	5	8	7	1	2	

Slika 1.

Da nema broja 9 u polju B1 tada bi imali najjednostavniju *standardnu mrežu* 2×2 , odnosno *X-krilo*. Kandidat je broj 9, *bazni* redci su B i D, a *pokrovni* stupci su 3 i 5. Budući da *pokrovnim* stupcima nismo uspjeli pokriti sva *bazna* polja, tada imamo *mrežu s repom* ili točnije *X-krilo s repom* (*Finned X-Wing*). *Rep* je u polju B1. Ako je *rep* netočan, tada imamo standardno *X-krilo* i mogli bi eliminirati broj 9 iz polja CE3 i E5. Ako je *rep* točan, možemo eliminirati broj 9 iz kvadrata I gdje se nalazi i *rep*. U oba slučaja, a to je i konačan zaključak, možemo eliminirati broj 9 iz polja C3.

Pogledajmo još jedan primjer *mreže s repom* na slici 2. Radi se o mreži 3×3 , dakle o *sabljarki*. Kandidat je broj 7, *bazni* stupci su 1, 5 i 9, a *pokrovni* redci C, E i G. U polju A9 imamo *bazno* polje koje nije pokriveno *pokrovnim* retkom te stoga imamo

¹ Autor je predavač na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: zculic@math.hr

Sabljarku s repom (Finned Swordfish). Analogno gornjem primjeru, možemo eliminirati kandidate iz svih *pokrovnih* polja koja nisu *bazna*, a vide *rep*. U konkretnom primjeru možemo eliminirati broj 7 iz polja C7.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	2 _{7 9}		3 ⁴	1 ₉	8	6	5 ⁴		7 ₇
B	4	1	6	7	5	3	9	8	2
C	7 _{7 9}	5	8 ⁴	2 ₉	6	7 ₇	1 ⁴		7 ₇
D	8	4 ¹		3	6	2 ¹	9	5	
E	6	2 ¹		8 _{7 9}	5	4	3 ¹		7 ₇
F	5	3 _{7 9}		1	4 _{7 9}	8	2	6	
G	7 _{7 9}	6	5	2 _{7 9}	1 ¹	3 ¹	4	8	
H	3 _{7 9}	4	5	8	1 ¹	2	6 ¹		9
I	1 ¹	8	2	6 ³	4	5	7	1 ³	

Slika 2.

Na slici 3 imamo primjer *meduze s repom (Finned Jellyfish)* veličine 4×4 .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	5 ³	4 ²	9 ⁵	1	6 ⁴	8 ²	7		9 ²
B	2 ⁶	1	6 _{6 9}	8	7	5 ⁴	2 _{2 9}	3	
C	8	4 ²	7	3 ⁴	9 ⁴	6	5	1	
D	4 _{4 9}	5 _{6 9}	6 _{6 9}	2	1	7	3	8 _{8 9}	
E	2 ⁶	9	1	7	3 ^{8 9}	5	8 _{8 9}	4	
F	7	3 _{8 9}	5 _{8 9}	4 ^{8 9}	1	2 _{2 6 8 9}			
G	5 _{5 9}	7 _{5 9}	6 _{6 9}	4 ^{1 3}	3 ^{2 3}	4 ^{2 6}	5 ^{2 6}	8	
H	4 ⁸	8	2	5	6	9	1	7	
I	5 _{5 9}	6	2 _{4 9}	7 ^{1 3}	4 ³	8	5	8	

Slika 3.

Kandidat je broj 9, *bazni* redci su B, D, G i I, a *pokrovni* stupci 1, 3, 4 i 8. *Rep* je u polju D9. Shodno opisanom pravilu, možemo eliminirati broj 9 iz *pokrovnih* polja EF8 koja nisu *bazna*, a vide *rep*.

U slučaju da ima više polja *s repom*, tada možemo eliminirati samo ona *pokrovna* polja koja nisu *bazna*, a vide sva polja *s repom*.

