Stručni rad/Professional paper
Primljen/Received: 19. 3. 2019.
Prihvaćen/Accepted: 9. 5. 2019.

NAČELA FRAKTALNE GEOMETRIJE I PRIMJENE U ARHITEKTURI I GRAĐEVINARSTVU

Anton Vrdoljak, mr. sc.
Građevinski fakultet Sveučilišta u Mostaru, *anton.vrdoljak@gf.sum.ba*
Kristina Miletić, dipl. ing. matematike
Građevinski fakultet Sveučilišta u Mostaru, *kristina.miletic@gf.sum.ba*

Sažetak: U ovom radu prikazan je kraći osvrt na fraktale, te neke moguće primjene fraktalne geometrije u arhitekturi i građevinarstvu. Zanimanje za ovom matematičkom disciplinom je u neprekidnom rastu još od kraja 20. stoljeća, kako zbog same očaravajuće ljepote fraktala, tako i zbog općeprihvaćene spoznaje da je dosta oblika u prirodi, ako ne i svi, nepravilno i neravno, odnosno kaotično (priroda je fraktalna). Fraktalna geometrija, nasuprot euklidskoj, nudi znatno bolje metode za opisivanje prirodnih objekata, te samim time i za postizanje harmonije sa prirodom, tj. sklada između izrazite preciznosti i kaotične nesavršenosti.

Ključne riječi: fraktali, samosličnost, fraktalna geometrija, zlatni rez, arhitektura, građevinarstvo

PRINCIPLES OF FRACTAL GEOMETRY AND APPLICATIONS IN ARCHITECTURE AND CIVIL ENGINEERING

Abstract: This paper presents a brief overview of fractals and some possible applications of fractal geometry in architecture and civil engineering. The interest in this mathematical discipline has been steadily growing since the end of the 20th century, due to the fascinating beauty of fractals as well as the generally accepted perception that many shapes in nature, if not all, are irregular and rugged, or chaotic (nature is fractal). Fractal geometry, in contrast to Euclidean geometry, offers considerably better methods for describing natural objects, and thereby for achieving harmony with nature, or harmony between clear precision and chaotic imperfection.

Keywords: fractals, self–similarity, fractal geometry, golden ratio, architecture, civil engineering

1. Uvod

Fraktali se smatraju jednom od najvećih tajni dizajna prirode, ljudima su poznati od pamtivijeka, samo što ih kao takve nisu prepoznavali. Jedan od najznačajnijih fraktala – zlatni rez – nalazimo u drevnim kulturama, a pogotovo u starogrčkoj matematici. U arhitekturi se fraktali od davnina koriste kao ukrasni elementi, a dokumentirani prikaz fraktala u umjetnosti nalazimo već 1525. godine u *Priručniku za slikanje* Albrechta Dürera, gdje se opisuju uzorci nastali korištenjem pentagona (zlatnog reza). Benoit Mandelbrot, francusko–američki matematičar poljskog podrijetla, je 1975. godine skovao pojam fraktal i definirao je njegovo značenje, te se od ove godine fraktali intenzivno proučavaju kao matematička disciplina. Premda se smatra ocem fraktalne geometrije, mnogi dijelovi (matematički pojmovi) iz njegove knjige *Fraktalna geometrija prirode* (engl. *The Fractal Geometry of Nature*) već su prije opisani (konstruirani) od strane drugih matematičara krajem 19. i početkom 20. stoljeća (Cantor, Hilbert, Koch, Sierpiński…), a neke korijene ideja o fraktalima možemo pronaći i u djelima koja datiraju još u 18. stoljeće, našeg znanstvenika i filozofa Ruđera Boškovića.

2. Što su fraktali?

Riječ fraktal (engl. *fractal*) izvedena je iz latinske riječi *frangere*, što bi u slobodnom prijevodu značilo slomiti, smrviti, ili raskomadati[16]. Prema Uglešiću hrvatski bi ih se moglo nazvati mrvljenicima [19]. Iz latinskog jezika dolazi i riječ *fractus*, što je korijen engleske riječi *fractured*, u slobodnom prijevodu slomljen, smrvljen ili izlomljen, što je particip prošli riječi *frangere*. Prema Mandelbrotovoj definiciji to su geometrijski objekti čija je fraktalna dimenzija veća ili jednaka od euklidske dimenzije [16]. Najjednostavnije ih je definirati kao samoslične beskonačne objekte. Drugim riječima, to bi bili geometrijski objekti koji daju jednaku razinu detalja neovisno o razlučivosti koju koristimo. Fraktale je moguće uvećavati beskonačno mnogo puta, a da se pri svakom novom povećanju vide neki detalji koji prije povećanja nisu bili vidljivi, i da količina novih detalja uvijek bude otprilike jednaka. Premda su nepravilnog izgleda, nazubljeni su i imaju ponavljajući oblik, nalazimo ih svuda oko nas.

Dakle, osnovna je ideja fraktalne geometrije samosličnost – svojstvo objekta da sliči sam sebi bez obzira koji dio promatrali i koliko ga puta uvećavali, odnosno da se može razložiti na manje dijelove koji predstavljaju (makar i približno) umanjenu kopiju cjeline. Grubo govoreći, za neki objekt kažemo da je samosličan ako dopušta rastav na objekte koji su njegove manje kopije, odnosno ako je struktura cjeline objekta sadržana u njezinim dijelovima [19]. Pored samosličnosti, osnovnim svojstvima fraktala smatraju se fraktalna dimenzija (tj. stupanj nepravilnosti) i oblikovanje (konstrukcija) iteracijom (oblikovanje iteracijom predstavlja svojstvo da se objekt generira nekim matematičkim ili geometrijskim postupkom, tako da se u početni objekt iterativno ugrađuju svojstva generatora) [16].

Fraktalna dimenzija bi bila vrijednost koja nam daje uvid u to u kojoj mjeri neki fraktal ispunjava prostor u kojem se nalazi. Drugim riječima, fraktalnu dimenziju ćemo koristiti kako bismo izrazili gustoću kojom objekt ispunjava prostor, odnosno kako bismo izrazili koliko se novih dijelova pojavljuje pri povećanju rezolucije. Fraktalna dimenzija nije cijeli broj i u pravilu je veća od euklidske dimenzije [16]. Za samoslične objekte $\mathfrak{F}$ prirodno je definirati dimenziju samosličnosti ili skalirajuću dimenziju $d(\mathfrak{F})$ izrazom:

$$d(\mathfrak{F}) = \frac{\log(N)}{\log(r)}, \tag{1}$$

gdje je N broj novih kopija objekta promatrano nakon uvećanja, a r faktor uvećanja.

