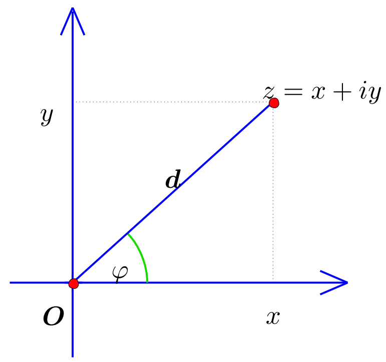
# Zbrojevi trigonometrijskih funkcija

*Dijana Matošević*

U ovom članku pozabavit ćemo se računanjem zbrojeva trigonometrijskih funkcija koje ćemo određivati na dva načina - klasičnim trigonometrijskim načinom i pomoću kompleksnih brojeva.

## Mali uvod u trigonometrijski zapis kompleksnog broja

Neka je $z = x + iy$ kompleksni broj ($x, y \in \mathbb{R}$). Prikažimo ga u Gaussovoj kompleksnoj ravnini. Sa




slike je vidljivo da se on može prikazati u obliku $z = d(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdje je
$d$ - modul kompleksnog broja $z$ ($d = |z|$),
$\varphi$ - argument kompleksnog broja $z$, gdje je $\sin\varphi = \frac{x}{d}$ i $\sin\varphi = \frac{y}{d}$ $\varphi \in [0, 2\pi]$.
U upotrebi su i druge oznake kompleksnog broja npr. $z = d\text{cis }\varphi$, kao i eksponencijalni zapis kompleksnog broja $z = de^{i\varphi}$.[1]

## Svojstva - množenje, dijeljenje i potenciranje

Kompleksni brojevi se množe (dijele) tako da im se moduli pomnože (podijele), a argumenti zbroje (oduzmu), tj.

$$z_1 \cdot z_2 = d_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot d_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = d_1 d_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) =$$

$$= d_1 e^{i\varphi_1} \cdot d_2 e^{i\varphi_2} = d_1 d_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{d_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{d_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{d_1}{d_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{d_1 e^{i\varphi_1}}{d_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{d_1}{d_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Potenciranje (*De Moivreova formula*):

$$z^n = (d(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = d^n \left(e^{i\varphi}\right)^n = d^n e^{i\varphi n} = d^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Korjenovanje:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = d^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{d}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

[1] Ovaj eksponencijalni zapis potječe od šivcarskog matematičara L. Eulera

Inverz kompleksnog broja:

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1\cdot e^{i\cdot 0}}{de^{i\varphi}}=\frac{1}{d}e^{i(-\varphi)},$$

tj.

$$\frac{1}{d(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{1}{d}(\cos\varphi-i\sin\varphi),$$

za $d=1$ specijalno vrijedi $\frac{1}{z}=\overline{z}$.

**Primjer 1.** Odredimo sljedeće sume:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\varphi \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)\varphi.$$

*Prvo rješenje.* Koristit ćemo klasična svojstva trigonometrijskih funkcija.

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\varphi=\cos\varphi+\cos 3\varphi+\cdots+\cos(2n-1)\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\sin\varphi}\left(\underbrace{2\sin\varphi\cos\varphi}_{\sin 2\varphi-\sin 0}+\underbrace{2\sin\varphi\cos 3\varphi}_{\sin 4\varphi-\sin 2\varphi}+\cdots+\underbrace{2\sin\varphi\cos(2n-1)\varphi}_{\sin 2n\varphi-\sin(2n-2)\varphi}\right)=$$

$$=\frac{\sin 2n\varphi}{2\sin\varphi}.$$

■

*Drugo rješenje.* Promotrimo sumu

$$z+z^3+z^5+\cdots+z^{2n-1}=z\cdot\frac{1-z^{2n}}{1-z^2},$$

i uvrstimo $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, tada je lijeva strana

$$L=(\cos\varphi+i\sin\varphi)+(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)+\cdots+(\cos(2n-1)\varphi+i\sin(2n-1)\varphi)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\varphi+i\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)\varphi,$$