Mreža s repom postaje *Sashimi mreža (Sashimi Fish)* ako imamo nepotpunu ili degenerativnu *standardnu mrežu*. Kandidat kojeg istražujemo bi trebao biti u barem dva polja na sjecištu *baznih* redaka/ stupaca i *pokrovnih* stupaca/ redaka u *mreži*, u protivnom se radi o nepotpunoj ili degenerativnoj *mreži*.

Pogledajmo primjer na slici 4.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	^{1 2} 6	^{1 2} 7	^{5 6}	^{4 5 6} 7	^{4 5} 7	^{1 5 6}	3	8	9
B	9	^{7 8}	4	^{7 8}	^{7 8}	2	5	6	1
C	^{1 3} 6	^{1 3} 8	^{3 5 6} 8	^{1 5 6} 8	9	^{1 3 5 6} 8	7	2	4
D	4	6	1	9	2	7	8	5	3
E	8	5	9	3	6	4	1	7	2
F	³ 7	³ 7	2	^{1 5 8} 7	^{5 8} 7	^{1 5} 7	4	9	6
G	^{2 3} 6	9	7	^{2 5 6} 8	1	^{3 5 6} 8	^{2 6} 7	4	8
H	^{1 2 3} 4	^{1 2 3} 4	^{3 6} 4	^{2 6 4} 7	^{2 6 4} 7	8	9	^{1 3} 7	7
I	^{1 2 3} 4	^{1 2 3} 4	^{3 6} 8	^{2 6 4} 7	³ 7	9	^{2 6} 7	^{1 3} 7	5

Slika 4.

Kandidat je broj 3, *bazni* stupci su 3 i 6, a *pokrovni* redci C i G. Budući da nedostaje broj 3 u G3, mreža je nepotpuna (*Sashimi mreža*), a budući da broj 3 u *baznim* poljima H13 nije pokriven *pokrovnim* redcima to su *repovi* (*Fins*), odnosno radi se o *Sashimi X-krilu s repom* (*Finned Sashimi X-Wing*).

Analiza je identična kao i kod *mreža s repom*: ako su *repovi* netočni, mora biti točan broj 3 u poljima *X-krila* C3 i G3, a ako je bilo koji *rep* točan, tada mora biti točan broj 3 u drugom dijelu *X-krila* u polju C6. U oba slučaja možemo eliminirati broj 3 iz G1 jer je u *pokrovnom* polju izvan *baznih* polja i vidi sve *repove*.

Na slici 5 imamo primjer degenerativne mreže 3×3 s *repom*, odnosno *Sashimi sabljarku s repom*. Kandidat je broj 2, *bazni* redci su B, F i I, *pokrovni* stupci 2, 5 i 8, nepotpuna mreža u retku F, a *rep* je u polju F4. Možemo eliminirati broj 2 iz polja DE5 jer su to *pokrovna* polja izvan *baznih*, a vide sve *repove*.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	2	⁴	7	8	9	5	6	^{4 3}	1
B	5	^{1 3 6}	¹ 6	7	^{2 5}	4	9	^{2 5}	8
C	^{1 3} 4	9	8	^{1 2 3} 7	^{1 2 3} 7	6	^{2 3 4 5 7} 5	^{2 3 5} 7	^{2 5} 7
D	^{1 3 6} 7	^{1 2 3 5 6} 7	^{1 2 5 6} 7	4	^{1 2} 7	9	^{1 2 5 8} 7	^{1 2 5 8} 7	^{2 5} 7
E	^{1 4} 7	^{1 2 4 5 7} 7	^{1 2 4 5} 7	^{1 2 4 5} 7	6	^{1 2 7} 7	8	9	3
F	8	^{1 2}	9	^{1 2}	5	3	7	6	4
G	^{1 4} 9	^{1 4 5 8} 8	^{1 4 5} 8	3	6	2	^{1 5 8} 7	^{1 5 8} 7	^{5 7 9} 9
H	^{1 6 9} 8	^{1 2 6} 8	^{1 2 6} 8	5	4	7	^{1 2 3 8} 7	^{1 2 3 8} 7	^{2 9} 9
I	7	^{2 5}	3	9	8	1	4	^{2 5}	6

Slika 5.

