

math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Floyd-Warshallov algoritam u tropskoj geometriji

Floyd-Warshallov algoritam optimizacija tropska geometrija

Zlatko Erjavec, Drago Kovačec

zlatko.erjavec@foi.hr, drago.kovacec@foi.hr

Sažetak

U članku se pojašnjavaju osnovni pojmovi tropske geometrije te njena primjena u rješavanju problema određivanja najkraćeg puta u težinskom grafu Floyd-Warshallovim algoritmom.

1 Uvod

Tropska geometrija je relativno novo područje u matematici, a naziv "tropska geometrija" osmislili su francuski matematičari u čast brazilskom matematičaru Imre Simonu, pioniru u tom području. Stoga pridjev "tropska" nema neko posebno značenje osim asocijacije na Brazil kao tropsko područje.

Jednostavnost aritmetike tropske geometrije omogućila joj je brojne primjene od ekonomije preko biologije do računarstva. Više o primjenama može se naći u [2].

U ovom članku pokazat ćemo na koji se način aritmetika tropske geometrije može primijeniti u rješavanju problema pronalaska najkraćeg puta. Bilo da govorimo o putu kamiona od skladišta do odredišta ili o najkraćem putu među serverima u računalnoj mreži, problem se svodi na nalaženje najkraćeg puta u težinskom grafu. Navedeni problem rješava **Floyd-Warshallov algoritam**.

2 Tropska geometrija

Osnovna struktura tropske geometrije je tropski poluprsten, uređena trojka $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$ sastavljena od skupa realnih brojeva proširenog beskonačnošću te dvije međusobno usklađene operacije, tropskog zbrajanja i tropskog množenja (vidi [3]).

2.1 Tropsko zbrajanje

Suma dvaju brojeva u tropskoj aritmetici definira se kao minimum tih dvaju brojeva

$$x \oplus y := \min(x, y). \quad (1)$$

Primjer 1. *Tropsko zbrajanje*

$$3 \oplus 5 = 3 \quad \text{i} \quad 7 \oplus 2 = 2.$$

2.2 Tropsko množenje

Produkt dvaju brojeva u tropskoj aritmetici definira se kao uobičajen zbroj tih dvaju brojeva

$$x \odot y := x + y. \quad (2)$$

Primjer 2. *Tropsko množenje*

$$3 \odot 5 = 8 \quad \text{i} \quad 7 \odot 2 = 9.$$

Obje definirane računske operacije imaju neutralne elemente. Za tropsko zbrajanje neutralni element je beskonačno, dok je za tropsko množenje neutralni element nula

$$a \oplus \infty = a \quad \text{i} \quad a \odot 0 = a.$$

Također vrijedi,

$$a \oplus 0 = \begin{cases} 0, & \text{za } a \geq 0 \\ a, & \text{za } a < 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad a \odot \infty = \infty.$$

Nadalje, obje operacije su komutativne i asocijativne te vrijedi distributivnost množenja u odnosu na zbrajanje.

- *Komutativnost*

$$a \oplus b = b \oplus a \quad \text{i} \quad a \odot b = b \odot a.$$

- *Asocijativnost*

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \quad \text{i} \quad (a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c).$$

- *Distributivnost*

$$a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c.$$

Primjer 3. *Distributivnost tropskog množenja prema zbrajanju*

$$\begin{aligned} 4 \odot (2 \oplus 3) &= 4 \odot 2 \oplus 4 \odot 3 \\ 4 \odot 2 &= 6 \oplus 7 \\ 6 &= 6. \end{aligned}$$

2.3 Tropski polinom

Neka su x_1, x_2, \dots, x_n varijable koje predstavljaju elemente tropskog poluprstena. Monom se definira kao bilo koji produkt tih varijabli, pri čemu je mogućnost njihova ponavljanja dozvoljena.