Fraktale možemo klasificirati prema stupnju njihove samosličnosti, te prema načinu njihovog nastanka [16]. Prema stupnju samosličnosti fraktale možemo podijeliti na:

- potpuno samoslične fraktale – sadrže kopije sebe koje su slične cijelom fraktalu (najjači stupanj samosličnosti), a još ih nazivamo i geometrijskim fraktalima;
- kvazi samoslične fraktale – sadrže male kopije sebe koje nisu slične cijelom fraktalu, te se pojavljuju u iskrivljenom obliku, a poznati su i pod nazivom algebarski fraktali;
- statistički samoslične fraktale – ne sadrže kopije samog sebe (najmanji stupanj samosličnosti), ali neke osobine fraktala (npr. fraktalna dimenzija) ostaju iste pri različitim mjerilima.

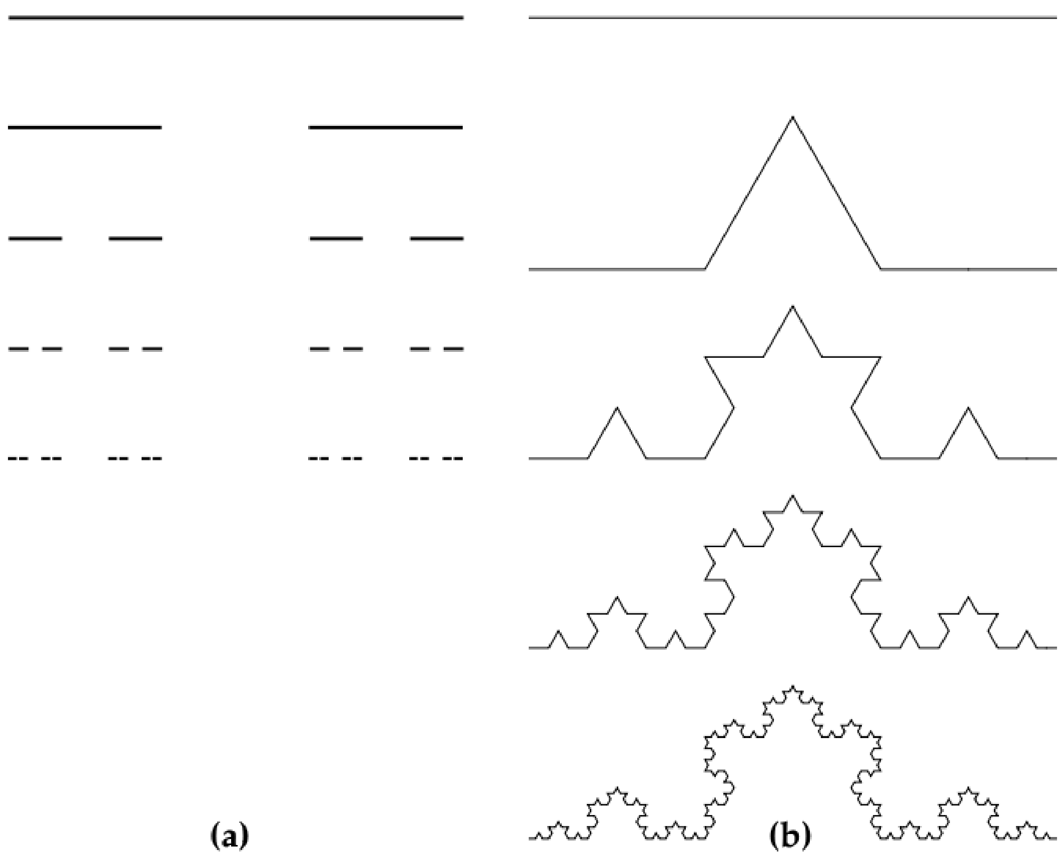
Prema načinu nastanka fraktale možemo podijeliti na:

- iterativne fraktale – nastaju kopiranjem te rotiranjem i/ili translatiranjem kopije, te mogućim zamjenjivanjem nekog elementa kopijom – to su samoslični fraktali;
- rekurzivne fraktale – određeni su rekurzivnom matematičkom formulom koja određuje pripada li određena točka prostora (npr. kompleksne, odnosno Gaussove ravnine) skupu ili ne – to su kvazi samoslični fraktali;
- slučajne ili *random* fraktale – posjeduju najmanji stupanj samosličnosti i nalazimo ih često u prirodi (obalni pojasevi, riječni rukavci i tokovi, planinski lanci, prašume, korijenje i krošnje drveća, listovi, cvijeće, oblaci, munje, klimatski sustavi, snježne pahuljice, bakterije, pluća, krvožilni sustavi…) – to su statistički samoslični fraktali.

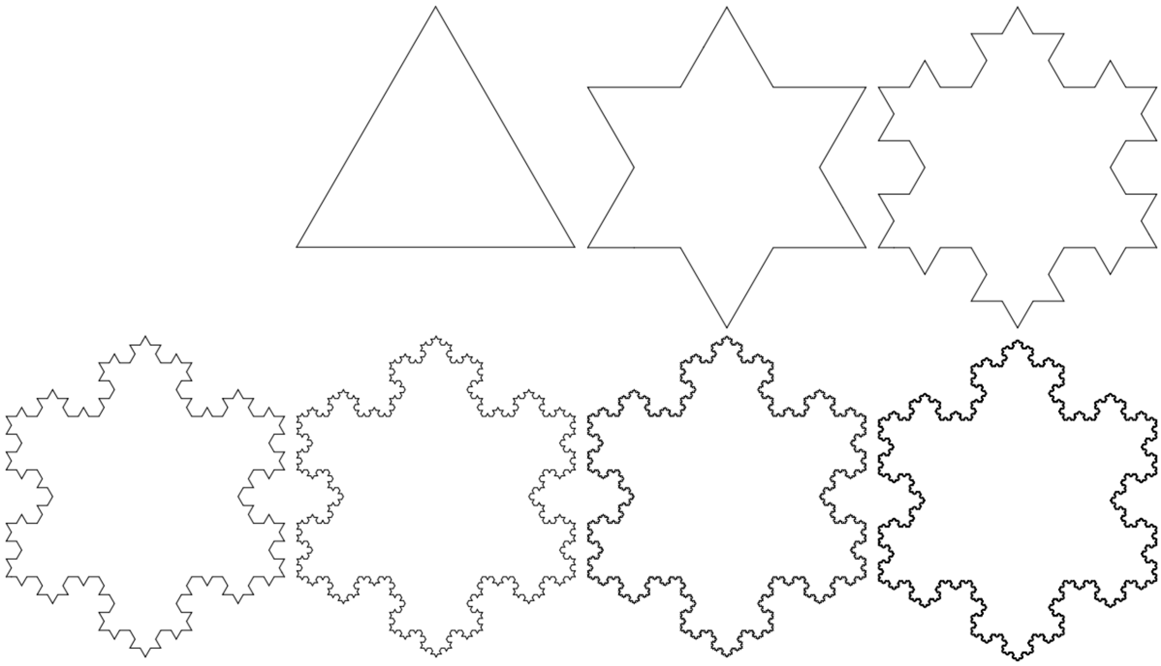
Primjeri potpuno samosličnih fraktala su:

- Cantorov skup – podskup odvojenih točaka koji preostaje kada se dužina duljine 1 podijeli na tri jednaka podintervala, izbace se sve točke iz srednjega podintervala, svaki od preostalih podintervala podijeli se na tri, izbace se sve točke iz srednjega od tih triju podintervala i tako se nastavi beskonačno mnogo puta (slika 1. a);
- Cantorova prašina i oblak – višedimenzionalni analogoni Cantorova skupa;
- Kochova krivulja – konstruira se tako da se u prvom koraku dužina duljine a podijeli na tri jednaka segmenta, svaki duljine $a/3$, a zatim se na srednji segment dodaju još dvije dužine jednakih duljina tako da zajedno sa srednjim segmentom tvore jednakostranični trokut; nakon toga ukloni se srednji segment i sada imamo četiri dužine jednakih duljina (svaka od njih iznosi $a/3$); u drugom koraku nad svakom od ove četiri dužine ponovimo postupak iz prvog koraka, itd. (slika 1. b);
- Kochova pahuljica – dobije se u slučaju kad postupak iteracije, opisan za Kochovu krivulju, umjesto s dužinom duljine a započinje s jednakostraničnim trokutom kojemu su stranice duljine a (slika 2.);
- Sito (trokut) Sierpińskog – konstrukcija započinje tako da se od početnog jednakostraničnog trokuta oduzme trokut (također jednakostranični) koji se dobije spajanjem polovišta stranica početnog trokuta; preostala tri jednakostranična trokuta predstavljaju polazište za sljedeći korak, itd. (slika 3.);
- Tepih i tetraedar Sierpińskog – dobiju se u slučaju kad sličan postupak iteracije opisan za sito Sierpińskog primijenimo na kvadrat odnosno tetraedar;
- Mengerova spužva – trodimenzionalni analogon tepihu Sierpińskog; svaka strana Mengerove spužve je tepih Sierpińskog, a svaka dijagonala Cantorov skup (slika 4.).

Julijev skup (slika 5. a) i Mandelbrotov skup (predstavlja jedinstvo jednostavnosti i kompleksnosti, slika 5. b) najpoznatiji su primjeri kvazi samosličnih fraktala, a po mišljenju mnogih i najljepši fraktalni oblici. Neki od primjera statistički samosličnih fraktala su Perlinov šum, pretežno se upotrebljava u računalnoj grafici (na primjer kod stvaranja računalnih krajolika), Lorenzov atraktor, Brownovo gibanje.



Slika 1. Prve četiri iteracije za: (a) Cantorov skup; (b) Kochovu krivulju [36].



Slika 2. Početni jednakostranični trokut i prvih šest iteracija za Kochovu pahuljicu [36].

Razlog zbog čega se smatraju jednom od najvećih tajni dizajna prirode je najbolje razumjeti promatrajući tablicu 1. Iz nje je jednostavno zaključiti kako će se u svakoj sljedećoj iteraciji duljina Kochove krivulje (početni geometrijski objekt je dužina duljine a) povećati za faktor 4/3 odnosno kako će duljina Kochove krivulje L_n težiti k beskonačnosti kada broj ponavljanja (iteracija) n teži k beskonačnosti, tj.

$$L = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n a \to +\infty. \tag{2}$$

S druge strane, korištenjem dobro poznate formule za površinu jednakostraničnog trokuta i pravilnom primjenom iste na osnovice dobivene iterativnim postupkom, možemo zaključiti kako je površina ravninskog lika ispod Kochove krivulje konačna, konstanta vrijednost, premda se svakom novom iteracijom ova površina povećava. Naime, vrijedi:

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 4\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{9}\right)^2 + 16\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{27}\right)^2 + \ldots = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}\frac{4}{5} = \boxed{\frac{a^2\sqrt{3}}{20}}. \tag{3}$$

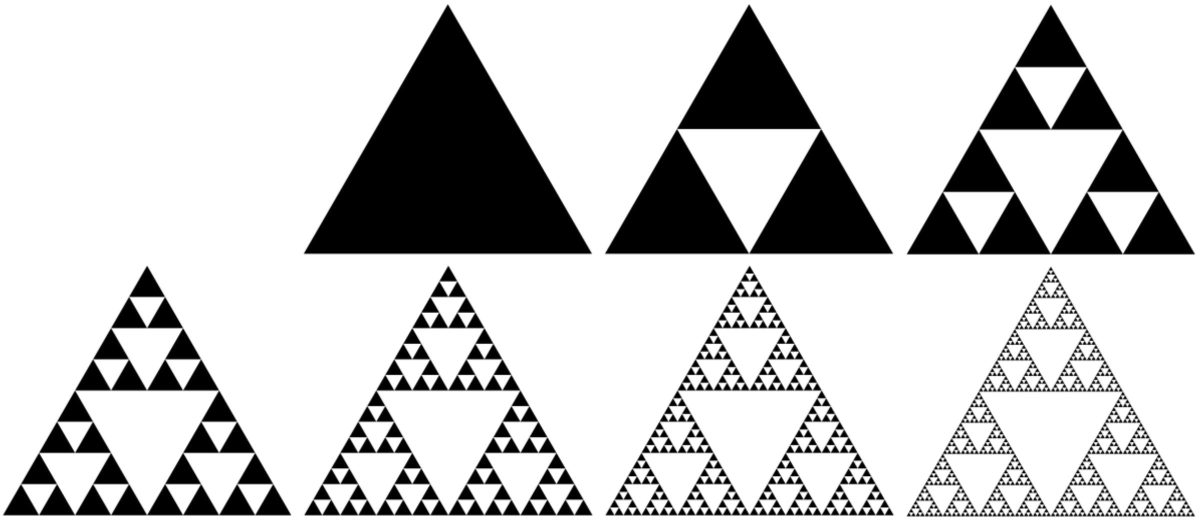
Isti zaključak smijemo uzeti i za opseg Kohove pahuljice (početni geometrijski objekt je jednakostranični trokut kojemu su stranice duljine a), tj. opseg Kochove pahuljice je beskonačan (odnosno, teži u beskonačno). No, njezina je površina konačna, tj. vrijedi:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 3\cdot 4\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{9}\right)^2 + 3\cdot 4\cdot 4\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{27}\right)^2 + 3\cdot 4\cdot 4\cdot 4\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{81}\right)^2 + \ldots = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2\sum_{k=1}^{\infty}4^{k-1}\frac{1}{9^k} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{16}a^2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{16}a^2\frac{4}{5} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{5}a^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

