

Maro Radović, dipl. oec.

Rukovoditelj

INA, PJ Dubrovnik

ODREĐIVANJE OPTIMALNOG ASORTIMANA PROIZVODNJE

UDK/UDC: 330.101.542

JEL klasifikacija/JEL classification: M31, D21, C61

Pregledni rad/Review

Primljeno/Received: 3. rujna 2001./September 3, 2001

Prihvaćeno za tisak/Accepted for publishing: 12. prosinca 2001./December 12, 2001

Sažetak

Asortiman proizvoda i usluga koje poduzeće nudi osnovni je činitelj koji određuje njegovu cjelokupnu poslovnu aktivnost. Upravo zato određivanje optimalnog asortimana proizvodnje je od presudne važnosti za poduzeće imajući na umu maksimizaciju profita kao funkciju cilja poduzeća i zadovoljenje kupaca na ciljnom tržištu. U radu se analiziraju pojam i značaj asortimana i teorijsko određivanje optimalnog asortimana u proizvodnji više proizvoda s aspekta maksimizacije profita. Nakon toga se teorijski razmatra i na primjeru pokazuje način utvrđivanja optimalnog asortimana proizvodnje pomoću linearnog programiranja.

Ključne riječi: *marketing, asortiman, linearno programiranje, optimalno rješenje*

UVOD

Poduzeće se u vođenju svoje poslovne politike neizbježno suočava s pitanjem što proizvoditi. Sve poslovne aktivnosti usmjerene su prema ostvarenju što većih ekonomskih efekata uz što manje ekonomske žrtve. Postavlja se pitanje asortimana proizvodnje kojim će poduzeće postići maksimizaciju profita što je osnovni cilj poslovanja. U odgovoru na ovo pitanje, moraju se prije svega uzeti u obzir potrebe i zahtjevi tržišta odnosno potrošača i prihvatiti ih kao osnovu u definiranju asortimana proizvodnje.

U definiranju asortimana proizvodnje, bitna je količina raspoloživih resursa poduzeća, tj. koliko vrsta proizvoda je ono uopće sposobno proizvoditi, u kojoj količini i, normalno, po kojoj cijeni, uz koje troškove. Isto tako potrebno je voditi računa i o cijeni koju proizvod može postići

na tržištu. Uobičajena je situacija da poduzeće proizvodi više proizvoda različitih tehnoloških karakteristika s različitim troškovima proizvodnje pa se realizacijom tih proizvoda ostvaruju različiti prihodi. Poduzeća moraju žrtvovati proizvodnju proizvoda koji donose manju dobit u korist proizvoda koji donose veću dobit.

Imajući navedeno na umu, optimalan asortiman proizvodnje je asortiman kojim poduzeće s najmanjim mogućim troškovima ostvaruje najveći prihod i na taj način maksimizira profit. Teorijski je moguće utvrditi optimalan asortiman proizvodnje, odnosno optimalnu kombinaciju proizvodnje više proizvoda pomoću krivulje maksimalnih proizvodnih mogućnosti ili krivuljom transformacije i izoprihodnog pravca. Međutim, u zbilji se za utvrđivanje optimalnog asortimana proizvodnje, sa stajališta maksimizacije profita, u poduzeću može koristiti (i vrlo često se koristi u poduzećima koja imaju razvijene stručne službe) tehnika linearnog programiranja. Linearno programiranje je skup matematičkih metoda kojima se određuje ekstremna vrijednost funkcije cilja uz dana ograničenja, gdje su funkcija cilja i ograničenja linearni pa se u datim uvjetima može vrlo precizno utvrditi optimalan asortiman proizvodnje s aspekta maksimizacije dobiti poduzeća.

Navedena problematika analizira se u ovom radu. U prvom dijelu definira se pojam i značaj asortimana kao jednog od elemenata marketinškog spleta, odnosno marketing miksa poduzeća, da bi se u drugom dijelu rada prikazalo teorijsko utvrđivanje optimalnog asortimana proizvodnje. U trećem dijelu razmatra se metoda linearnog programiranja i na primjeru se uz analizu i ukazuje na mogućnost utvrđivanja optimalnog asortimana proizvodnje poduzeća.

1. ASORTIMAN - ELEMENT MARKETING MIKSA PODUZEĆA

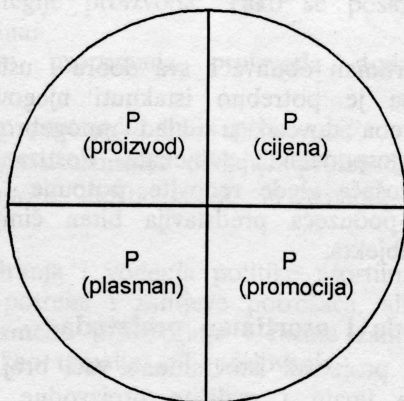
1.1. Pojam i značaj asortimana

Marketing se kao koncepcija i poslovna filozofija poduzeća pojavljuje u uvjetima razvijene konkurencije na tržištu i podrazumijeva dugoročno maksimiziranje profita uz zadovoljenje potrošačevih želja i potreba. U zbilji marketinška koncepcija djeluje preko marketinškog spleta koji nije ništa drugo do li kombinacija različitih kontroliranih instrumenata kojima se poduzeće koristi kako bi ostvarilo traženu razinu prodaje na ciljnom tržištu i time ostvarilo profit.¹

Postoji velik broj instrumenata marketing spleta. Desetine i desetine različitih instrumenata E.J. McCarthy je klasificirao u četiri osnovna

1 Prema N. Vulić, D. Benić, *Politika i gospodarstvo*, Školska knjiga, Zagreb, 2000., str. 114.-115.

instrumenta postavivši najšire prihvaćenu klasifikaciju 4P: proizvod (engl. product), cijena (price), plasman (place) i promocija (promotion)².



Slika 1. Marketinški splet

U okviru svakog od navedenih instrumenata postoje brojni izvedeni instrumenti³. Tako proizvod kao instrument marketinškog spleta obuhvaća nekoliko elemenata kojima se može utjecati na razinu prodaje i asortiman, kvalitetu, obilježja, stil, marku, pakiranje i dr.

Asortiman dobara i usluga koje poduzeće nudi predstavlja njegov osnovni strukturni činitelj poslovanja. Odabranim asortimanom određuju se cjelokupna poslovna aktivnost poduzeća i njegov djelokrug rada. Prema tome, asortiman možemo definirati kao izvršeni izbor roba i usluga koje se nude na tržištu, odnosno kao kombinaciju različitih proizvoda koju poduzeće nudi na ciljnom tržištu⁴.