Koristeći komutativnost i asocijativnost, možemo presložiti produkt i zapisati ga u uobičajenom obliku koristeći potencije, imajući na umu da x^2 znači $x \odot x$, a ne $x \cdot x$. Npr.

$$x_2 \odot x_1 \odot x_3 \odot x_1 \odot x_2 \odot x_2 = x_1^2 x_2^3 x_3.$$

Svakom monomu možemo pridružiti funkciju sa \mathbb{R}^n u \mathbb{R} . Kada bismo takvu funkciju evaluirali u klasičnoj aritmetici, dobili bismo linearnu funkciju:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_2 \odot x_1 \odot x_3 \odot x_1 \odot x_2 \odot x_2 \\ &= x_2 + x_1 + x_3 + x_1 + x_2 + x_2 \\ &= 2x_1 + 3x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Iako smo u primjeru koristili pozitivne eksponente, monomi su definirani i za cjelobrojne eksponente. Stoga, možemo zaključiti da su **tropski monomi** linearne funkcije s cjelobrojnim koeficijentima.

Tropski polinom je konačna linearna kombinacija tropskih monoma:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = a \odot x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \oplus b \odot x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n} \oplus \cdots$$

Primjer 4. *Tropski polinom u jednoj varijabli*

$$p(x) = (2 \odot x^3) \oplus (1 \odot x^2) \oplus (3 \odot x) \oplus 2 = \min\{2 + 3x, 1 + 2x, 3 + x, 2\}.$$

Primijetite da u tropskoj geometriji polinomi

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^2 \oplus (1 \odot x) \oplus 2 = \min\{2x, 1 + x, 2\} = \min\{2x, 2\} \quad \text{i} \\ p_2(x) &= x^2 \oplus (17 \odot x) \oplus 2 = \min\{2x, 17 + x, 2\} = \min\{2x, 2\} \end{aligned}$$

imaju istu vrijednost. Dakle, prikaz neke funkcije u obliku tropskog polinoma nije jednoznačan.

Uslijed specifičnosti definicije množenja i nule kao neutralnog elementa, svi binomni koeficijenti tropskog polinoma jednaki su nuli (u Pascalovom trokutu su samo nule!). Posljedica navedenog je činjenica da u tropskoj geometriji za sve potencije binoma vrijedi tzv. "brucoški san".

Primjer 5. *"Brucoški san" za kvadrat binoma*

$$\begin{aligned} (x \oplus y)^2 &= (x \oplus y) \odot (x \oplus y) \\ &= 0 \odot x^2 \oplus 0 \odot xy \oplus 0 \odot y^2 \\ &= (0 + x^2) \oplus (0 + xy) \oplus (0 + y^2) \\ &= x^2 \oplus xy \oplus y^2 \\ &= \min\{x^2, xy, y^2\} \\ &= \min\{x^2, y^2\} \\ &= x^2 \oplus y^2. \end{aligned}$$

2.4 Tropski skalarni produkt

Tropski skalarni produkt definira se analogno klasičnom matričnom produktu jednoretčane i jednostupčane matrice

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, u_3) \odot (v_1, v_2, v_3)^T &= u_1 \odot v_1 \oplus u_2 \odot v_2 \oplus u_3 \odot v_3 \\ &= \min\{u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3\}.\end{aligned}$$

Primjer 6. *Tropski skalarni produkt*

$$\begin{aligned}(2, 4, -3) \odot (3, 5, -5) &= (2 \odot 3) \oplus (4 \odot 5) \oplus ((-3) \odot (-5)) \\ &= \min\{5, 9, -8\} = -8.\end{aligned}$$

2.5 Tropsko zbrajanje matrica

Tropsko zbrajanje matrica definira se analogno klasičnom zbrajanju matrica, po elementima, korištenjem tropskog zbrajanja.

