Osječki matematički list 19 (2019), 1–14

Beskonačne i konačne formulacije matematičkih rezultata

Vjekoslav Kovač*

Sažetak

Ovaj rad diskutira raznovrsne trikove kojima se beskonačna formulacija nekog problema može svesti na konačnu i obratno. Predstavljeni primjeri su poznati problemi iz aritmetičke kombinatorike i euklidske geometrije, dok predstavljene tehnike dolaze iz matematičke analize i matematičke logike.

Ključne riječi: *aritmetička progresija, gustoća skupa, pakiranje sfera, gustoća pakiranja, bojenje ravnine, kromatski broj.*

Infinitary and finitary formulations of mathematical results

Abstract

This paper discusses various tricks used to reduce an infinitary formulation of a problem to a finitary one, and vice versa. The presented examples are famous problems from arithmetic combinatorics and the Euclidean geometry, while the presented techniques come from mathematical analysis and mathematical logic.

Keywords: *arithmetic progression, set density, sphere packing, packing density, plane coloring, chromatic number.*

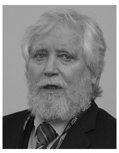
*Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: vjekovac@math.hr

1 Uvod

Čest je slučaj u matematici da isti rezultat ili otvoreni problem ima dvije formulacije: *beskonačnu*, koja se tiče neke beskonačne matematičke strukture, i *konačnu*, koja je izražena pomoću njezinih konačnih ili ograničenih podstruktura. Ovdje ćemo izložiti ideje kojima se ponekad može pokazati da su takve dvije formulacije međusobne ekvivalentne. U tu će nam svrhu poslužiti tri zanimljiva i povijesno važna primjera. U svakom od njih pokazat ćemo da „beskonačna tvrdnja" i odgovarajuća „konačna tvrdnja" impliciraju jedna drugu, bez da uopće pokušamo dokazati neku od njih. Naime, u primjerima koji slijede te tvrdnje su ili vrlo teški teoremi (kojima se mogu posvetiti čitavi kursevi i knjige) ili do danas otvoreni istraživački problemi.

Ovaj članak je nastao na temelju jednog autorovog predavanja u sklopu fakultativnog predmeta *Studentska natjecanja iz matematike*, koji se izvodi na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

2 Szemerédijev teorem



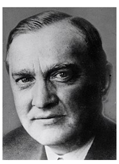
Endre Szemerédi (1940.), mađarsko-američki matematičar koji se najviše bavi kombinatorikom. Dobitnik je Pólyine nagrade 1975. godine, Steeleove nagrade 2008. godine i Abelove nagrade 2012. godine.

Naredni rezultat je jedno od najspektakularnijih dostignuća kombinatorike cijelih brojeva. Kao pitanje su ga postavili Erdős i Turán [6], a odgovor je prvi dao Szemerédi [14], tek četrdesetak godina kasnije.

Gustoća skupa $A \subseteq \mathbb{N}$ je broj

$$\varrho(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1,2,\ldots,n\}|}{n}, \tag{1}$$

pri čemu $|S|$ naprosto označava broj elemenata konačnog skupa $S \subseteq \mathbb{N}$. Tako je, naprimjer, gustoća skupa parnih brojeva jednaka $1/2$, a može se pokazati da su gustoće skupa potpunih kvadrata i skupa prostih brojeva jednake 0. Općenito gustoća nekog skupa ne mora postojati, jer pripadni niz ne mora konvergirati. Ako se u gornjoj formuli limes zamijeni limesom superiorom, tada govorimo o *gornjoj gustoći* skupa A, koju pišemo $\overline{\varrho}(A)$. Njezina je prednost što je uvijek dobro definirana. Štoviše, uvodi se još suptilniji pojam *gornje Banachove gustoće* skupa $A \subseteq \mathbb{N}$ kao broj $\overline{\varrho}_{\mathrm{Ban}}(A) \in [0,1]$ dan sa



Stefan Banach (1892.–1945.), poljski matematičar koji je utemeljio funkcionalnu analizu. Smatra ga se jednim od najvažnijih matematičara 20. stoljeća.