Asortiman proizvoda (product assortment) ili portfelj proizvoda (product portfolio) je kombinacija proizvoda i proizvodnih linija sastavljena na način da omogućiti poduzeću maksimiziranje profita i da zadovolji kupce

2 Vidi - E.J. McCarthy, W.D. Perreault, *Basic Marketing*, Eleventh Edition, IRWIN, Burr Ridge, Illinois, 1993., str. 46.-47.

3 Vidi, isto djelo, str. 47. i P. Kotler, *Upravljanje marketingom*, Informator, Zagreb, 1988., str. 68.

4 Usp., S. Dibb, L. Simkin, W.M. Pride, O.C. Ferrell, *Marketing*, europsko izdanje, MATE, Zagreb, 1995., str. G1.

na ciljnom tržištu. Proizvodna linija je skup srodnih individualnih proizvoda, a oni se uobičajeno razlikuju po dizajnu, cijeni ili nekom drugom obilježju⁵.

Proizvođači trebaju imati jasan stav u pogledu asortimana, odnosno programa proizvodnje. Taj se stav mora podvrgavati neprestanom kritičkom razmatranju da bi se u svakom trenutku uočila njegova točnost i ispravnost⁶.

Prema tome, asortiman obuhvaća sva dobra i usluge koje su predmet aktivnosti poduzeća, pa je potrebno istaknuti njegov značaj. U procesu njegovog formiranja treba dovesti u sklad mnogobrojne i često različite interese društvenih i gospodarskih subjekata. Postizanje ravnoteže između potreba i zahtjeva potrošača glede redovite, potpune i kvalitetne opskrbe s ekonomskim ciljevima poduzeća predstavlja bitan činitelj u funkcioniranju svakog gospodarskog subjekta.

1.2. Politika proizvoda i asortiman proizvoda

Većina poduzeća proizvodi istovremeno veći broj proizvoda ili usluga, a vrlo često poduzeća imaju i različite proizvodne linije. Zbog toga je potrebno donositi odluke u svezi s politikom proizvoda na tri različite razine:

1. na razini pojedinih proizvoda ili usluga (kao što su oblik, izgled ili dimenzija)

2. na razini proizvodne linije (napr. širina i dubina linije, kako bi se zadovoljile razne potrošačke skupine ovisno o sklonostima, kupovnoj moći i sl.)

3. na razini proizvodnog miksa ili asortimana proizvoda (koji se sastoji od kompozicije raznih proizvoda i proizvodnih linija ili usluga koje poduzeća nude na tržištu)

Asortiman proizvoda ima odlučujuću ulogu u koncepciji marketinga. Iako je vrlo bitno što se događa sa svakim proizvodom pojedinačno, ipak krajnji rezultat poslovnog učinka proizlazi iz ukupnosti svih proizvoda. Međutim, potrebe i zahtjevi potrošača čine osnovu prema kojoj se utvrđuje sadržaj politike proizvoda, odnosno asortimana. Ovo, naravno, povlači za sobom i pitanje dimenzija asortimana i mogućnosti njihovog kombiniranja.

Asortiman proizvoda prikazuje se na temelju širine, dužine, dubine i konzistentnosti. Širina asortimana proizvoda odnosi se na broj različitih linija proizvoda koje poduzeće nudi. Dužina asortimana odnosi se na ukupan broj artikala u asortimanu, a dubina asortimana proizvoda odnosi se na broj varijanata koji pruža svaki pojedini proizvod u liniji.

5 Vidi C.L. Bovee, J.V. Thill, *Marketing*, McGraw-Hill Inc., New York, 1992., str. 289.-290., i E.J. McCarthy, W.D. Perreault, isto djelo, str. 258.-259.

6 F. Rocco, *Marketinško upravljanje*, Školska knjiga, Zagreb, 1994., str. 182.

Konzistentnost asortimana proizvoda odnosi se na stupanj povezanosti različitih linija proizvoda u krajnjoj potrošnji, u zahtjevima proizvodnje, u kanalim distribucije i sl.⁷

Navedene četiri dimenzije asortimana proizvoda olakšavaju poduzeću vođenje uspješne strategije proizvoda. Tako se poslovanje poduzeća može povećati na četiri načina:

- a) proširivanjem asortimana proizvoda dodavanjem novih linija proizvoda;
- b) produživanjem postojećih linija proizvoda;
- c) produbljivanjem asortimana dodajući proizvodu više varijanata i
- d) poduzeće može težiti većoj ili manjoj konzistentnosti linije proizvoda.⁸

U procesu planiranja i vođenja politike asortimana poduzeća treba u potpunosti zadovoljiti potrebe i zahtjeve potrošača, ali isto tako i osigurati optimalnu ravnotežu između proizvodnje i razine zaliha te obujma prodaje, maksimizirajući profit kao temeljni cilj poslovanja.

2. TEORIJSKO ODREĐIVANJE OPTIMALNOG ASORTIMANA U PROIZVODNJI VIŠE PROIZVODA S ASPEKTA MAKSIMIZACIJE PROFITA

Većina poduzeća je u stanju da raspoloživim resursima proizvode čitav niz proizvoda različitih tehnoloških karakteristika. Isto tako, utjecaj proizvodnje pojedinih proizvoda na troškove proizvodnje i veličinu prihoda poduzeća je različit. Stoga je nužno, između niza različitih mogućih kombinacija proizvodnje proizvoda, pronaći kombinaciju koja u zadanim uvjetima maksimizira profit.

2.1. Krivulja maksimalnih proizvodnih mogućnosti i granična stopa transformacije jednog proizvoda u drugi

Proizvode koji se dobivaju na osnovi jednog ili više međusobno povezanih tehnoloških postupaka nazivamo vezanim proizvodima⁹. Različit je stupanj vezanosti pojedinih proizvoda i može se kretati od potpune komplementarnosti do situacije kada se proizvodnja jednog proizvoda može povećati samo ako se smanji proizvodnja drugog proizvoda.