Primjer 7. *Tropsko zbrajanje matrica*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6 Tropsko množenje matrica

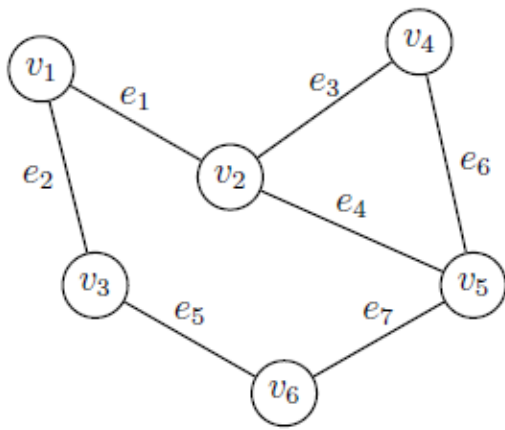
Tropsko množenje matrica definira se analogno klasičnom množenju matrica. Element produkta dviju matrica dobije se kao tropski skalarni produkt odgovarajućeg retka prve i odgovarajućeg stupca druge matrice.

Primjer 8. *Tropsko množenje matrica*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3 Grafovi i problem najkraćeg puta

Graf G se definira kao uređen par skupova $G = (V, E)$ pri čemu je skup V **skup vrhova**, a skup E je **skup bridova**. Skupovi V i E su disjunktne, a svaki brid $e \in E$ spaja dva vrha $u, v \in V$. Vrhovi u, v grafa G se još nazivaju krajevima brida e (vidi [1]).



SLIKA 1. Primjer grafa

Šetnja u grafu G je konačan niz incidentnih vrhova i bridova. Vrhovi i bridovi u šetnji ne moraju nužno biti i različiti.

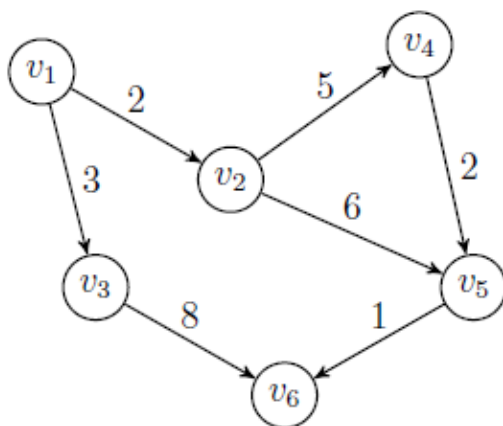
Šetnja u kojoj su svi vrhovi i bridovi različiti zove se **put**. Primjer jednog puta u grafu sa Slike 1 je $P = v_1 e_1 v_2 e_3 v_4 e_6 v_5 e_7 v_6$.

Graf prikazan na Slici 1 nazivamo i **neusmjerenim grafom** zato što je bridovima grafa moguće prolaziti u oba smjera.

Usmjereni brid zovemo **lukom**, a ukoliko se svi bridovi grafa orijentiraju (usmjere), tada graf zovemo **usmjerenim grafom**. Lukovima usmjerenog grafa moguće je prolaziti samo u smjeru orijentacije.

Pridružimo li svakom bridu nenegativan realan broj $w(e)$, dobiveni graf naziva se **težinski graf**, a broj pridružen bridu e **težina brida** $w(e)$.

Težinski graf kojem su svi bridovi usmjereni zovemo **težinski usmjerenim grafom**.



SLIKA 2. Težinski usmjereni graf

Težinu puta P u grafu G možemo definirati formulom

$$w(P) = \sum_{e \in E(P)} w(e).$$

Drugim riječima, težina puta P u grafu G je zbroj težina svih bridova kojima se prolazi od početnog do završnog vrha puta P . Tako bi težina puta $P = v_1 e_1 v_2 e_3 v_4 e_6 v_5 e_7 v_6$ u grafu sa Slike 1 (uzimajući u obzir težine dane na Slici 2) iznosila 10, dok je istovremeno težina puta $Q = v_1 e_1 v_2 e_4 v_5 e_7 v_6$ u grafu sa iste slike 9.

Ukoliko nam je cilj što razumnije koristiti resurse, bilo da se radi o udaljenosti koju trebaju proći automobilom ili vremenu potrebnom za prijenos informacija, htjeli bismo da težina puta između dva vrha bude najmanja moguća. Problem pronalaska takvog puta zovemo problemom najkraćeg puta, a rješenje problema dano je algoritmom koji nazivamo Floyd-Warshallov algoritam.

