# O bikvadratnoj jednadžbi

*Predrag Lončar*[1]

## Nultočke bikvadratne jednadžbe

U ovom radu bavit ćemo se rješavanjem u radikalima tzv. bikvadratne jednadžbe

$$x^4 + px^2 + r = 0, \tag{1}$$

pri čemu su $p$ i $r$ zadani realni brojevi. Pored toga, ispitat ćemo i prirodu rješenja (tj. nultočaka) jednadžbe (1) (kada jednadžba ima: dva realna i dva čisto imaginarna rješenja ili dva para konjugirano kompleksnih rješenja ili sva četiri realna rješenja). Na koncu, nacrtat ćemo neke tipične grafove bikvadratne funkcije

$$f(x) = x^4 + px^2 + r, \tag{2}$$

te iz grafova promotriti prirodu nultočaka funkcije $f(x)$, odnosno rješenja jednadžbe (1). Dogovorno, kompleksni broj $u + vi$ zvat ćemo čisto imaginarnim ako je $u = 0$ i $v \neq 0$. Čisto imaginarni broj pišemo $v\ i$. Pritom je $i$ imaginarna jedinica, $i^2 = -1$.

Najjednostavniji način rješavanja jednadžbe (1) (ali ne i jedini) je supstitucija

$$t = x^2, \tag{3}$$

čime se ona svodi na kvadratnu jednadžbu

$$t^2 + pt + r = 0. \tag{4}$$

Jednadžbu (4) riješimo po poznatoj formuli:

$$t_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4r}}{2} \tag{5}$$

Po Viètovim formulama vrijedi: $t_1 + t_2 = -p$ i $t_1t_2 = r$. No, brojevi $t_1$ i $t_2$ ne moraju oba biti realni pozitivni, već mogu biti i negativni ili kompleksni, što stvara teškoće. Ako je npr. diskriminanta jednadžbe (4) $p^2 - 4r \geq 0$ i $p < 0$ i $r > 0$, jednadžba (1) ima sva realna rješenja, jer su $t_1$ i $t_2$ pozitivni. Ta su rješenja:

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4r}}{2}} \tag{6}$$

Ako je diskriminanta jednadžbe (4) $p^2 - 4r < 0$, moramo vaditi druge korijene iz kompleksnih brojeva:

$$\frac{-p \pm \sqrt{4r - p^2}\ i}{2}, \tag{7}$$

i tada jednadžba (1) ima dva para konjugirano kompleksnih rješenja. Kasnije ćemo vidjeti da se jednadžba (1) u slučaju $p^2 - 4r < 0$ može rješiti i drugačije. Ovdje valja napomenuti da sam *izraz* $p^2 - 4r$ *nije diskriminanta jednadžbe* (1), kako bi se neupućenima učinilo. Izraz za diskriminantu jednadžbe (1) biti će dan kasnije. Kako je bikvadratna funkcija $f(x)$ u (2) parna, tj. vrijedi $f(x) = f(-x)$, onda za $\alpha$ realno

---

[1] Autor je viši predavač na Geotehničkom fakultetu u Varaždinu, e-pošta: `ploncar@gfv.hr`

rješenje jednadžbe (1), i $-\alpha$ je realno rješenje te jednadžbe. Ako je $\alpha$ čisto imaginarno rješenje jednadžbe, onda je to i $\overline{\alpha} = -\alpha$. Ako pak je $\alpha$ kompleksno rješenje jednadžbe (1), onda su to i $\overline{\alpha}$, $-\alpha$ i $-\overline{\alpha}$, te time imamo sva rješenja jednadžbe (1). Ona su u Gaussovoj kompleksnoj ravnini vrhovi jednog pravokutnika.

Raspravimo prirodu nultočaka bikvadratne jednadžbe (1). Razlikovat ćemo tri slučaja: A) točno dva realna rješenja, B) sva kompleksna rješenja i C) sva realna ili sva čisto imaginarna rješenja od (1).

A) Za $r < 0$ je $p^2 - 4r > 0$. Brojevi $t_1$ i $t_2$ iz (5) su realni i suprotnog predznaka, pa iz supstitucije (3) i iz formule (5) imamo

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4r}}{2}}$$

i

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{p + \sqrt{p^2 - 4r}}{2}}\ i$$

Jednadžba (1) ima dva realna i dva čisto imaginarna rješenja.