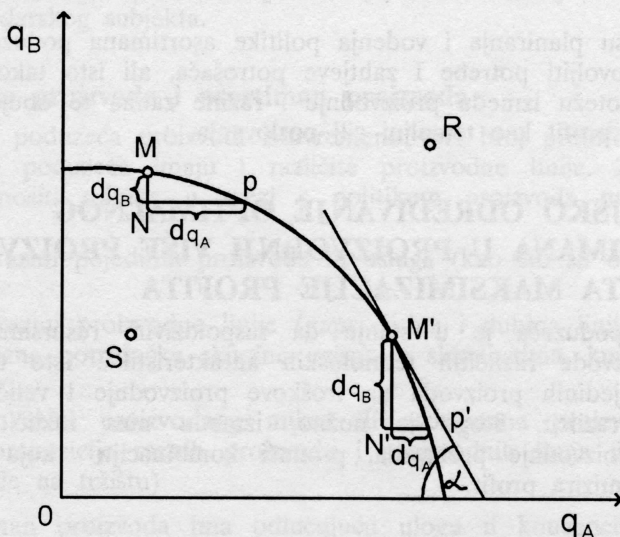
Radi jednostavnosti, u analizi se polazi od pretpostavke da poduzeće proizvodi samo dva vezana proizvoda: proizvod A i proizvod B. Ono može

7 Vidi opširnije, P. Kotler, isto djelo, str. 482.-485.

8 Isto djelo, str. 485.

9 S. Jurin, J. ohinger, *Teorija tržišta i cijena*, Globus, Zagreb, 1990., str. 189.

proizvesti, uz zadanu tehnologiju i ograničenu količinu čimbenika proizvodnje, ograničenu količinu tih proizvoda, tako da se na razini pune zaposlenosti raspoloživih čimbenika proizvodnje i zadane tehnologije ne može povećati proizvodnja proizvoda A (q_A) za jednu jedinicu proizvodnje, a da se, istovremeno ne smanji proizvodnja proizvoda B (q_B) u količini u kojoj se oslobađa potrebna količina čimbenika proizvodnje potrebnih za proizvodnju dodatne jedinice proizvoda A. Uvjetu pod kojima se jedan proizvod može transformirati u drugi realokacijom čimbenika proizvodnje moguće je prikazati krivuljom maksimalnih proizvodnih mogućnosti, odnosno krivuljom transformacije. Ona predstavlja sve kombinacije vezanih proizvoda što se mogu na osnovu raspoloživih resursa istovremeno proizvoditi u poduzeću u maksimalno mogućim količinama.



Slika 2. Krivulja transformacije

Granična stopa transformacije proizvoda B u proizvod A ($MRPT_{BA}$) pokazuje za koliko se mora smanjiti proizvodnja q_B da bi se povećala proizvodnja q_A . Na slici 2. granična stopa transformacije je nagib, odnosno derivacija krivulje transformacije u nekoj njezinoj točki:

$$MRPT_{BA} = - dq_B / dq_A$$

odnosno u apsolutnoj vrijednosti

$$MRPT_{BA} = dq_B / dq_A$$

Granična stopa transformacije izražava trošak proizvodnje jednog proizvoda u jedinicama i količini drugog proizvoda, odnosno trošak proizvodnje proizvoda A izražen u potrebnom smanjenju proizvodnje proizvoda B. Taj trošak je poznat i pod imenom oportunitetni trošak, pa se krivulja transformacije naziva još i krivulja oportunitetnih troškova¹⁰.

Kao što se na slici 2. vidi, porast proizvodnje jednog proizvoda na račun drugog proizvoda svodi se na kretanje po krivulji transformacije. Tangens kuta što ga zatvara tangenta određene točke krivulje transformacije sa apcismom, određuje graničnu stopu transformacije $MRPT_{BA}$.

Analizirajući krivulju transformacije na slici 2, vidimo da se primjerice u točki M optimalni asortiman proizvodnje poduzeća sastoji od relativno male količine proizvodnje proizvoda A i razmjerno velike količine proizvodnje proizvoda B. U ovoj točki $MRPT_{BA}$ predstavlja malu veličinu, što znači da se malim smanjenjem proizvodnje proizvoda B (q_B) postiže relativno veliko povećanje proizvodnje proizvoda A (q_A), te se svakim daljnjim smanjenjem proizvodnje q_B , a povećanjem proizvodnje q_A , granična stopa transformacije povećava. Tako je primjerice u točki M', $MRPT_{BA}$ vrlo velika u odnosu na onu u točki M, a to znači da bi se omogućilo relativno malo povećanje proizvodnje q_A ukoliko se u velikoj mjeri smanji proizvodnja q_B .

Potrebno je naglasiti da zbog konkavnosti krivulje transformacije (što je posljedica zakona opadajućih prinosa) ukoliko se želi ostvariti jednak porast proizvoda A: $q_{A1}=q_{A2}= \dots =q_{An}$, treba smanjivati u sve većoj mjeri proizvodnju proizvoda B: $q_{B1}q_{B2} \dots q_{Bn}$. Iz ovog slijedi da granična stopa transformacije ($MRPT_{BA}$) raste usporedo s porastom proizvodnje proizvoda A (otud se jednostavno uočava zakon rastućih troškova).

Isto tako, ako se količina utroška činitelja proizvodnje fiksira, svaka kombinacija proizvoda A i B na krivulji transformacije predstavlja jednak trošak proizvodnje pa je $MRPT_{BA} = MC_A/MC_B$,¹¹ gdje MC_A predstavlja granični trošak od q_A , a MC_B granični trošak od q_B .

Uz ovo, potrebno je naglasiti da uz datu količinu raspoloživih resursa nije moguće proizvesti niti jednu kombinaciju proizvodnje proizvoda A (q_A) i proizvoda B (q_B) koja se nalazi izvan prostora kojeg zatvara sa koordinatnim osima krivulja transformacije (primjerice točka R na slici 2.). Istovremeno se može primjetiti da je moguća proizvodnja bilo koje kombinacije q_A i q_B koja se nalazi unutar krivulje transformacije (primjerice točka S na slici 2.), međutim u tom slučaju raspoloživi resursi

10 Prema - isto djelo, str. 190

11 Naime, $dq_B \cdot MC_B = dq_A \cdot MC_A$ ili $dq_B/dq_A = MC_A/MC_B$. Kako je $dq_B/dq_A = MRPT_{BA}$, to je $MRPT_{BA} = MC_A/MC_B$. Detaljnije vidi - Đ. Benić, *Osnove ekonomije*, treće izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 2001., str. 185.

poduzeća za proizvodnju proizvoda A i proizvoda B ne bi se potpuno iskoristili, a udaljenost te točke do najbliže točke na krivulji transformacije označava stupanj neiskorištenosti raspoloživih resursa¹².

2.2. Izoprihodni pravac

S gledišta maksimalnih proizvodnih mogućnosti zadanih količina čimbenika proizvodnje i postojeće tehnologije, krivulja transformacije pokazuje optimalno korištenje raspoloživih resursa u tehničkom smislu. Da bi se utvrdila ekonomska optimizacija, nužno je u analizu uvesti podatke o veličini ukupnih prihoda i ukupnih troškova svake, tehnički gledano, optimalne kombinacije vezanih proizvoda na krivulji transformacije. Na taj način moguće je utvrditi koja od kombinacija maksimizira profit.