$$\overline{\varrho}_{\mathrm{Ban}}(A) := \limsup_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{|A \cap \{m, m+1, \ldots, m+n-1\}|}{n}. \tag{2}$$

Čim skup A ima gustoću, odmah je jasno da vrijedi

$$\varrho(A) = \overline{\varrho}(A) \leq \overline{\varrho}_{\mathrm{Ban}}(A).$$

Skupovi pozitivne gustoće „zauzimaju" izvjesni udio prirodnih brojeva pa očekujemo da ćemo u njima vidjeti razne „uzorke". Najjednostavniji uzorak je *aritmetička progresija* ili *konačni aritmetički niz* u skupu $\mathbb{N}$, a definira se kao k-torka brojeva

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+(k-1)d$$

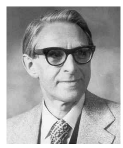
za neke $a, d, k \in \mathbb{N}$. Broj k je *duljina* gornje progresije. Za fiksirani $k \in \mathbb{N}$ označimo s $r_k(n)$ broj elemenata najvećeg skupa $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ koji ne sadrži aritmetičku progresiju duljine k. Prisjetimo se da pišemo $f(n) = o(g(n))$ kada $n \to \infty$ ako vrijedi $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 0$.

Teorem 2.1. *Neka je $k \geq 3$ prirodan broj. Sljedeće dvije tvrdnje su ekvivalentne.*

> Beskonačna formulacija (SzB): *Ako skup $A \subseteq \mathbb{N}$ zadovoljava $\overline{\varrho}_{\mathrm{Ban}}(A) > 0$, tada on sadrži aritmetičku progresiju duljine k.*
>
> Konačna formulacija (SzK): *Vrijedi $r_k(n) = o(n)$ kada $n \to \infty$.*

Kao što smo već bili najavili, tvrdnje (SzB) i (SzK) su dvije formulacije *Szemerédijevog teorema*. Nađeni su mu brojni dokazi, ali baš svi su vrlo teški i iziskuju neelementarne ideje. Mi ćemo se zadovoljiti time da pokažemo ekvivalenciju tvrdnji (SzB) i (SzK).

Očigledno uvjet $\overline{\varrho}(A) > 0$ implicira $\overline{\varrho}_{\mathrm{Ban}}(A) > 0$, a lako je uvjeriti se da obrat ne mora vrijediti. Radi toga je formulacija Szemerédijevog teorema navedena pod (SzB) jača od analogne formulacije pomoću gornje gustoće, koja se često javlja u literaturi. Tvrdnje (SzB) i (SzK) postaju netrivijalne već za $k = 3$ i taj posebni slučaj naziva se *Rothov teorem* [12]; o njemu je bilo riječi u jednom od prethodnih brojeva ovog časopisa [2]. Napomenimo kako i skupovi gornje Banachove gustoće 0 mogu sadržavati po volji duge aritmetičke progresije, premda Szemerédijev teorem o njima ne govori. Naprimjer, Green i Tao [7] su dokazali da isto vrijedi za skup prostih brojeva.



Klaus Friedrich Roth (1925.–2015.), britanski matematičar koji se bavio kombinatorikom i teorijom brojeva. Dobitnik je Fieldsove medalje 1958. godine i Sylvesterove medalje 1991. godine.

Dokaz teorema 2.1. Najprije dokazujemo (SzK) $\Longrightarrow$ (SzB). Neka su $A \subseteq \mathbb{N}$ skup i δ broj takvi da vrijedi $0 < \delta < \overline{\varrho}_{\mathrm{Ban}}(A)$. Radi pretpostavke $\lim_{n\to\infty} r_k(n)/n = 0$ znamo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $r_k(n) \leq \delta n$. Nadalje, po definiciji gornje Banachove gustoće (2) i definiciji limesa superiora, postoje $n \geq n_0$ i $m \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$|A \cap \{m, m+1, \ldots, m+n-1\}| > \delta n.$$

Promotrimo skup

$$B := (A \cap \{m, m+1, \ldots, m+n-1\}) - m + 1,$$

tj. skup $A \cap \{m, m+1, \ldots, m+n-1\}$ translatiran za $m-1$ ulijevo. On je podskup od $\{1, 2, \ldots, n\}$ i ima više od $\delta n \geq r_k(n)$ elemenata pa mora sadržavati aritmetičku progresiju duljine k, ali to znači da A sadrži kopiju te progresije dobivenu pomakom za $m-1$.