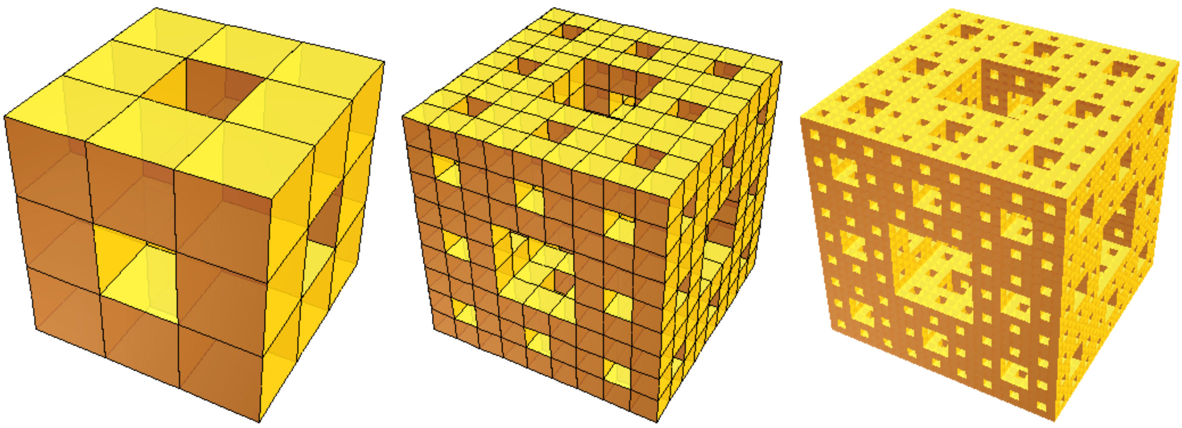
Dakle, Kochova pahuljica predstavlja omeđen ravninski lik konačne površine (iznosa 8/5 površine početnog geometrijskog objekta) s beskonačnim opsegom. Fraktalne dimenzije (dimenzije sličnosti) Kochove krivulje i Kochove pahuljice su jednake i iznose približno 1,26, dok je fraktalna dimenzija Cantorovog skupa približno 0,63, i veće su od njihovih topoloških dimenzija. Za Cantorov skup je znakovito to da je ekvipotentan (jednakobrojan) skupu realnih brojeva, kao da je i kompaktan te savršen skup, koji je još potpuno nepovezan. Najgrublje rečeno, kompaktnost skupa (prostora) je generalizacija konačnosti. Neformalna definicija bi bila: topološki prostor je kompaktan (sažet) ako ima osobinu da kad god je podskup od unije beskonačno mnogo otvorenih skupova, da je on podskup i od unije konačno mnogo tih skupova. Grubo govoreći povezan skup je onaj „koji se sastoji od jednog komada“,a potpuno nepovezan skup je onaj kod kojeg su jednočlani podskupovi njegovi jedini povezani podskupovi. Savršen skup je svaki skup za čije točke vrijedi da su to i gomilišta tog skupa.

Tablica 1. Duljine Cantorovog skupa i Kochove krivulje nakon prve četiri iteracije.

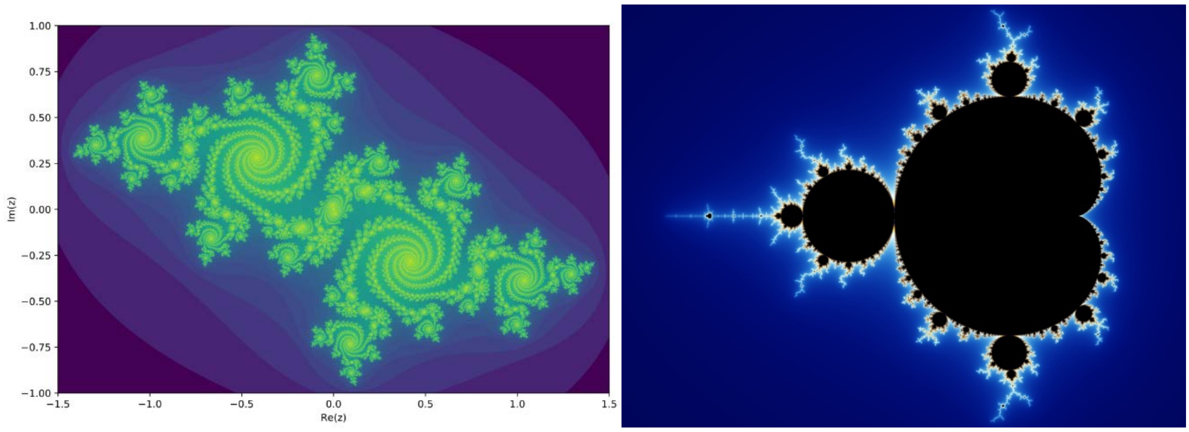
Fraktal	**Duljina nakon 1. iteracije**	**Duljina nakon 2. iteracije**	**Duljina nakon 3. iteracije**	**Duljina nakon 4. iteracije**
Cantorovskup	2/3 ≈ 66.67%	4/9 ≈ 44.44%	8/27 ≈ 29.63%	16/81≈19.75%
Kochova krivulja	L_1 = (4/3)· a ≈ 1.33· a	L_2 = (16/9)· a ≈ 1.78· a	L_3 = (64/27)· a ≈ 2.37· a	L_4 = (256/81)· a ≈ 3.16· a