Da bi se utvrdilo koja od kombinacija proizvodnje q_A i q_B na krivulji transformacije donosi najveći ukupni prihod, u analizu se uvodi izoprihodni pravac ili pravac jednakog prihoda. Izoprihodni pravac je geometrijsko mjesto točaka koje označavaju sve kombinacije vezanih proizvoda što daju isti ukupni prihod. U izvođenju jednadžbe pravca jednakog prihoda polazi se od pretpostavke da su cijene zadane i izvan kontrole poduzeća, što znači da su na tržištu uvjeti potpune konkurencije. Budući da su količine proizvoda označene sa q_A i q_B , njihove cijene se označavaju s p_A i p_B , a ukupni prihod s TR , pa je jednadžba izoprihodnog pravca u implicitnom obliku:

$$p_A q_A + p_B q_B = TR$$

odnosno, u eksPLICITNOM obliku:

$$q_B = - (p_A / p_B) q_A + (TR / p_B)$$

gdje je $-p_A/p_B$ koeficijent smjera pravca jednakog prihoda (u apsolutnoj vrijednosti p_A/p_B).

Variranjem ukupnog prihoda dobiva se serija izoprihodnih pravaca koji imaju isti nagib, a pravac udaljeniji od ishodišta odgovara većem ukupnom prihodu ($TR_4 > TR_3 > TR_2 > TR_1$) – vidi sliku 3.

2.3. Optimalni asortiman proizvodnje

Uz datu krivulju transformacije i seriju izoprihodnih pravaca može se odrediti optimalan asortiman proizvodnje poduzeća. Da bi se odredio optimalni asortiman proizvodnje, polazi se od bilo koje točke na krivulji transformacije. Svaka točka, odnosno kombinacija proizvoda, s obzirom na

12 Vidi opširnije - S. Jurin, J. Šohinger, isto djelo, str. 191.

raspoloživu količinu čimbenika proizvodnje pretpostavlja određeni jednak trošak. Optimalni asortiman proizvodnje je asortiman koji, pri zadanim tržišnim cijenama proizvoda, osigurava maksimalni mogući ukupni prihod uz dati trošak, što znači da tako odabrana kombinacija količina proizvodnje dodiruje izoprihodni pravac koji je najudaljeniji od ishodišta. Prema tome, ekonomski je optimalna kombinacija proizvoda u kojoj izoprihodni pravac tangira krivulju transformacije, odnosno ravnoteža poduzeća koja podrazumijeva maksimizaciju profita i postiže se u onoj točki u kojoj su jednaki koeficijent smjera izoprihodnog pravca i nagib krivulje transformacije.

$$MRPT_{BA} = p_A / p_B$$

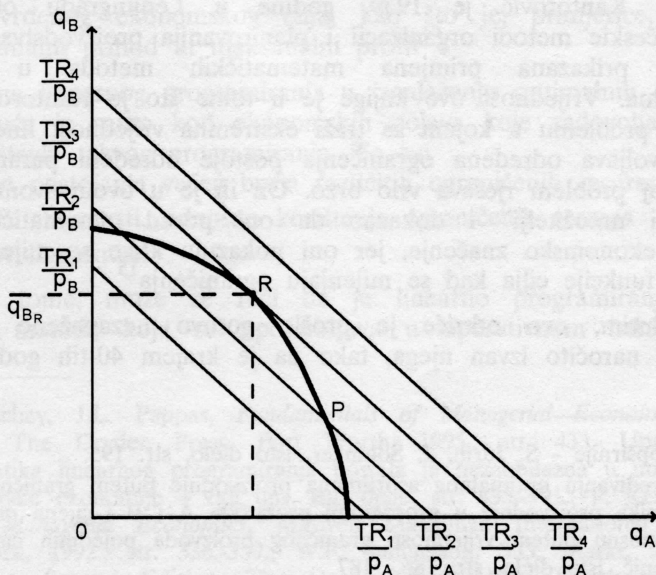
Kako je $MRPT_{BA} = MC_A / MC_B$ to je

$$MC_A / MC_B = p_A / p_B$$

odnosno

$$MC_A / MC_B = p_A / p_B$$

pa se uvjet optimalnosti svodi na zahtjev da su granični troškovi proizvoda jednaki u odnosu na njihove cijene.



Slika 3. Optimalni asortiman proizvodnje

Na slici 3. je prikazano geometrijsko-grafičko utvrđivanje optimalnog asortimana proizvodnje. Sa zadanim opsegom čimbenika proizvodnje, tehnologijom i tržišnim cijenama proizvoda A i B, poduzeće može postići maksimalno mogući ukupni prihod TR_3 . Analizirajući sliku 3.¹³ može se slučajnim odabirom uzeti točka P na krivulji transformacije. Povučeni izoprihodni pravac u točki P presjeca krivulju transformacije, što znači da se u toj točki ne postiže uvjet optimalnosti proizvodnje, odnosno ne zadovoljavaju se prethodno navedeni kriteriji. Krećući se dalje s desna na lijevo po krivulji transformacije, odnosno mijenjajući asortiman proizvodnje, odaberimo točku R. U toj točki izoprihodni pravac tangira krivulju transformacije, i u toj točki je zadovoljen uvjet optimalnosti. To znači da poduzeće mora proizvesti q_{AR} jedinica proizvoda A i q_{BR} proizvoda B da bi postiglo maksimalni ukupni prihod, pri zadanim količinama čimbenika proizvodnje, zadanoj tehnologiji i cijenama proizvoda na tržištu. Daljnje kretanje, odnosno mijenjanje kombinacije proizvodnje u istom smjeru, po krivulji transformacije dovelo bi do smanjenja ukupnog prihoda, budući da krivulja transformacije siječe niže izoprihodne pravce. Isto tako, poduzeće ne može, sa zadanim resursima i tržišnim cijenama proizvoda, ostvariti ukupan prihod veće razine (primjerice TR_4 na slici 3)¹⁴.

3. UTVRĐIVANJE OPTIMALNOG ASORTIMANA PROIZVODNJE POMOĆU LINEARNOG PROGRAMIRANJA

L.V. Kantorovič je 1939. godine u Lenjingradu objavio knjigu "Matematičeskie metodi organizacii i planirovanija proizvodstva", u kojoj je prvi put prikazana primjena matematičkih metoda u ekonomskim istraživanjima. Vrijednost ove knjige je u tome što je Kantorovič otkrio da u svakom problemu u kojem se traži ekstremna vrijednost linearne funkcije koja zadovoljava određena ograničenja postoje određeni parametri pomoću kojih se taj problem rješava vrlo brzo. On ih je u ovom svom radu nazvao "rješavajući množitelji" i dokazao da oni pored matematičkog, imaju i određeno ekonomsko značenje, jer oni pokazuju kako se mijenja optimalna vrijednost funkcije cilja kad se mijenjaju ograničenja¹⁵.