a desna

$$D=e^{i\varphi}\frac{1-e^{i2n\varphi}}{1-e^{i2\varphi}}=e^{i\varphi}\frac{[(1-\cos 2n\varphi)-i\sin 2n\varphi]}{(1-\cos 2\varphi)-i\sin 2\varphi}=e^{i\varphi}\frac{2\sin n\varphi[\sin n\varphi-i\cos n\varphi]}{2\sin\varphi[\sin\varphi-i\cos\varphi]}.$$

$$D=e^{i\varphi}\frac{\sin n\varphi e^{i(n\varphi+\frac{3}{2}\pi)}}{\sin\varphi e^{i\varphi+\frac{3}{2}\pi}}=\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}e^{i\varphi}e^{i(n-1)\varphi}=\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}e^{in\varphi}=$$

$$=\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}\cos n\varphi+i\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}\sin n\varphi.$$

Izdvojimo sada realni i imaginarni dio desne strane i dobivamo tražene sume

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\varphi=\Re e(D)=\frac{\sin 2n\varphi}{2\sin\varphi},\quad \sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)\varphi=\Im m(D)=\frac{\sin^2 n\varphi}{\sin\varphi}.$$

Uočimo da ima znatno manje "naštimavanja" kada koristimo kompleksne brojeve. ■

**Primjer 2.** Odredi sumu $\sum_{k=0}^{n} 2^k \cos k\varphi$.

*Rješenje.*

$$S = 1 + 2\cos\varphi + 2^2\cos 2\varphi + \cdots + 2^n \cos n\varphi$$

Neka je $z = 2e^{i\varphi}$. Tada $z^0 + z^1 + z^2 + \cdots + z^n$ odgovara sumi

$$L = 1 + 2e^{i\varphi} + 2^2 e^{i2\varphi} + \cdots + 2^n e^{in\varphi} =$$

$$= (1 + 2\cos\varphi + 2^2\cos 2\varphi + \cdots + 2^n\cos n\varphi) + i(2\sin\varphi + 2^2\sin 2\varphi + \cdots + 2^n \sin n\varphi).$$

Vrijedi $S = \Re e(L)$, s druge strane je $L = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$,

$$L = \frac{1 - 2^{n+1}e^{i(n+1)\varphi}}{1 - 2e^{i\varphi}} = \frac{(1 - 2^{n+1}\cos(n+1)\varphi) - i2^{n+1}\sin(n+1)\varphi}{(1 - 2\cos\varphi) - i\sin 2\varphi} \cdot \frac{(1 - 2\cos\varphi) + i2\sin\varphi}{(1 - 2\cos\varphi) + i2\sin\varphi}.$$

Sada je

$$S = \Re e(L) = \frac{(1 - 2^{n+1}\cos(n+1)\varphi)(1 - 2\cos\varphi) + 2^{n+1}\sin(n+1)\varphi \cdot 2\sin\varphi}{(1 - 2\cos\varphi)^2 + (2\sin\varphi)^2} =$$

$$\frac{1}{5 - 4\cos\varphi}[1 - 2\cos\varphi - 2^{n+1}\cos(n+1)\varphi + 2^{n+2}\cos n\varphi].$$

■

**Primjer 3.** Izračunaj zbroj $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$.

(MMO 1963.g)

*Prvo rješenje.* Službeno rješenje ovog zadatka glasi:

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}\left(2\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{7} - 2\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{7}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}\left(\cos\frac{\pi}{14} + \cos\frac{3\pi}{14} - \cos\frac{3\pi}{14} - \cos\frac{5\pi}{14} + \cos\frac{5\pi}{14} + \cos\frac{7\pi}{14}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}\left(\cos\frac{7\pi}{14} + \cos\frac{\pi}{14}\right) = \frac{1}{2}.$$

■

*Drugo rješenje.* Uz malo manje naštimavanja zadatak rješavamo koristeći kompleksne brojeve.