Sada prelazimo na dokaz obratne implikacije, (SzB) $\Longrightarrow$ (SzK). Pretpostavimo da ne vrijedi tvrdnja (SzK), što znači da postoje $\varepsilon > 0$ i strogo rastući niz $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ u $\mathbb{N}$ takvi da je $r_k(n_j) \geq \varepsilon n_j$ za svaki $j \in \mathbb{N}$. Nadalje, po definiciji broja $r_k(n_j)$ može se naći skup $B_j \subseteq \{1, 2, \ldots, n_j\}$ takav da je $|B_j| \geq \varepsilon n_j$ i da B_j ne sadrži aritmetičku progresiju duljine k. Rekurzivno zadajmo niz brojeva $(m_j)_{j=1}^{\infty}$ kao

$$m_1 = 0, \quad m_j = 2m_{j-1} + 2n_{j-1} \quad \text{za } j \geq 2.$$

Konačno definirajmo

$$A := \bigcup_{j=1}^{\infty} (B_j + m_j).$$

Brojeve m_j smo odabrali da rastu dovoljno brzo kako ne bi postojala progresija duljine 3 u skupu A koja bi sjekla barem dva različita skupa $B_j + m_j$. Po konstrukciji skupova B_j zaključujemo da A uopće ne sadrži aritmetičku progresiju duljine k. S druge strane, za svaki $j \in \mathbb{N}$ imamo

$$|A \cap \{m_j + 1, m_j + 2, \ldots, m_j + n_j\}| = |B_j + m_j| = |B_j| \geq \varepsilon n_j$$

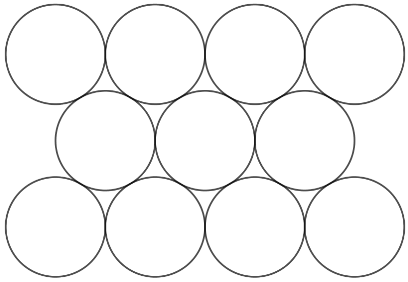
pa je $\overline{\varrho}_{\mathrm{Ban}}(A) \geq \varepsilon > 0$, što vodi na kontradikciju s pretpostavkom (SzB). $\square$

3 Pakiranja kugala

Euklidski prostor $\mathbb{R}^d$ želimo što ekonomičnije popuniti kuglama polumjera 1. Primjer jednog vrlo ekonomičnog popunjavanja u dvije dimenzije skiciran je na slici 1. Prije svega, pojasnimo što mislimo pod „popunjavanjem" i kako se mjeri njegova gustoća. U ovom će nam odjeljku $|S|$ označavati d-dimenzionalni volumen skupa $S \subseteq \mathbb{R}^d$.

Pakiranje kugala u skup $S \subseteq \mathbb{R}^d$ je svaki skup $P \subseteq S$ koji je unija kugala jediničnog polumjera s međusobno disjunktnim nutrinama; kolekciju svih takvih pakiranja P označit ćemo $\mathrm{Pak}(S)$. Vezano uz izbor $S = [0, r]^d$, $r > 0$, definiramo

$$p([0,r]^d) := \max_{P \in \mathrm{Pak}([0,r]^d)} \frac{|P|}{r^d}, \tag{3}$$



Slika 1: Primjer pakiranja krugova u $\mathbb{R}^2$.