Međutim, ovo otkriće je prošlo gotovo nezapaženo u tadašnjem SSSR-u, a naročito izvan njega, tako da je krajem 40-tih godina u SAD-u

13 Vidi opširnije - S. Jurin, J. Šohinger, isto djelo, str. 195.

14 O određivanju optimalnog asortimana proizvodnje putem graničnih proizvoda čimbenika proizvodnje u proizvodnji proizvoda A i B i cijena proizvoda A i B, odnosno putem vrijednosti graničnog proizvoda pojedinih činitelja vidi - Đ. Benić, isto djelo, str. 186.- 187.

15 S. Jurin, *Linearno programiranje i cijene*, Institut društvenih nauka, Beograd, 1971., str. 18.-25.

nezavisno od Kantorovičevog otkrića, ponovno 'otkriveno' linearno programiranje.

Prve članke i rasprave na tu temu je u SAD-u objavio prof. G.B. Dantzig 1949. godine u časopisu *Econometrica*, pod naslovom "Programming of interdependent activities", gdje su objavljeni temeljni principi njegove simplex metode. Nakon toga, 1951. godine izdan je poznati zbornik "Activity Analysis of Production and Allocation" sa člancima mnogobrojnih istaknutih američkih matematičara i ekonomista (Kenneth Arrow, George Dantzig, Robert Dorfman, David Gale, Tjalling Koopmans, Oscar Morgenstern, Paul Samuelson, Marshall Wood i dr.), što je značilo početak istraživanja mogućih primjena linearnog programiranja.

Linearno programiranje danas ima široku primjenu u brojnim granama gospodarstva na makro i mikrorazini. To je vrlo raširena tehnika među menadžerima u pronalaženju optimalnog rješenja u donošenju odluka posebno važnih za poslovanje poduzeća kao što je primjerice pitanje koji će asortiman, odnosno miks proizvoda omogućiti ostvarenje maksimalnog profita¹⁶.

Općenito, linearno programiranje u ekonomskoj analizi možemo definirati kao skup matematičkih metoda pomoću kojih se vrši kvantitativno označavanje najefikasnijeg korištenja ili alokacije limitiranih raspoloživih resursa, kojima su sve izvodljive alternativne odluke povezane linearnim odnosima. To je skup matematičkih metoda za pronalaženje varijante alokacije ili upotrebe raspoloživih resursa, koja je optimalna s aspekta unaprijed utvrđenog ekonomskog cilja, kao što je, primjerice, minimalni trošak, maksimalni prihod ili maksimalni profit¹⁷.

Primjena linearnog programiranja u iznalaženju optimalnih ekonomskih efekata moguća je samo kod ekonomskih pojava koje zadovoljavaju uvjete temeljnih postavki takvog programiranja. To su:

- a) uvjet postojanja većeg broja različitih ograničenih resursa
- b) uvjet aktivnosti, odnosno korištenja ograničenih resursa
- c) uvjet linearnosti.

Prema tome, može se reći da je linearno programiranje posebna matematička metoda koja se upotrebljava u operativnom istraživanju pri

16 M. Hirschey, J.L. Pappas, *Fundamentals of Managerial Economics*, Fifth Edition, The Dryden Press, Fort Worth, 1995., str. 433. Upravo zato problematika linearnog programiranja postala je nezaobilazna u udžbenicima menadžerske ekonomije – vidi upr. isto djelo, str. 433.-491.; P. Keat, P.K.Y. Young, *Managerial Economics*, Maxwell Macmillan International Editions, New York, 1992., str. 336.-359.; W.F. Samuelson, S.G. Marks, *Managerial Economics*, Second Edition, The Dryden Press, Fort Worth, 1995., str. 653.-689.

17 Prema – S.Jurin, J. Šohinger, isto djelo, str. 199.

obradi problema vezanog ekstrema s linearnom funkcijom cilja, s linearnim jednakstvima ili nejednakstvima i s dodatnim zahtjevom da varijable imaju samo nenegativne vrijednosti.

3.1. Matematičko postavljanje problema linearnog programiranja

Shodno navedenim uvjetima formalizacija, postavljanje problema linearnog programiranja počinje definiranjem ekonomskog efekta koji se uzima kao kriterij optimalnosti, tj. određivanjem funkcije cilja čiju ekstremnu vrijednost (maksimum ili minimum) treba pronaći¹⁸. To je eksplicitna linearna funkcija s više varijabli:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k$$

gdje: $c_1, \dots, c_k$ predstavljaju parametre problema, odnosno koeficijente kriterija, koji su konstantni, proporcionalni razinama vrijednosti varijabli x_k i poznati, a x_k predstavljaju razine pojedinih aktivnosti (pojedinih alternativnih načina ekonomskog korištenja limitiranih raspoloživih resursa). Koeficijenti kriterija kvantitativno definiraju doprinos jedinice svake pojedine aktivnosti ukupnom ekonomskom efektu. Ukupni ekonomski efekt je funkcija odgovarajućih koeficijenata ekonomskog efekta i razina pojedinih aktivnosti zastupljenih u toj funkciji.

Zadatak linearnog programiranja je odrediti ekstremnu vrijednost te funkcije uz ograničenja zadana strukturnim karakteristikama datog ekonomskog kompleksa koje se mogu definirati slijedećim sustavom linearnih nejednadžbi:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k \leq b_2$$

.

.

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k \leq b_m$$

gdje $x_1, x_2, \dots, x_k$ označavaju razine pojedinih aktivnosti, $b_1, b_2, \dots, b_m$ raspoložive količine ograničenih resursa m vrsta i $a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mk}$ tehničke koeficijente utrošaka koji pokazuju količinu resursa b_m koja je potrebna za ostvarenje jedinice aktivnosti x_k . Svaka nejednadžba ovog sustava znači da zbroj utrošaka b_m pri realizaciji pojedinih aktivnosti

18 Usp. S. Jurin, J. Šohinger, isto djelo, str. 199.-200.; P.Cassimatis, *Introduction to Managerial Economics*, Routledge, London, 1996., str. 104. i A. Mas-Colell, M.D. Whinston, J.R. Green, *Microeconomics Theory*, Oxford University Press, New York, 1995., str. 966.

(alternativne uporabe resursa) na razini x_k mora biti u okviru ograničene raspoložive količine b_m tog resursa.

Osim ovog, u ekonomskoj primjeni linearnog programiranja postavlja se još jedan zahtjev, a taj je da vrijednosne razine pojedinih aktivnosti varijabli uvedenih u model moraju biti nenegativne, jer uzimanje negativnih vrijednosti razina aktivnosti je ekonomski besmisleno. Dakle, postoji i dodatno ograničenje:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, \dots, k)$$

Ovdje je potrebno naglasiti da svakom problemu linearnog programiranja koji je prvi zadan i koji se naziva primarni odgovara drugi problem koji se naziva dualni. Između primarnog i dualnog problema postoji inverzija u pogledu zahtjeva pa ako je primarni problem formuliran u obliku maksimuma, tada dual poprima oblik problema minimuma. Kako je s gledišta rješenja koje se traži svejedno rješava li se primarni problem ili njegov dual, često se rješava onaj problem koji je u datom trenutku jednostavniji¹⁹.