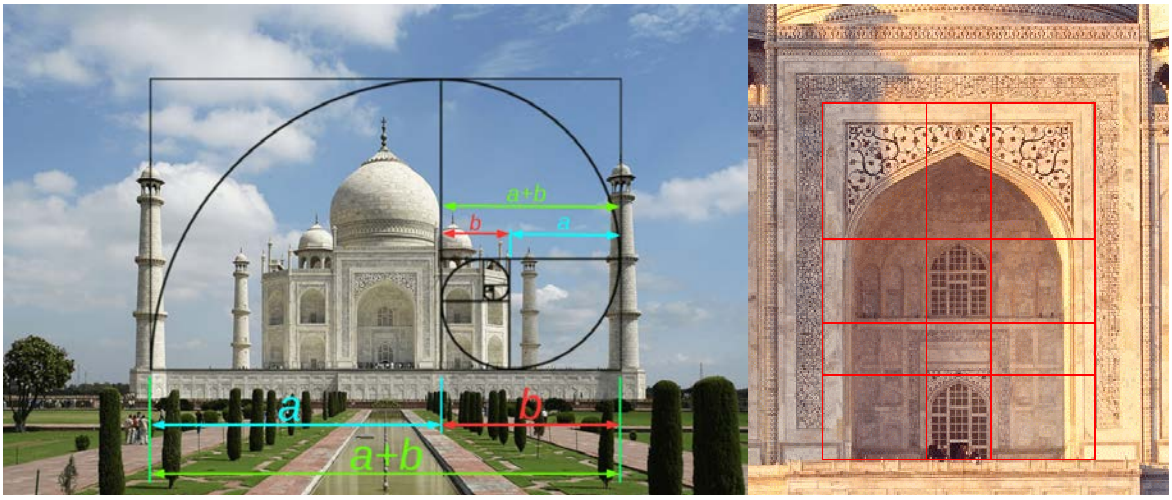
Slika 3. Početni jednakostranični trokut i prvih šest iteracija sita (trokuta) Sierpińskog[36].



Slika 4. Prve tri iteracije Mengerove spužve – kocke kojoj je obujam 0 a oplošje ∞ [36].



Slika 5. (a) Julija skup; (b) Mandelbrotov skup [izvor: www.wikipedia.org].

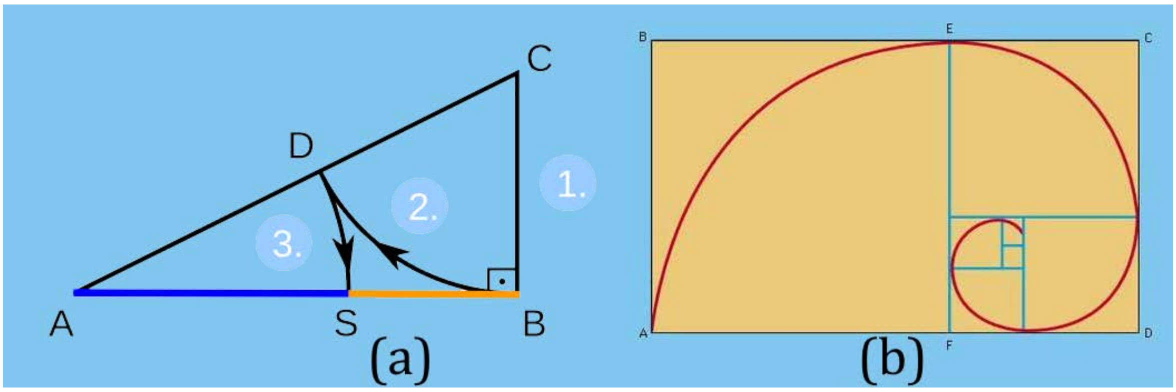


Slika 6. Mauzolej Taj Mahal u Agri izgrađen u 17. stoljeću; vanjski okviri glavne zgrade kao i okvir glavnih vrata zlatni su pravokutnici[33], [izvor: www.pinterest.com].

3. Fraktalna geometrija u arhitekturi i građevinarstvu

Namjerno ili nenamjerno, arhitekti, graditelji i ostali građevinski stručnjaci od davnina koriste matematiku i geometriju kao najosnovniji, ali ipak dosta vrijedan alat u skoro svim fazama arhitektonsko–građevinskih projekata. Povijest pamti velike graditelje i arhitekte koji su bili i veliki matematičari, i obratno (Vitruvius, Leonardo Da Vinci,…). Matematika i arhitektura su uvijek bile bliske, ponajviše zbog njihove zajedničke težnje redu i ljepoti [33]. Otkriće fraktalne geometrije (odnosno geometrije prirode), kojeg pripisujemo francusko–američkom matematičaru Benoitu Mandelbrotu, neminovno je dovelo do velike revolucije u prirodoslovnim i tehničkim znanostima, pa tako i u arhitekturi i građevinarstvu kao poljima tehničkih znanosti. Razlog zbog čega se fraktali toliko mnogo koriste leži u tome što je dosta oblika u prirodi (obalni pojasevi, riječni rukavci i tokovi, planinski lanci, prašume, korijenje i krošnje drveća, listovi, cvijeće, oblaci, munje, klimatski sustavi, snježne pahuljice, bakterije, pluća, krvožilni sustavi…) nepravilno i neravno, i nudi te nepravilnosti u različitim razmjerima. Osobine svih ovih oblika su u osnovi u suprotnosti s osobinama pravilnih geometrijskih oblika i tijela euklidske geometrije (kugla, kocka, piramida, stožac), ali se mogu znatno bolje prikazati pomoću fraktala (priroda je fraktalna). Drugim riječima, fraktalna geometrija, nasuprot euklidskoj, nudi znatno bolje metode za opisivanje prirodnih objekata. Neravne karakteristike prirode ne modeliraju se pomoću glatkih oblika euklidske geometrije, već se novi pristup fraktalne kompleksnosti nosi s neravninama same strukture. Iako kompleksan, fraktal je najčešće opisan jednostavnim algoritmom, što kazuje kako iza najvećih neravnina i nepravilnosti postoji neka zakonitost [16].