B) Za $p^2 - 4r < 0$ mora biti $r > 0$. U tom slučaju treba vaditi druge korijene iz kompleksnih brojeva danih u (7), pa su u ovom slučaju sva rješenja kompleksna. No, u ovom slučaju bikvadratnu jednadžbu (1) možemo riješiti i drugačije. U tu svrhu napišimo

$$x^4 + r + px^2 = (x^2 + \sqrt{r})^2 - (2\sqrt{r} - p)\ x^2 \tag{8}$$

Kako iz $p^2 - 4r < 0$ slijedi $2\sqrt{r} - p > 0$, to jednadžbu (8) možemo pisati kao razliku kvadrata od $x^2 + \sqrt{r}$ i $\sqrt{2\sqrt{r} - p}x$. Time dobijemo ovakav rastav bikvadratnog trinoma na produkt dvaju kvadratnih trinoma:

$$x^4 + px^2 + r = (x^2 - \sqrt{2\sqrt{r} - p}\ x + \sqrt{r})(x^2 + \sqrt{2\sqrt{r} - p}\ x + \sqrt{r})$$

Trebamo riješiti dvije kvadratne jednadžbe:

$$x^2 \mp \sqrt{2\sqrt{r} - p}\ x + \sqrt{r} = 0, \tag{9}$$

kojima obje diskriminante iznose $-2\sqrt{r} - p$. No, $p^2 - 4r < 0$ povlači $|p| < 2\sqrt{r}$, što opet povlači $-2\sqrt{r} - p < 0$, pa su rješenja kvadratnih jednadžbi (9) konjugirano kompleksni brojevi:

$$x_{1,2,3,4} = \frac{\pm\sqrt{2\sqrt{r} - p} \pm \sqrt{2\sqrt{r} + p}\ i}{2} \tag{10}$$

Uvjerite se da su kompleksni brojevi dobiveni u (10) drugi korijeni kompleksnih brojeva (7).

C) Ostao je još slučaj $r > 0$ i $p^2 - 4r \geq 0$. O prirodi rješenja odluku daje $p$. Ne može biti $p = 0$, pa imamo dvije mogućnosti:

C1) Za $p < 0$, $r > 0$, $p^2 - 4r \geq 0$, su $t_1$ i $t_2$ oba pozitivni. Iz supstitucije (3) i iz formule (5) imamo četiri realna rješenja:

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4r}}{2}}$$

C2) Za $p > 0$, $r > 0$, $p^2 - 4r \geq 0$, su $t_1$ i $t_2$ oba negativni. Iz supstitucije (3) i iz formule (5) imamo četiri čisto imaginarna rješenja:

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{p \mp \sqrt{p^2 - 4r}}{2}}\; i$$

**Napomena 1.** Može se pokazati da je diskriminanta $D$ bikvadratne jednadžbe (1):

$$D = 16r\,(p^2 - 4r)^2 \tag{11}$$

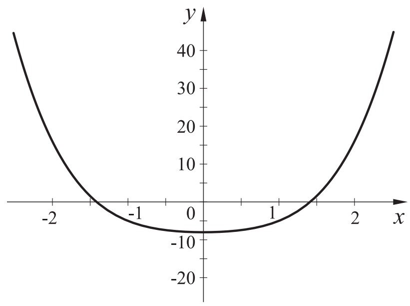
Ako je $p^2 - 4r \neq 0$, predznak od $D$ je jednak predznaku od $r$. Iz teorije o diskriminanti zna se da jednadžba (1) ima podudarna rješenja ako i samo ako je $D = 0$. Podudarna rješenja mogu biti dvostruko realno, dva para dvostrukih (realnih ili čisto imaginarnih) ili četverostruko realno rješenje. Podudarna rješenja javljaju se (vidjeti formulu (11)) kada je $r = 0$ ili kada je $p^2 - 4r = 0$. Ako je $r = 0$, jednadžba (1) ima 0 kao dvostruku realnu nultočku i još dvije čisto imaginarne nultočke za $p > 0$ (slučaj A), a dvije realne za $p \leq 0$ (slučaj C1)). Četverostruku realnu nultočku $x = 0$ imamo jedino za $r = 0$ i $p = 0$ (slučaj C1)). U slučaju $p^2 - 4r = 0$ bikvadratna jednadžba (1) glasi $\left(x^2 + \frac{p}{2}\right)^2 = 0$ (slučajevi C1) i C2)). Nađite njena rješenja!