3.2. Primjer utvrđivanja optimalnog asortimana proizvodnje

Bit problema utvrđivanja optimalnog asortimana proizvodnje pomoću linearnog programiranja moguće je pokazati na jednostavnom primjeru, uz slijedeću napomenu.

U rješavanju problema linearnog programiranja uobičajeno se koristi grafička metoda (koja će se u nastavku razmotriti) i simpleks metoda²⁰. Međutim, u zbilji se, umjesto grafičkim i algebarskim tehnikama, problemi linearnog programiranja uobičajeno rješavaju pomoću računala. Dva

19 Tako u problemu optimalnog asortimana primarni problem može biti koliko kojeg proizvoda treba proizvoditi da bi se njegovom prodajom maksimizirao profit, a dualni problem može biti kako u poduzeću angažirati raspoložive resurse kako bi se postigli najniži troškovi. O postavljanju dualnog problema vidi – Đ. Benić, isto djelo, str. 75.-77.; A.C. Chiang, *Osnovne metode matematičke ekonomije*, treće izdanje, MATE, Zagreb, str. 688.-700. i R. Dorfman, P.A. Samuelson, R.M. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis*, Dover Publications, Inc., New York, 1987., str. 39.-41.

20 O rješavanju problema linearnog programiranja simpleks metodom vidi – Đ. Benić, isto djelo, str. 72.-75., A.C. Chiang, isto djelo, str. 676.-687.; A. Vadal, *Primjena matematičkih metoda u ekonomiji*, Informator, Zagreb, 1980., str. 175.-207.; Z. Babić, *Linearno programiranje*, zbirka zadataka, Ekonomski fakultet, Split, 1991., str. 54.-90. i D.P. Maki, M. Thompson, *Finite Mathematics*, Third Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1989., str. 328.-387.; A. Koutsoyiannis, *Moderna mikroekonomika*, drugo izdanje, MATE, Zagreb, 1996., str. 423.-434.

najpopularnija programa za rješavanje računalom su LINDO (Linear Interactive Discrete Optimiser) i LINPRO²¹.

3.2.1. Postavljanje problema linearnog programiranja

U prikazu rješavanja problema maksimizacije dobiti pretpostavimo da poduzeće proizvodi samo dva proizvoda: proizvod A i proizvod B. Prodajna cijena proizvoda A u određenom proizvodnom razdoblju je 26 novčanih jedinica, a za proizvod B prodajna cijena je 74 novčane jedinice. Analizom potreba proizvodnje ustanovljeno je da je opseg proizvodnje ograničen s 3 vrste resursa koji su navedeni u tablici 1.

Tablica 1. Zahtijevani resursi i raspoloživost za proizvodnju proizvoda A i B

Resurs	Cijena-troškovi po jedinici resursa	Zahtijevane količine resursa po jedinici proizvodnje		Količina raspoloživih resursa po razdoblju proizvodnje
		Proizvod A	Proizvod B	Ukupno
1	4	0	2	80
2	1	2	8	400
3	2	2	4	320

Drugim riječima, za proizvodnju jedinice proizvoda A potrebne su 2 jedinice resursa 2 i 2 jedinice resursa 3, dok je resurs 1 za proizvodnju jedinice proizvoda A nepotreban. Isto tako, za proizvodnju 1 jedinice proizvoda B potrebne su 2 jedinice resursa 1, 8 jedinica resursa 2 i 4 jedinice resursa 3. Tablica 1. također pokazuje da poduzeće u proizvodnom razdoblju ima na raspolaganju 80 jedinica resursa 1, 400 jedinica resursa 2 i 320 jedinica resursa 3. Poduzeće dakle želi odrediti kako koristiti raspoložive resurse kako bi proizvelo kombinaciju proizvoda A i B koji maksimizira ukupni profit.

Prvi korak u rješavanju problema linearnog programiranja je formuliranje funkcije cilja. Kako svaka jedinica proizvoda A donosi profit u visini 20 novčanih jedinica (prodajna cijena 26 jedinica, minus troškovi 6 jedinica – 2 jedinice resursa 2 puta 1 novčana jedinica plus 2 jedinice resursa 3 puta 2 novčane jedinice) a svaka jedinica proizvoda B donosi profit od 50 novčanih jedinica, funkcija cilja (ukupni profit) koju poduzeće nastoji maksimizirati je:

21 Vidi – D. Salvatore, *Ekonomija za menadžere u svjetskoj privredi*, drugo izdanje, MATE, Zagreb, 1994., str. 350.-352. i M. Hirschey, J.L. Pappas, D. Whigham, *Managerial Economics*, European Edition, The Dryden Press, London, 1995., str. 557.-558.

$$f(x) = 10x_1 + 25x_2$$

gdje su x_1 i x_2 količine proizvoda A i B koje poduzeće proizvodi. Prema tome, može se reći da je ukupni profit poduzeća jednak zbroju umnoška jediničnog prinosa profita proizvoda A s proizvedenom količinom proizvoda A i umnoška jediničnog prinosa profita proizvoda B s količinom proizvoda B koju poduzeće proizvodi.

Isto tako se formuliraju i ograničenja. Na temelju prvog retka tablice 1. vidi se da se za proizvodnju svake jedinice proizvoda A ne koristi resurs 1, te da se 2 jedinice ograničenog resursa koristi za proizvodnju 1 jedinice proizvoda B, kao i da je resurs 1 ograničen sa 80 jedinica. Prema tome, ograničenje koje postavlja ograničeni resurs 1 na proizvodnju poduzeća može se izraziti kao:

$$2x_2 \leq 80$$

Na ovaj način, temeljem drugog i trećeg retka u tablici 1., dobivaju se i ostala dva ograničenja, uz ograničenje da je ekonomski besmisleno proizvoditi negativne količine proizvoda A i B, pa uz navedena ograničenja iz tablice 1. postoji i nenegativno ograničenje. Model linearnog programiranja ovog problema izgleda ovako:

$$\text{Max } f(x) = 10x_1 + 25x_2 \quad (\text{funkcija cilja})$$

Uz ograničenja:

$$1x_2 \leq 40 \quad (\text{ograničenje resursa 1})$$

$$1x_1 + 4x_2 \leq 200 \quad (\text{ograničenje resursa 2})$$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 160 \quad (\text{ograničenje resursa 3})$$