Unatoč tome što se fraktalna geometrija razvila tek krajem 20. stoljeća, fraktali su ljudima poznati od pamtivijeka, samo što ih kao takve nisu prepoznavali (na primjer zlatnim rezom bavili su se Pitagora i Euklid, u vezi s konstrukcijom dodekaedra i ikosaedra, tj. poliedara omeđenih s dvanaest odnosno dvadeset ploha). Arhitekti i graditelji od davnina koriste fraktale kao dekorativne elemente. Kao primjeri drevne arhitekture u kojoj su prisutne ili dominiraju fraktalne komponente najviše se ističu egipatske piramide, budistički i hinduistički hramovi, gotičke katedrale, ali i neke katedrale iz ranijeg perioda [2], [6], [11]. Povjesničari matematike i povjesničari umjetnosti ni dan danas sa sigurnošću ne mogu odrediti kada se zlatni rez prvi put pojavio u nekoj od starih civilizacija, no svi oni se slažu kako se zlatni rez, namjerno ili ne, primjenjivao u Starom Egiptu pri konstrukciji Keopsove piramide u Gizi (omjer visine pobočke i polovine duljine brida baze), jednom od sedam čuda starog svijeta koje i dan danas postoji.



Slika 7. (a) Konstrukcija zlatnog reza, AB : BC = 2:1; (b) Zlatni pravokutnik i zlatna spirala.

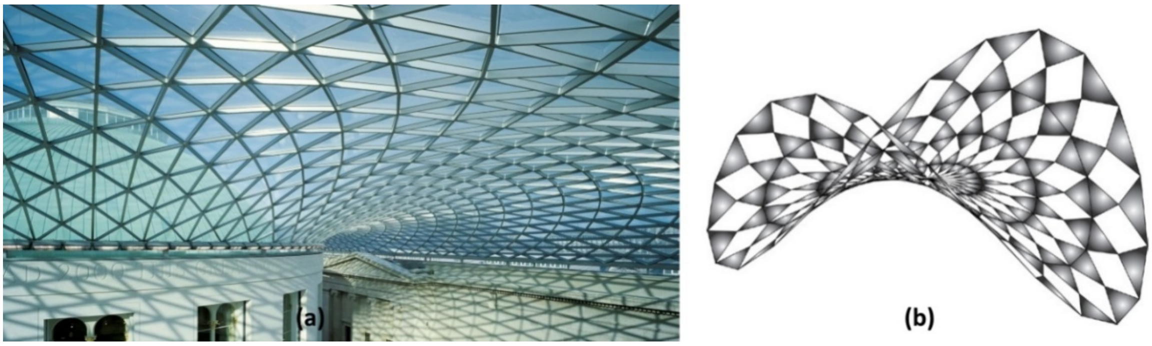
Upravo se zlatni rez ponajprije upotrebljavao u antičkom i hinduističkom graditeljstvu, gotici, renesansi, te kasnije u klasicizmu, najčešće kod projektiranja pročelja odnosno tlocrta hramova, mauzoleja, crkvi i katedrala (Partenon na atenskoj Akropoli (432. godina prije Krista), Taj Mahal u Agri (1653., slika 6.), katedrale u Ananji (1104.), Firenci (1436.), Milanu (slika 8.), Parizu (1345.), Reimsu (1275.),…). Zlatni rez (lat. *sectio aurea*, ili božanski omjer, slika 7. a) je omjer dijelova neke dužine kod kojega se cijela dužina $a+b=AB$ odnosi prema većem dijelu $b=AS$ kao što se veći dio b odnosi prema manjemu $a=SB$, odnosno $(a+b):b=b:a=\varphi$, $\varphi=\left(1+\sqrt{5}\right)/2\approx 1{,}618$. Zlatni pravokutnik (slika 7. b), odnosno pravokutnik kojemu su stranice u omjeru zlatnog reza, smatramo fraktalom, jer ima sljedeću osobinu samosličnosti: kada se iz zlatnog pravokutnika izdvoji (ili doda) kvadrat, uvijek ostaje manji (ili veći) pravokutnik sa potpuno istim zlatnim omjerom, i tako u nedogled. Zlatna spirala (slika 7. b), odnosno spirala nastala od lukova koji spajaju suprotne vrhove upisanih kvadrata, je zapravo logaritamska spirala, tj. spirala za koju vrijedi da bilo koja tangenta s radijusom spirale zatvara isti kut. Središte zlatne spirale je u sjecištu dijagonala zlatnih pravokutnika, koje se sijeku pod pravim kutom, i to u omjeru koji opet uključuje zlatni rez. Vrijedno je i spomenuti kako se pri širenju mijenja njezina veličina, ali nikada oblik, odnosno kako ona u sebi nosi matricu rasta koja je prisutna u prirodi u brojnim primjerima. Točnije kazano, gdjegod prirodi zatreba ekonomično i pravilno popunjavanje prostora prisutna je zlatna spirala.

U biti, istina je da gdje god opazimo iznimnu ljepotu i sklad, najčešće ćemo otkriti prisustvo zlatnog reza [33], pa se i ne treba čuditi što je ovaj pojam, koji povezuje matematiku, prirodu, znanosti, tehniku i umjetnost na vrlo neobičan i zanimljiv način, prisutan u svim aspektima ljudskog života. Težnja je čovjeka biti okružen oku ugodnim strukturama i djelima, pa je stoga i logično očekivati da se čarolija zlatnog reza nalazi u porama matematike, arhitekture, slikarstva, kiparstva, glazbe i mnogim drugim znanstvenim disciplinama [26]. Brojni eksperimenti (iako ne svi), u kojima su ispitanici trebali između određenog broja pravokutnika odabrati jedan koji se njima najviše sviđa, pokazuju kako ljudi preferiraju pravokutnik kojem su stranice u omjeru φ. Prvi takav eksperiment izveo je jedan od osnivača moderne psihologije Gustav T. Fechner. Tim kolega s Odjela graditeljstva Sveučilišta Sjever izvodio je slične pokuse na nastavi iz povijesti graditeljstva, a rezultati tih pokusa pokazuju kako njihovi studenti odabiru zlatni pravokutnik kao onaj najugodniji njihovom oku [33]. Pojam koji je zajednički Keopsovoj piramidi u Gizi, hramu Partenonu na atenskoj Akropoli, mauzoleju Taj Mahal u Agri, Konstantinovu slavoluku u Rimu, katedrali Notre Dame u Parizu, zgradi sjedišta Ujedinjenih naroda u New Yorku, ljudskom tijelu, pravilnom peterokutu i pravilnom pentagramu, dizajnu kreditnih kartica, običnom pužu, suncokretu… čini matematiku univerzalnom znanošću. Inspirirao je, kao ni jedan drugi pojam koji se pojavio u povijesti matematike, mnoge mislioce raznih disciplina u otkrivanju njegove prisutnosti u različitim životnim područjima i razdobljima ljudskog postojanja [20]–[23], [28], [33].