Promatrajmo sumu $z - z^2 + z^3 = z(1 - z + z^2)\frac{1+z}{1+z} = z\frac{1+z^3}{1+z}$. Traženi zbroj je zapravo $\Re e\left(z\frac{1+z^3}{1+z}\right)$, gdje $z = e^{i\varphi}$, $\varphi = \frac{\pi}{7}$. Tada je

$$z\frac{1+z^3}{1+z} = e^{i\varphi}\frac{1+e^{3i\varphi}}{1+e^{i\varphi}} = e^{i\varphi}\cdot\frac{(1+\cos 3\varphi) + i\sin 3\varphi}{(1+\cos\varphi) + i\sin\varphi} = e^{i\varphi}\frac{2\cos\frac{3\varphi}{2}\left(\cos\frac{3\varphi}{2} + i\sin\frac{3\varphi}{2}\right)}{2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\cos\frac{3\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}\cdot e^{i\varphi}\frac{e^{i\frac{3\varphi}{2}}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}} = \frac{\cos\frac{3\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}\cdot e^{i2\varphi} = \frac{\cos\frac{3\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}\cos 2\varphi + i\frac{\cos\frac{3\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}\sin 2\varphi.$$

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \Re e\left(z\frac{1+z^3}{1+z}\right) = \frac{\cos\frac{3\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}\cos 2\varphi = \frac{\cos\frac{7\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}} =$$

$$\frac{\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{\cos\frac{\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{1}{2}.$$

■

Evo još jedne zanimljive primjene kompleksnih brojeva.

**Primjer 4.** Odredi vrijednost $\cos 18^\circ$.
Ovaj zadatak možete naći u raznim udžbenicima za 3. razred, a daje se pomalo "*ružno*" rješenje.
*Prvo rješenje.* Treba znati da vrijedi $\cos 36^\circ \sin 18^\circ = \frac{1}{4}$. Kako je $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$, dobivamo jednadžbu

$$8\sin^3 18^\circ - 4\sin 18^\circ + 1 = 0, \text{ tj.}$$

$$(2\sin 18^\circ - 1)(4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1) = 0.$$

Kako je $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ \neq \sin 18^\circ$, slijedi

$$4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0,$$

odnosno $\sin 18^\circ = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Za rješenje uzimamo ono pozitivno, tj. $\sin 18^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, što nam daje $\cos 18^\circ = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$. ■

Riješimo sada taj zadatak elegantnije.
*Drugo rješenje.* Mi zapravo tražimo $\cos\frac{\pi}{10}$. Neka je $z = \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10} = e^{\frac{\pi}{10}}$. Kako znamo da je $e^{i\pi} + 1 = 0$, onda ćemo tražiti jedno od rješenja jednadžbe $(e^{i\frac{\pi}{10}})^{10} + 1 = z^{10} + 1 = 0$.

$$\left(z^2\right)^5 + 1 = (z^2+1)(z^8 - z^6 + z^4 - z^2 + 1) = 0.$$

Znamo da je $z^2 \neq 1$, onda mora biti

$$z^8 - z^6 + z^4 - z^2 + 1 = 0 \,/\, : z^4,\ z \neq 0$$

$$\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) - \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 1 = 0.$$

Znajući da je $z + \frac{1}{z} = 2\cos 18^\circ$, jednadžba postaje ekvivalentna sljedećoj:

$$16\cos^4 18^\circ - 20\cos^2 18^\circ + 5 = 0,$$

$$\left(cos\frac{\pi}{10}\right)^2_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

Kako je $\cos x$ padajuća funkcija u intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos\frac{\pi}{10}$ poprimiti najveću moguću vrijednost tj.

$$\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

■

Sigurna sam da ste se u ovom članaku uvjerili u mogućnosti trogonometrijskog zapisa kompleksnih brojeva, koji naštimavanje pretvaraju u gotovo školski rad.