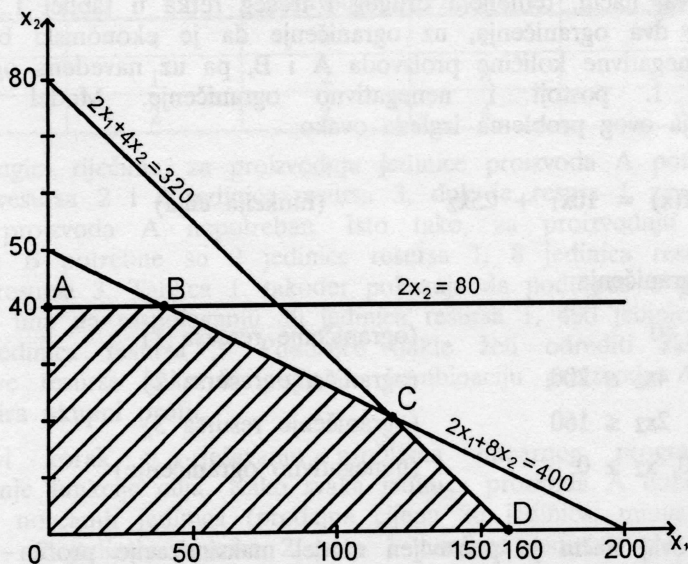
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (\text{nenegativno ograničenje})$$

Na ovaj način je postavljen model maksimizacije profita poduzeća metodom linearnog programiranja, uz data ograničenja. Ovaj problem bi se mogao riješiti tako da se utvrde sva moguća rješenja za navedena ograničenja 1, 2 i 3, te eliminiraju rješenja koja ne zadovoljavaju uvjet nenegativnosti, te ista uvrste u funkciju maksimizacije dobiti. Rješenje koje daje najveću veličinu ukupnog profita optimizira funkciju cilja poduzeća.

3.2.2. Grafički prikaz i rješenje

Kako promatrani primjer sadrži samo dvije varijable, moguće je grafički prikazati model linearnog programiranja. Takav prikaz je vrlo koristan jer se na njemu mogu uočiti bitne karakteristike modela, način rješavanja i karakter optimalnog rješenja problema.

Grafički prikaz sadrži samo prvi kvadrant ravnine jer varijable odlučivanja ne mogu imati negativnu vrijednost. Prikaz ograničenja se pravi tako da se ograničenja koja postavljaju ograničeni resursi na proizvodnju poduzeća pretvore iz nejednažbe u jednadžbu (primjerice, $2x_1 + 8x_2 \leq 400$ u $2x_1 + 8x_2 = 400$). Kada se navedeni postupak primijeni na sva ograničenja, i kada se grafički prikažu dobiva se područje mogućih rješenja problema. Ovo područje prikazano na slici 4. obuhvaća beskonačan broj mogućih rješenja (jer su varijable odlučivanja realni brojevi).

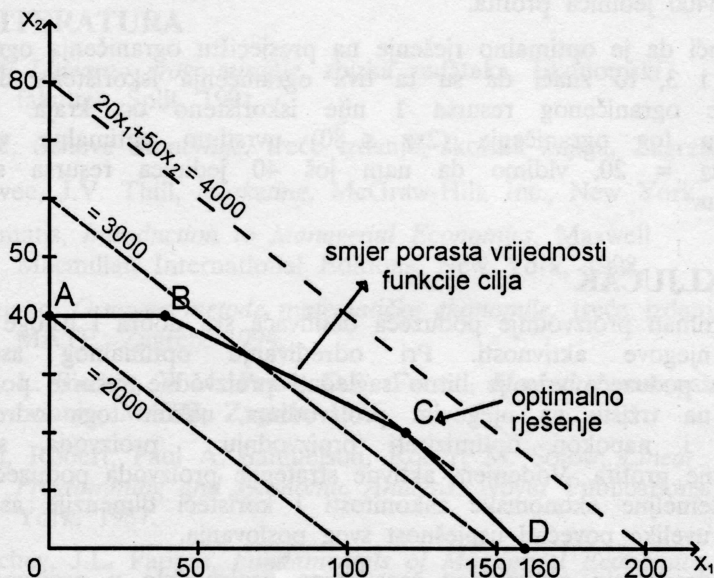


Slika 4. Područje mogućih rješenja

Međutim, ono što se zahtjeva u modelu linearnog programiranja je rješenje koje je, ne samo moguće, nego i optimalno prema odabranom kriteriju. Sada treba obratiti pozornost na vrhove poligona (ABCD0) koji uokviruju područje mogućih rješenja. Ti su vrhovi, zvani i ekstremne točke područja mogućih rješenja, ključni za traženje optimalnog rješenja. Naime, ako je skup svih mogućih rješenja problema linearnog programiranja konveksni poliedar tada ekstrem uvijek postoji i postiže se u jednoj

ekstremnoj točki²². To znači da možemo ograničiti traženje optimalnog rješenja s beskrajno mnogo mogućnosti iz područja mogućih rješenja na konačan broj ekstremnih točaka (u našem slučaju to su točke A, B, C, D i 0).

Crtanje funkcije cilja za nekoliko mogućih vrijednosti dobiti pokazat će koja bi od ekstremnih točaka mogla predstavljati optimalno rješenje problema. Ukoliko se funkcija cilja $20x_1 + 50x_2$ izjednači sa, primjerice, vrijednosti 2000, dobiva se jednadžba pravca $20x_1 + 50x_2 = 2000$, koji se može nanijeti na grafički prikaz područja mogućih rješenja. Nanošenjem daljnjih dviju vrijednosti dobiti, primjerice 3000 i 4000, na područje mogućih rješenja, dobiva se:



Slika 5. Utvrđivanje optimalnog rješenja

Pitanje je koliko je daleko moguće pomicati liniju jednakog profita u smjeru od ishodišta, a da ona sadrži barem još jednu točku iz područja mogućih rješenja. Iz slike 5. vidljivo je da će uvijek jedna od točaka koja daje optimalnu vrijednost biti ekstremna točka. Ona će biti jedina točka optimuma, ukoliko linija profita nije paralelna ni s jednom linijom

22 Z. Babić, isto djelo, str. 40.

ograničenja ili bar jedna od optimalnih točaka u rijetkim slučajevima kada je linija jednakog profita paralelna s nekom od linija ograničenja. U promatranom primjeru očito je da točka C daje optimalno rješenje problema, jer u njoj linija profita postiže svoju najveću vrijednost. Koordinate točke C, koje predstavljaju rješenje problema, izračunavaju se kao koordinate presjecišta ograničenja ograničenih resursa proizvodnje 2 i 3 pisanih u obliku jednadžbi:

$$2x_1 + 8x_2 = 400 \quad (\text{ograničenje resursa 2})$$

$$2x_1 + 4x_2 = 320 \quad (\text{ograničenje resursa 3})$$

Jednostavnim rješenjem sustava dviju jednadžbi sa dvije nepoznanice, dobivaju se vrijednosti proizvodnje proizvoda A i B i to $x_1 = 120$ i $x_2 = 20$. Dakle, optimalno je proizvoditi 120 jedinica proizvoda A i 20 jedinica proizvoda B u proizvodnom razdoblju, za što profit iznosi $20 \cdot (120) + 50 \cdot (20) = 3400$ jedinica profita.