**Napomena 2.** Iz formule (11) izlazi da je $D < 0$ onda i samo onda kada je $r < 0$. Iz gornje rasprave vidimo da je $D < 0$ samo u slučaju A). Dakle, $D < 0$ tada i samo tada kada bikvadratna jednadžba (1) ima dva realna različita i dva čisto imaginarna rješenja, koja su konjugirano kompleksna. Preciznije, bikvadratna jednadžba ima dva realna i dva čisto imaginarna rješenja onda i samo onda ako je $r < 0$ ili $(r = 0$ i $p > 0)$. Sva su rješenja bikvadratne jednadžbe realna i različita ili sva su rješenja kompleksna i različita onda i samo onda ako je $D > 0$. U slučaju $D > 0$ diskriminanta $D$ sama ne daje odluku o prirodi rješenja bikvadratne jednadžbe! Iz gore navedenog ipak imamo da su sva su četiri rješenja jednadžbe (1) realna ako i samo ako je $p \leq 0$, $r \geq 0$, $p^2 - 4r \geq 0$. Finijom analizom može se pokazati da jednadžba (1) ima četiri realna različita rješenja onda i samo onda ako je $p < 0$, $r > 0$, $p^2 - 4r > 0$. Sva su četiri rješenja kompleksna ako i samo ako je $p^2 - 4r < 0$ (i stoga $r > 0$) ili $(r > 0$ i $p \geq 0)$. *Ako su rješenja sva kompleksna, mora biti* $r > 0$.

## Grafovi bikvadratne funkcije

Opišimo i nacrtajmo grafove bikvadratne funkcije (2). *Rješenja jednadžbe* (1) *su sjecišta grafa bikvadratne funkcije* (2) *s osi* $x$. *Zbog parnosti funkcije* $f(x)$ *os* $y$ *je os simetrije grafa funkcije* $f(x)$. Graf bikvadratne funkcije (2) ima uvijek jedan globalni (i ujedno lokalni) minimum u kojem bikvadratna funkcija poprima najmanju vrijednost. Oblik grafa bikvadratne funkcije ovisi o broju njenih ekstrema i broju točaka infleksije, a to ovisi od $p$. Imamo ove tipove grafova:

I) Za $p > 0$ su funkcije $x^4 + q$ i $px^2$ obje strogo rastuće za $x \geq 0$, pa je takav i njihov zbroj $f(x)$. Kako je funkcija $f(x)$ parna, za $x \leq 0$ funkcija $f(x)$ je strogo padajuća. Stoga za sve realne $x$ vrijedi $f(x) \geq f(0)$, pa u $x = 0$ funkcija $f(x)$ poprima najmanju vrijednost $f(0) = r$. Točka $x = 0$ je globalni i lokalni minimum funkcije $f(x)$. Vidimo da bikvadratna funkcija ima točno jedan ekstrem za $x = 0$. Sada je lako predočiti si graf takve bikvadratne funkcije.




*Slika 1.*

Jedan primjer, graf od $f(x) = x^4 + 2x^2 - 8$, je na slici 1. Njegove realne nultočke su (vidjeti slučaj A)) $\pm\sqrt{2}$, a kompleksne $\pm 2i$. Pomičemo li vertikalno graf na slici 1 (mijenjamo $r$) vidimo da on siječe os $x$ u dvije realne nultočke ako je $r < 0$, $p > 0$, a dodiruje os $x$ u točki $x = 0$ ako je $r = 0$ i $p > 0$ (i tada jednadžba (1) ima dva podudarna realna rješenja $x = 0$, a ostala dva su čisto imaginarna). Graf bikvadratne funkcije ne siječe os $x$, ako je $r > 0$ i $p > 0$, i tada imamo četiri kompleksna rješenja. Graf tipa I) ima čisto imaginarna podudarna rješenja za $p^2 - 4r = 0$. *U slučaju $p > 0$ jednadžba (1) ne može imati četiri realne nultočke.*

II) Za $p = 0$ grafovi su kao u slučaju I), osim u slučaju $p = 0$ i $r = 0$, kada imamo četverostruku realnu nultočku $x = 0$. Slučaj $p = 0$ i $r = 0$ je jedini u kojem jednadžba (1) ima četverostruku realnu nultočku $x = 0$.