4 Floyd-Warshallov algoritam u tropskoj geometriji

Floyd-Warshallov algoritam je algoritam za pronalaženje najkraćeg puta između bilo koja dva povezana vrha u težinskom grafu.

Obzirom da se računanje svodi na uzastopne transformacije matrica, prednost ovog algoritma je što kod izvršavanja na računalu ne troši velike memorijske resurse.

U nastavku ćemo pojasniti korake algoritma. Odabere se prvi vrh te se redom izračunavaju udaljenosti od tog vrha do svih preostalih vrhova s kojima je on povezan. Ukoliko je promatrani vrh s nekim drugim vrhom povezan s više puteva, tada se za udaljenost između ta dva vrha uzima najmanja udaljenost između ta dva vrha. Ponavljanjem istog postupka za svaki od preostalih vrhova dobiju se najkraće udaljenosti između vrhova u grafu.

Pseudokod Floyd-Warshallovog algoritma

ulaz: Težinski graf $G = (V, E)$, $V = v_1, v_2, \dots, v_n$

izlaz: Najkraće udaljenosti između svaka dva vrha u grafu G

- (1) Za $i = 1, \dots, n$ stavi $d(i, i) = 0$. Za $i \neq j$, ako je $v_i v_j$ brid, stavi $d(i, j) = w(v_i v_j)$, inače stavi $d(i, j) = \infty$.
- (2) Za $k = 1, \dots, n$
 - za $i, j = 1, \dots, n$
 - $d(i, j) := d(i, j) \oplus (d(i, k) \odot d(k, j))$

Kada bismo usporedili prikazani pseudokod s klasičnim, zaključili bismo da su samo uobičajene operacije minimuma i zbrajanja zamijenjene tropskim zbrajanjem i množenjem.

No snaga primjene tropske geometrije u ovom slučaju je puno veća. U nastavku ćemo pokazati da se traženje najkraćeg puta u težinskom grafu uz pomoć tropske geometrije svodi na tropsko množenje matrica.

Svakom težinskom grafu možemo pridružiti **matricu susjedstva** na

sljedeći način

$$D_{(i,j)} = \begin{cases} w(v_i, v_j), & \text{ako } v_i \text{ i } v_j \text{ susjedni} \\ 0, & \text{ako je } i = j \\ \infty, & \text{ako } v_i \text{ i } v_j \text{ nisu susjedni.} \end{cases}$$

Primjer 9. Matrica susjedstva grafa sa Slike 2

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 5 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Također, za proizvoljnu kvadratnu matricu, u tropskoj se geometriji definira k -ta **tropska potencija matrice** kao tropski umnožak k matrica

$$D^{\odot k} := \underbrace{D \odot D \odot \dots \odot D}_{k \text{ puta}}.$$

Teorem 1. Neka je G težinski usmjeren graf s n vrhova i $n \times n$ matricom susjedstva D . Tada je element matrice $D^{\odot n-1}$ na poziciji (i, j) jednak duljini najkraćeg puta od vrha v_i do vrha v_j .

Dokaz. Neka je s $d_{ij}^{(r)}$ označena minimalna duljina bilo kojeg puta od vrha v_i do vrha v_j koji prolazi kroz najviše r bridova u grafu G .

Neka je $d_{ij}^{(1)} = d_{ij}$ za bilo koja dva vrha v_i i v_j . Pretpostavivši da su težine bridova nenegativne vrijednosti, najkraći put od v_i do v_j prolazi najviše jednom kroz svaki vrh u grafu G . Općenito, bilo koji najkraći put u težinski usmjerenom grafu G prelazi kroz najviše $n - 1$ usmjerenih bridova. Otuda slijedi da je duljina najkraćeg puta od vrha v_i do vrha v_j jednaka $d_{ij}^{(n-1)}$.