Budući da je optimalno rješenje na presjecištu ograničenja ograničenih resursa 2 i 3, to znači da su ta dva ograničenja iskorištena do kraja. Ograničenje ograničenog resursa 1 nije iskorišteno do kraja. Kada u nejednadžbu tog ograničenja ($2x_2 \leq 80$) uvrstimo optimalnu vrijednost varijable $x_2 = 20$, vidimo da nam još 40 jedinica resursa stoje na raspolaganju.

ZAKLJUČAK

Asortiman proizvodnje poduzeća obuhvaća sva dobra i usluge koje su predmet njegove aktivnosti. Pri određivanju optimalnog asortimana proizvodnje poduzeća vrlo je bitno sagledati proizvodne resurse poduzeća i potražnju na tržištu za njegovim proizvodima, nakon toga odrediti što proizvoditi i napokon optimizirati proizvodnju proizvoda, s ciljem maksimizacije profita. Vođenjem aktivne strategije proizvoda poduzeće može, poštujući temeljne ekonomske zakonitosti i koristeći dimenzije asortimana proizvoda, uvelike povećati uspješnost svog poslovanja.

U određivanju optimalnog asortimana proizvodnje u proizvodnji više proizvoda s aspekta maksimizacije profita polazi se od činjenice da poduzeće može proizvesti, sa zadanom tehnologijom i količinom ograničenih činitelja proizvodnje, ograničenu količinu proizvoda. Transformaciju jednog proizvoda u drugi realokacijom činitelja proizvodnje moguće je prikazati krivuljom transformacije koja predstavlja sve kombinacije proizvoda koji se na osnovu ograničenih resursa, mogu istovremeno proizvoditi u jednom poduzeću. Uvođenjem u analizu i podataka o veličini ukupnih prihoda i ukupnih troškova svake optimalne kombinacije proizvodnje, može se utvrditi koja od kombinacija proizvodnje maksimizira profit.

Optimalni asortiman proizvodnje poduzeća može se utvrditi i metodom linearnog programiranja. Kod utvrđivanja optimalnog asortimana proizvodnje metodom linearnog programiranja potrebno je precizno utvrditi

funkciju cilja čiju ekstremnu vrijednost treba pronaći. Isto tako, pravilnim utvrđivanjem ograničenih resursa koji se koriste u proizvodnji proizvoda može se postaviti precizan model linearnog programiranja pomoću kojeg se određuje optimalni asortiman proizvodnje.

Postavljeni model linearnog programiranja s definiranom funkcijom cilja i zadanim ograničenjima moguće je riješiti simplex i grafičkom metodom. Međutim, kako se u praksi nailazi na velik broj proizvoda i zadanih ograničenih resursa iz kojih treba iznaći optimalnu kombinaciju proizvodnje proizvoda, postoje i kompjutorski programi pomoću kojih se uobičajeno rješavaju problemi linearnog programiranja. Rješenje modela linearnog programiranja pokazuje optimalnu kombinaciju proizvodnje proizvoda poduzeća odnosno asortiman proizvoda čijom proizvodnjom ono ostvaruje maksimalni mogući profit.

LITERATURA

- Z. Babić, *Linearno programiranje*, zbirka zadataka, Ekonomski fakultet, Split, 1991.
- Đ. Benić, *Osnove ekonomije*, treće izdanje, školska knjiga, Zagreb, 2001.
- C.L. Bovee, J.V. Thill, *Marketing*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1992.
- P. Cassimatis, *Introduction to Managerial Economics*, Maxwell Macmillan International Editions, New York, 1992.
- A.C. Chiang, *Osnovne metode matematičke ekonomije*, treće izdanje, MATE, Zagreb, 1994.
- S. Dibb, L. Simkin, W.M. Pride, O.C. Ferrell, *Marketing*, europsko izdanje, MATE, Zagreb, 1995.
- Dorfman, Robert, Paul A. Samuelson, Robert M. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis*, Dover Publications, Inc., New York, 1987.
- M. Hirschey, J.L. Pappas, *Fundamentals of Managerial Economics*, Fifth Edition, The Dryden Press, Fort Worth, 1995.
- M. Hirschey, J.L. Pappas, D. Whigham, *Managerial Economics*, European Edition, The Dryden Press, London, 1995.
- S. Jurin, *Linearno programiranje i cijene*, Institut društvenih nauka, Beograd, 1971.
- S. Jurin, J. Šohinger, *Teorija tržišta i cijena*, Globus, Zagreb, 1990.
- P. Keat, P.K.Y. Young, *Managerial Economics*, Maxwell Macmillan International Editions, New York, 1992.
- P. Kotler, *Upravljanje marketingom*, Informator, Zagreb, 1988.
- A. Koutsoyiannis, *Moderna mikroekonomika*, drugo izdanje, MATE, Zagreb, 1996.

- A. Mas-Colell, M.D. Whinston, J.R. Green, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, New York, 1995.
- D.P. Maki, M. Thompson, *Finite Mathematics*, Third Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1989.
- E.J. McCarthy, W.D. Perreault, *Basic Marketing*, Eleventh Edition, IRWIN, Burr Ridge, Illinois, 1993.
- F. Rocco, *Marketinško upravljanje*, Školska knjiga, Zagreb, 1994.
- W.F. Samuelson, S.G. Marks, *Managerial Economics*, Second Edition, The Dryden Press, Fort Worth, 1995.
- D. Salvatore, *Ekonomija za menedžere u svjetskoj privredi*, drugo izdanje, MATE, Zagreb, 1994.
- A. Vadnal, *Primjena matematičkih metoda u ekonomiji*, Informator, Zagreb, 1980.
- N. Vulić, Đ. Benić, *Politika i gospodarstvo*, Školska knjiga, Zagreb, 2000.

Maro Radović. B.Sc.

Manager

INA, Dubrovnik

OPTIMUM PRODUCT ASSORTMENT DETERMINATION

Summary

The assortment of product and services offered by a company is the basic factor determining the company's overall activity. The determination of the optimum product assortment is crucial for the company with respect to the profit maximization. At the same time, it should meet consumer requirements in the target market. This paper analyses the notion and importance of the assortment, and the theoretical determination of the optimum assortment for the production of various products with a view to the profit maximization. A theoretical analysis and the determination of the optimum product assortment by means of a linear programming are also provided.

Key words: marketing, assortment, linear programming, optimum solution

JEL classification: M31, D21, C61