Slika 8. Milanska katedrala (građena od kraja 14. do sredine 19. stoljeća) [2], [6], [11] i Nacionalni centar za vodene sportove u Pekingu (2008.) [izvor: www.pinterest.com].

U suvremenoj arhitekturi može se pronaći ne tako mali broj primjera primjene načela fraktalne geometrije pri konstrukciji i dizajnu. U pravilu ističu se dvije točke gledišta, odnosno dva pristupa fraktalnom konceptu: jedan pristup pokušava simulirati prirodne oblike ili primijeniti slične oblike različitih veličina u različitim mjerilima pri dizajnu projekta, dok drugi pristup nastoji mjeriti (mjerenje se temelji na izračunu fraktalne dimenzije) složenost oblika [24]. U oba pristupa fraktalna geometrija osigurava kvantitativno sredstvo za opisivanje složenosti fizičkog izgleda arhitektonskog proizvoda i stupnja do kojeg ga se kvalificira kao „fraktal“ [6]. Nacionalni centar za vodene sportove u Pekingu (slika 8.), ili Britanski muzej u Londonu (slika 9. a), tipičan su primjer primjene klasične metode suprotstavljanja starog i novog, te spiralno stubište u Vatikanskim muzejima (slika 10. a) samo su nekoliko suvremenih i velebnih primjera arhitekture s fraktalnim komponentama. Mnogi drugi primjeri primjene fraktala u arhitekturi mogu se pronaći u sljedećim referencama: [1], [2], [5]–[14], [17], [18], [21], [24], [25], [30]–[32].

U posljednja dva desetljeća, zahvaljujući ponajprije brzom razvoju računalnih tehnologija i računalne grafike, građevinski inženjeri su dobili moćne alate za modeliranje i analizu konstrukcija s izrazito nelinearnom strukturom (npr. hiperboličkog paraboloida), modeliranje i reguliranje rijeka i morskih obala, tehnikama koje su poznavali od ranije, ali i za kreiranje nečeg potpuno novog, što se u pravilu oslanja na narušavanje ustaljenog i uobičajenog poretka stvari. Još je Mandelbrot koristio primjer obale mora kao fraktal – uvale sliče na zaljeve, rtovi sliče na poluotok; kada bismo se približili, svaka bi stijena sličila na poluotok… Danas su dostupna mnoga specijalizirana softverska rješenja koja inženjerima omogućuju primijeniti fraktalnu geometriju u dizajniranju roštiljnih ili mrežastih ljuskastih konstrukcija, ali i u regulaciji rijeka i morskih obala, odnosno napraviti modele jednostavnih oblika koji se ponavljaju, tj. koji su bliski fraktalnom pojmu, primjenjujući pritom skup pravila nelinearnih transformacija [3], [4], [10], [13], [15].



Slika 9.(a) Britanski muzej u Londonu [3]; (b) Hiperbolički paraboloid [3], [27], [29].

Slika 10.(a) Spiralno stubište u Vatikanskim muzejima (1932.); (b) Sjedište gradskog vodoopskrbnog poduzeća u Calgaryju(2008.) [izvor: www.pinterest.com].

Nedvojbeno, postoji još pregršt primjera primjene fraktalne geometrije u suvremenoj arhitekturi i građevinarstvu, i gotovo da ne postoji grana ovih dviju tehničkih znanosti u kojoj se fraktali ne primjenjuju. Nadalje, s velikom sigurnošću smijemo tvrditi kako svi fraktali još nisu otkriveni, te kako postoji još dosta arhitektonsko–građevinskih objekata i oblika s neuređenom fraktalnom analizom. Stoga će područja primjene fraktalne geometrije i dalje biti predmetom istraživanja novih istraživača, koji će poput njihovih prethodnika i suvremenika, težiti k pronalaženju harmonije između izrazite preciznosti i kaotične nesavršenosti. Na kraju osvrnimo se na jednu vrlo bitnu činjenicu usko vezanu za korištenje fraktalne geometrije u projektiranju. Naime, kad bismo fraktalnu geometriju primijenili za projektiranje mega–panela, koji se sastoje od podpanela, a koji sadrže elemente koji imaju isti oblik, postigli bismo znatnu uštedu u izradi prototipova, što bi olakšalo i ubrzalo samu izradu ovih prototipova, kao i montažu istih.

4. Zaključak

U radu je prikazan kraći osvrt na jednu od najvećih tajni dizajna prirode: neravne, nepravilne, samoslične beskonačne objekte (razvijene kroz višestruko ponavljanje, čak često jednostavnog, algoritma). Bilo da ih klasificiramo prema stupnju njihove samosličnosti, bilo prema načinu njihovog nastanka, smijemo zaključiti kako uistinu postoji mnogo različitih tipova fraktala, pa je u radu naglasak stavljen samo na nekoliko najzanimljivijih predstavnika s aspekta njihove primjene u arhitekturi i građevinarstvu. Promatrana s ovog gledišta, fraktalna geometrija koristi se i primjenjuje na mnogo načina: nenamjerno i namjerno. Fraktalna geometrija nam može pomoći da razumijemo i analiziramo složenosti koje možemo pronaći u gradovima starog i srednjeg vijeka, ali i u hramovima, katedralama, mauzolejima i drugim objektima koji su do ovih dana izgradile civilizacije koje su nam prethodile. U arhitektonskim konstrukcijama i dizajnu najčešće je od velike važnosti osigurati sklad između starog i novog. Upravo je fraktalna geometrija zgodan pristup koji se može koristiti u procesu podržavanja kreativnosti u idejama novih oblika, koji može biti od velike pomoći pri definiranju suvremenih arhitektonskih modela kao i testiranju harmonije između starog i novog. Nadalje, s gledišta inženjera građevinarstva fraktalna geometrija je potrebna, na primjer, za modeliranje i regulaciju naizgled kaotičnih struktura poput rijeka i morskih obala, kao i za analizu konstrukcija, modeliranje ljuskastih elemenata odnosno prostornih rešetki. Također je prikladna za modeliranje strukture i hidrauličkih svojstava nezasićenih tala, te razvoj modela protoka kroz porozne medije.