Za $r \geq 2$ imamo sljedeću rekurzivnu formulu za duljinu najkraćeg puta

$$d_{ij}^{(r)} = \min \left\{ d_{ik}^{(r-1)} + d_{kj} : k = 1, 2, \dots, n \right\}. \quad (3)$$

Korištenjem tropske aritmetike prethodna formula može se zapisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} d_{ij}^{(r)} &= d_{i1}^{(r-1)} \odot d_{1j} \oplus d_{i2}^{(r-1)} \odot d_{2j} \oplus \dots \oplus d_{in}^{(r-1)} \odot d_{nj} \\ &= (d_{i1}^{(r-1)}, d_{i2}^{(r-1)}, \dots, d_{in}^{(r-1)}) \odot (d_{1j}, d_{2j}, \dots, d_{nj})^T. \end{aligned}$$

Iz navedenog proizlazi da se $d_{ij}^{(r)}$ podudara sa elementom u i -tom retku i j -tom stupcu matrice $D^{\odot r}$. Očito je desna strana rekurzivne formula tropski produkt i -tog retka matrice $D^{\odot r-1}$ i j -tog stupca

matrice D . Indukcijom po r zaključujemo da se $d_{ij}^{(n-1)}$ podudara s elementom u i -tom retku i j -tom stupcu matrice $D^{\odot n-1}$ ■

Primjer 10. Računanje elementa matrice D na poziciji $(1, 4)$

$$\begin{aligned} d_{1,4}^{(1)} &= (0 \odot \infty) \oplus (2 \odot 5) \oplus (3 \odot \infty) \oplus (\infty \odot 0) \oplus (\infty \odot \infty) \oplus (\infty \odot \infty) \\ &= \infty \oplus 7 \oplus \infty \oplus \infty \oplus \infty \oplus \infty \\ &= \min \{ \infty, 7, \infty, \infty, \infty, \infty \} \\ &= 7. \end{aligned}$$

Primjer 11. Matrica najkraćih puteva grafa sa Slike 2

$$D^{\odot 5} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ \infty & 0 & \infty & 5 & 6 & 7 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Navedena matrica predstavlja rješenje problema i iz nje se mogu iščitati najkraće udaljenosti između bilo koja dva povezan vrha.

Slijedi da je $d(v_1, v_2) = 2$, $d(v_1, v_3) = 3$, $d(v_1, v_4) = 7$,
 $d(v_1, v_5) = 8$, $d(v_1, v_6) = 9$, $d(v_2, v_4) = 5$, $d(v_2, v_5) = 6$,
 $d(v_2, v_6) = 7$, $d(v_3, v_6) = 8$, $d(v_4, v_5) = 2$, $d(v_4, v_6) = 3$ i
 $d(v_5, v_6) = 1$.

Napomena 12. Primijetite da iako smo pomoću Floyd-Warshallovog algoritma odredili najkraće udaljenosti između vrhova, algoritam ne otkriva putove kojima su najmanje udaljenosti ostvarene.

Primjer 13. Matrica susjedstva težinski neusmjerenog grafa

Zamislimo li da je graf sa Slike 2 težinski neusmjereni graf, tada bi njegova matrica susjedstva bila sljedeća simetrična matrica

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & \infty & 5 & 6 & \infty \\ 3 & \infty & 0 & \infty & \infty & 8 \\ \infty & 5 & \infty & 0 & 2 & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 2 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & 8 & \infty & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Izračunavanjem pete potencije matrice susjedstva \bar{D} možemo odrediti simetričnu matricu najkraćih putova težinski neusmjerenog analogona grafa sa Slike 2.

$$\bar{D}^{\odot 5} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 0 & 10 & 9 & 8 \\ 7 & 5 & 10 & 0 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 9 & 2 & 0 & 1 \\ 9 & 7 & 8 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bibliografija

- [1] Divjak B., Lovrenčić A. *Diskretna matematika s teorijom grafova*, FOI-TIVA, Varaždin, 2005.
- [2] Maclagan D., Sturmfels B., *Introduction to Tropical Geometry*, AMS Grad Stud in Math Vol **161**, 2015.
- [3] Speyer D., Sturmfels B., *Tropical mathematics*, Math Magazine **82** (3), 2009, 163–173.