Sashimi mreže (Sashimi Fishes) su uvijek mreže s *repom*, pa ih možemo zvati i *Sashimi mreže s repom (Finned Sashimi Fishes)*.

Na slici 6 imamo primjer *Sashimi meduze*. Kandidat je broj 8, *bazni* redci su A, D, F i I, *pokrovni* stupci su 1, 2, 8 i 9, a *rep* je u I3. Mreža je veličine 4×4 i vidimo da je nepotpuna (degenerična) jer nedostaje broj 8 ili u I1 ili u I2 ili u I8. Sukladno pravilima za eliminaciju, možemo maknuti sve *pokrovne* kandidate koji nisu *bazni*, a vide sve *repove*. U konkretnom slučaju možemo eliminirati broj 8 iz polja GH12.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	5 7 8 9	5 7 8 9	3	4	1	6	2	5 7 8 9	5 7 8 9
B	2	6	8 9	7 9	5 8 9	3	1	5 7 8 9	4
C	1	5 7 8 9	4	2	5 7 9	8	7 8 9	3	6
D	8 9	4	6	3	7	1	5	8 9	2
E	5 9	2	1	8	4	5 9	7 6 9 7	6 9	7 9 3
F	5 8 9	5 8 9	7	6	2	5 9	4	1	8 9
G	6 7 8 9	7 8 9	5	9	3	8	7 8 9	6 4	1
H	3 7 8 9	3 7 8 9	2	1	8 9	4	7 8 9	6 5 7 8 9	5 7 8 9
I	4	1	8 9	5	6	7	3	2	8 9

Slika 6.

Napomenuli smo da je mreže veće od 4×4 teže uočiti, pa isto vrijedi i za takve mreže s *repom*, odnosno *Sashimi mreže*.

Na slici 7 je primjer *Franken mreže*.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	2 5 8	2 4 5 8	6	7	2 4 8	2 4 5	3	9	1
B	1 5 7 8	1 4 5 7 8	9	3	1 4 8	4 5	5 7 8	6	2
C	3	1 2 5 7 8	2 8	1 5 6 8 9	1 2 6 8 9	2 5 6 9	5 7 8	4	7 8
D	1 2 6 8	1 2 5 8 9	2 8	5 6 8	3	5 6 7 9	2 6 5 7 9	8	4
E	5 6 8	5 8 9	7	2	4 6 8 9	4 5 6 9	6 8 9	1	3
F	4	2 5 8 9	3	5 6 8 9	7 8 9	1	2 6 7 8 9	5 8	7 8 9
G	2 9	3	1	4 6 7	6	8	4 9	7	5
H	2 7 8	2 7 8	4	9	5	3	1	2 8	6
I	2 8 9	6	5	1 4 7	1 2 7	2	4 9	3	8 9

Slika 7.

Franken mreža je naziv za mrežu u kojoj se u barem jednom području (*baznom* ili *pokrovnom*) koristi kvadrat. U konkretnom primjeru kandidat je broj 8, a *bazno* područje čine stupci 3 i 4 te kvadrat VI, dok *pokrovno* područje čine redci C, D i F. *Bazno* polje

koje nije pokriveno *pokrovom* je polje E7 i to je *rep*. Vidimo da se radi o mreži veličine 3×3 gdje se u jednom području koristi i kvadrat tako da je to *Franken sabljarka* s repom (*Finned Franken Swordfish*). U konkretnom primjeru možemo eliminirati broj 8 iz polja C7 jer je to *pokrovno* polje koje nije *bazno* i vidi *rep*.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
A	3	6	1	7	⁴ ₈	⁴ ₈	2	9	5		
B	8	4	2	3	9	5	6	7	1		
C	_{7 9}	5	_{7 9}	2	6	1	4	8	3		
D	1	₇	⁹	8	5	2	6	_{7 9}	3	4	
E	6	2	5	⁴ ₉	⁴ ₇	³ ₄	³ ₉	_{7 9}	1	8	
F	₇	⁹	3	4	1	_{7 8}	⁸ ₉	5	2	6	
G	4	₇	⁹ ₇	³ ₉	6	1	³ ₉	⁹	8	5	2
H	5	8	₉	⁴ ₉	⁴ ₉	³	2	1	6	7	
I	2	1	6	8	5	7	3	4	9		

Slika 8.