III) Uzmimo da je $p < 0$. Vrijedi:

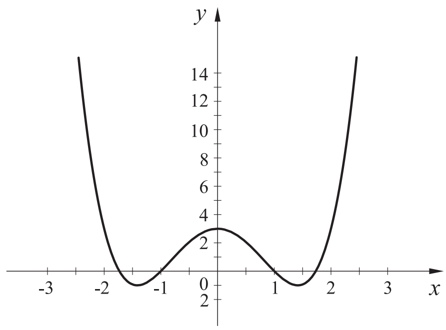
$$x^4 + px^2 + r = \left(x^2 + \frac{p}{2}\right)^2 + r - \frac{p^2}{4} \geq -\frac{p^2 - 4r}{4}$$

pri čemu se jednakosti dostižu za $x^2 + \dfrac{p}{2} = 0$, tj. u točkama $\pm\sqrt{-\dfrac{p}{2}}$, koje su lokalni (i globalni) minimumi. U njima bikvadratna funkcija postiže istu najmanju vrijednost $r - \dfrac{p^2}{4} = -\dfrac{p^2 - 4r}{4}$. A što je s točkom $x = 0$? Uzmimo da je $x$ po apsolutnoj vrijednosti veoma maleno i veoma blizu 0. Za takve $x$, zbog $x^2 + p < 0$, imamo

$$x^4 + px^2 + r = x^2(x^2 + p) + r \leq r.$$

Time je $x = 0$ ipak lokalni maksimum, ali nije najveća vrijednost, jer za velike po apsolutnoj vrijednosti $x$ je $f(x)$ po volji veliko. Graf bikvadratne funkcije u slučaju $p < 0$ ima tri ekstrema $-\sqrt{-\dfrac{p}{2}}$, 0 i $\sqrt{-\dfrac{p}{2}}$. Između točaka susjednog lokalnog minimuma i lokalnog maksimuma nalazi se, kao što je poznato, točka kose infleksije, u kojoj $f(x)$ mijenja konveksnost u konkavnost ili obratno. Graf bikvadratne funkcije za

$p < 0$ zato ima dvije točke kose infleksije u točkama $\pm\sqrt{-\frac{p}{6}}$. Vidite primjer grafa od $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ na slici 2.




*Slika 2.*

Nultočke od $f(x)$ su $\pm 1$ i $\pm\sqrt{3}$ (vidjeti formulu za rješenja u slučaju C1)). Translatiramo li gornji graf u smjeru osi $y$ (mijenjamo $r$), vidimo da u slučaju $p < 0$ graf bikvadratne funkcije može siječi os $x$ ili dva puta ili četiri puta ili nijednom. Ako su svi ekstremi ispod osi $x$, graf siječe os $x$ dva puta, pa imamo dva realna i dva kompleksna rješenja. To je onda ako je $r < 0$ i $p < 0$ (i time $p^2 - 4r > 0$). Jedan takav slučaj bio bi graf funkcije $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$, koji nije nacrtan i kojemu su nultočke $\pm\sqrt{3}$ i $\pm i$ (vidjeti slučaj A)). Graf bikvadratne funkcije siječe os $x$ četiri puta (četiri realna različita rješenja) jedino u slučaju da su susjedni ekstremi s raznih strana osi $x$, tj. da je $-\frac{p^2 - 4r}{4} < 0 < r$. To nastupa *onda i samo onda* ako je $r > 0$, $p^2 - 4r > 0$, $p < 0$ (slučaj C1)). Upravo taj slučaj, graf od $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$, prikazan je na slici 2. Točka ekstrema $x = 0$ funkcije $f(x) = x^4 - 4x^2$ dodiruje os $x$, pa je $x = 0$ dvostruko rješenje. Točke ekstrema $x = \pm\sqrt{2}$ funkcije $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ dodiruju os $x$, pa su oba rješenja $\pm\sqrt{2}$ dvostruka. U obje funkcije je $D = 0$, i sva su rješenja realna. Nacrtajte te grafove. Ako su svi ekstremi bikvadratne funkcije (2) iznad osi $x$, graf te funkcije ne siječe os $x$, i tada imamo četiri različita kompleksna rješenja. To će se u tipu III) grafa desiti ako je $-\frac{p^2 - 4r}{4} > 0$ tj. ako je $p^2 - 4r < 0$ (i stoga $r > 0$). Nacrtajte sami taj slučaj uzevši $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$. Iste rezultate o prirodi rješenja bikvadratne jednadžbe (1) dobili smo na kraju prvog paragrafa o nultočkama.

Na kraju kažimo da se više o o rješavanju (u radikalima, o grafičkom i o numeričkom) opće jednadžbe četvrtog stupnja u potisnutom obliku

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

može naći u poučnoj knjizi (1).

## Literatura


[1] BORIS PAVKOVIĆ, BRANIMIR DAKIĆ, *Polinomi*, Drugo izdanje, Školska knjiga, Zagreb 1988.