5. Literatura

1. Stamps, A.E.: *Fractals, skylines, nature and beauty*, Landscape and Urban Planning, 2002, Vol. 60, str. 163–184.
2. Sala, N.: *Fractal geometry and architecture: Some interesting connections*, WIT Transactions on the Built Environment, 2006, Vol. 86, str. 163–173.
3. Vyzantiadou, M.A., Avdelas, A.V., Zafiropoulos, S.: *The application of fractal geometry to the design of grid or reticulated shell structures*, Computer–Aided Design, 2007, Vol. 39, No. 1, str. 51–59.
4. Pottmann, H., Wallner, J.: *The focal geometry of circular and conical meshes*, Advances in Computational Mathematics, 2008, Vol. 29, No. 3, str. 249–268.
5. Stotz, I., Gouaty, G., Weinanad, Y.: *Iterative Geometric Design for Architecture*, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, 2009, Vol. 50, No. 1, str. 11–20.
6. Joye, Y.: *A review of the presence and use of fractal geometry in architectural design*, Environment and Planning B: Urban Analytics and City Science, 2011, Vol. 38, str. 814–828.
7. Gawell, E.: *Non–Euclidean Geometry in the Modeling of Contemporary Architectural Forms*, Journal of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics, 2013, Vol. 24, str. 35–43.
8. Rumież, A.: *Fractal Architecture*, Architecture and Urban Planning, Scientific Journal of Riga Technical University, Vol. 1, str. 45–48, 2013.
9. Lee, M.: *Application of Fractal Geometry to Architectural Design*, Architectural Research, 2014, Vol. 16, No. 4, str. 175–183.
10. Rian, I.M., Sassone, M.: *Fractal–Based Generative Design of Structural Trusses using Iterated Function System*, International Journal of Space Structures, 2014, Vol. 29, No. 4, str. 181–203.
11. Ramzy, N.S.:*The Dual Language of Geometry in Gothic Architecture: The Symbolic Message of Euclidian Geometry versus the Visual Dialogue of Fractal Geometry*, Journal of Medieval Art & Architecture, 2015, Vol. V, No. 2, str. 135–172.
12. Choudhary, A., Naresh T., Shubhanshu M.:*Importance of Mathematics and Geometry in Architecture*, Journal of Recent Activities in Architectural Sciences, 2016, Vol. 1, No. 1, str. 1–11.
13. Rian, I.M., Asayma, S.: *Computational Design of a nature–inspired architectural structure using the concepts of self–similar and random fractals*, Automation in Construction, 2016, Vol. 66, str. 43–58.
14. Mirmoradi, S.S.: *Recognition of the role of nature in the formation of fractal architecture*, Organization, technology & management in construction, 2017, Vol. 9, No. 1, str. 1574–1583.
15. Rian, I.M., Sassone, M., Asayama, S.: *From fractal geometry to architecture: Designing a grid–shell–like structure using the Takagi–Landsberg surface*, Computer–Aided Design, 2018, Vol. 98, str. 40–53.
16. Mandelbrot, B.: *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman, New York, 1982.
17. Hastings, H.M., Sugihara, G.: *Fractals. A user's guide for the natural sciences*, Oxford University Press, Oxford, 1993.
18. Bovill, C.: *Fractal Geometry in Architecture and Design*, Springer, New York, 1996.
19. Uglešić, N.: *Fraktali i dimenzija*, *Zbornik radova sa 3. susreta nastavnika matematike Republike Hrvatske*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 1996.
20. Yamaguti, M., Hata, M. i Kigami, J.: *Mathematics of fractals*,*In: Translations of mathematical monographs 167*,American Mathematical Society, Providence, 1997.
21. Lorenz, W.: *Fractals and Fractal Architecture – Master's Thesis*, TU Wien, 2003.

22. Mainzer, K.:*Symmetry and complexity: The spirit and beauty of nonlinear science*, World Scientific, Singapore 2005.
23. Edgar, G.E.: *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer, New York, 2008.
24. Haghani, T.: *Fractal Geometry, Complexity, and the Nature of Urban Morphological Evolution: Developing a fractal analysis tool to assess urban morphological change at neighbourhood level – PhD Thesis*, Birmingham City University, Faculty of Architecture,Birmingham, 2009.
25. Stotz, I.: *Iterative Geometric Design for Architecture – PhD Thesis*, EPFL Technical University, Faculty of Architecture, Civil and Environmental Engineering, Lausanne, 2009.
26. Frantz, M., Crannell, A.: *Mathematical Perspective and Fractal Geometry in Art*, Princeton University Press, Princeton, 2011.
27. Anton, H., Bivens, I., Davis, S.: *Calculus*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2012.
28. Falconer, K.: *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications (3rd Edition)*, John Wiley & Sons, Ltd, New York, 2014.
29. Červar, B., Miletić, K.: *Matematika 2 – Radna skripta*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Mostaru, Mostar, 2015.
30. Ostwald, M.J., Vaughan, J.: *The Fractal Dimension of Architecture*, Birkhäuser, 2016.
31. Ostwald, M.J., Vaughan, J.: *Fractal Dimensions in Architecture: Measuring the Characteristic Complexity of Buildings*, *In: Sriraman B. (eds) Handbook of the Mathematics of the Arts and Sciences*, Springer, Cham, 2018.
32. Vaughan, J., Ostwald, M.J.: *Fractal Geometry in Architecture, In: Sriraman B. (eds) Handbook of the Mathematics of the Arts and Sciences*, Springer, Cham, 2018.
33. Zlatić, S.: *Zlatni rez*, Technical journal, 2013, Vol. 7, No. 1, str. 84–90.
34. Xu, Y., Tong, L.:*Application of fractal theory to unsaturated soil mechanics*, Frontiers of Architecture and Civil Engineering in China, 2007, Vol. 1,No. 4, str. 411–421.
35. Veneziano, D., Langousis, A.:*Scaling and fractals in hydrology*, Advances in Data–based Approaches for Hydrologic Modeling and Forecasting, 2010, str. 107–243.
36. Wolfram Alpha LLC, 2019. Wolfram|Alpha.