Na slici 8 imamo primjer *Mutant mreže*. Radi se o mreži gdje se u barem jednom području miješaju stupci i redci, neovisno o uporabi kvadrata. U *Mutant mreži* su dopuštene sve moguće kombinacije. Pri tome *bazno* i *pokrovno* područje ne smije biti isto, ali se polja smiju preklapati unutar pojedinog područja (to su tzv. *interni repovi* koji se tretiraju kao i standardni repovi).

Kandidat je broj 9, *bazno* područje čine redak F i stupac 2, dok *pokrovno* područje čine stupac 6 i kvadrat IV. *Bazni* kandidat u polju G2 nije pokriven, pa je to *rep*. U ovom slučaju imamo mrežu 2×2 gdje se u jednom području miješaju stupci i redci, tako da je to *Mutant X-krilo s repom* (*Finned Mutant X-Wing*). U primjeru možemo eliminirati broj 9 iz *pokrovnog* polja G6 koje nije *bazno* polje i vidi *rep* u G2. Ako pogledate malo bolje, uočiti ćete da se radi o običnom *zmaju*, metodi koju smo obradili kod jednostavnih *X-lanaca* ili točnije kod *šablona s jednom znamenkom* (*Single Digit Patterns*), a s kojom bi znatno brže i lakše došli do navedene eliminacije.

I na kraju pogledajmo primjer na slici 9 s izuzetno kompliciranom *mrežom* koja će vam dočarati svu kompleksnost rješavanja sudokua pomoću *mrežne metode*. Vidimo da se broj 4 nalazi u 8 redaka i 8 stupaca i ne bi ništa postigli da napravimo *mrežu* 8×8 . Zato kao *bazno* područje koristimo retke C i E, stupce 8 i 9 i kvadrate IV i IX, dok *pokrovno* područje čine stupci 3, 4 i 7, redci F i I te kvadrat III. *Rep* je u polju D1 (*bazno* područje koje nije pokriveno *pokrovnim* područjem). Radi se o mreži 6×6 koja miješa retke i stupce u pojedinom područje, dakle imamo *Mutant kit s repom* (*Finned Mutant Whale*). Polje I8 se koristi dva puta u *baznom* području (stupac 8 i kvadrat IX), pa ga treba tretirati kao *rep* ili točnije kao *interni rep* (*endo fin*). U primjeru možemo eliminirati broj 4 iz polja I1 jer je to *pokrovno* polje koje nije *bazno*, a vidi i *rep* i *interni rep*. Vrlo teško je u praksi otkriti takvu "čudovišnu" mrežu, a to uostalom nije ni potrebno jer se eliminacija može jednostavnije obaviti pomoću metode *petlje* ili *forsiranih lanaca* o čemu će biti više riječi u nastavku serijala.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9		7		5				
B	1			7			9		
C	8	6			9		5	7	
D		8			6	1		9	
E	3	1	6		5	9			7
F	2		9	1			6	5	
G					2			9	6
H		9				4			8
I				9			3		5

Slika 9.

U sljedećem nastavku ćemo obraditi metode *bojanja*.

Zadatak za vježbu s rješenjem:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	5	9							
B	4		7			3			
C			8	5	4	6			
D			4		5				6
E				8	9	4			
F	8				6		2		
G				4	8	5	9		
H				2			8		5
I								7	4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	5	9	6	1	7	8	4	2	3
B	4	1	7	9	2	3	6	5	8
C	3	2	8	5	4	6	7	9	1
D	9	7	4	3	5	2	1	8	6
E	1	6	2	8	9	4	5	3	7
F	8	5	3	7	6	1	2	4	9
G	7	3	1	4	8	5	9	6	2
H	6	4	9	2	3	7	8	1	5
I	2	8	5	6	1	9	3	7	4