tj. $p([0,r]^d)$ je najveća gustoća pakiranja kugala u kocku $[0,r]^d$. Navedeni maksimum doista postoji, tj. postiže se, naprosto zato što postoji neki najveći broj kugala koje se mogu „smjestiti" u $[0,r]^d$. S druge strane, vezano uz izbor $S = \mathbb{R}^d$, za pakiranje kugala u cijeli prostor ima smisla gledati njegovu *gustoću*, definiranu sa

$$\varrho(P) := \lim_{s\to\infty} \frac{|P \cap [-s,s]^d|}{(2s)^d}. \tag{4}$$

(Primijetite analogiju s veličinom $\varrho(A)$ iz (1).) Označimo s $\mathrm{Pak}^*(\mathbb{R}^d)$ kolekciju svih pakiranja kugala u $\mathbb{R}^d$ koja imaju dobro definiranu gustoću, tj. za koja postoji gornji limes.

Teorem 3.1. *Za svaki $d \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\lim_{r\to\infty} p([0,r]^d) = \sup_{r\in\langle 0,\infty\rangle} p([0,r]^d) = \max_{P\in\mathrm{Pak}^*(\mathbb{R}^d)} \varrho(P).$$

Pritom se ujedno tvrdi da navedeni limes i maksimum doista postoje.

Direktna posljedica teorema 3.1 je sljedeća veza gustoće optimalnog pakiranja kugala u cijeli prostor $\mathbb{R}^d$ i asimptotike gustoća optimalnih pakiranja kugala u kocke $[0,r]^d$ kada $r \to \infty$.

Korolar 3.1. *Za $d \in \mathbb{N}$ i $\alpha \in [0,1]$ sljedeće dvije tvrdnje su ekvivalentne.*

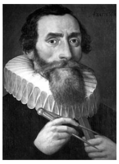
Beskonačna formulacija (PakB): *Svako pakiranje iz* $\mathrm{Pak}^*(\mathbb{R}^d)$ *ima gustoću najviše α i postoji pakiranje u* $\mathrm{Pak}^*(\mathbb{R}^d)$ *gustoće točno jednake α.*

Konačna formulacija (PakK): $\lim_{r\to\infty} p([0,r]^d) = \alpha$.

Broj α za koji vrijedi tvrdnja (PakB) možemo zvati *konstanta pakiranja kugala* za prostor $\mathbb{R}^d$ i označavati $p(\mathbb{R}^d)$. Teorem 3.1 garantira da taj broj uvijek postoji, a korolar 3.1 kaže da bismo ga, makar samo teoretski, mogli računati kao

$$p(\mathbb{R}^d) = \lim_{r\to\infty} p([0,r]^d).$$

Prirodno je zapitati se koliko zapravo iznosi $p(\mathbb{R}^d)$ za danu dimenziju d. To je vrlo težak problem i odgovor je poznat samo u sljedećim dimenzijama:



Johannes Kepler (1571.–1630.), njemački astronom i matematičar. Dao je prve vjerodostojne zakone gibanja planeta.

- $d = 1$, kada je $p(\mathbb{R}) = 1$;
- $d = 2$, kada je $p(\mathbb{R}^2) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.9069$, a optimalno pakiranje prikazano je na slici 1;
- $d = 3$, kada je $p(\mathbb{R}^3) = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.7405$, što je bilo poznato kao *Keplerova slutnja* , a dokazao ju je Hales [9];
- $d = 8$, kada je $p(\mathbb{R}^8) = \frac{\pi^4}{2^4 4!} \approx 0.2537$, što je dokazala Viazovska [17];
- $d = 24$, kada je $p(\mathbb{R}^{24}) = \frac{\pi^{12}}{12!} \approx 0.0019$, što su dokazali Cohn, Kumar, Miller, Radchenko i Viazovska [4].

Primjeri pakiranja koja daju gornje konstante očigledni su u dimenzijama $d = 1, 2, 3$. Npr. u $\mathbb{R}^3$ možemo zamisliti da u kutiju slažemo naranče.

U dokazu teorema 3.1 koristit će nam sljedeći rezultat Silvermana [13] i Toeplitza [16], čiji pak dokaz zahtijeva samo osnovno znanje matematičke analize, a može se naći npr. u knjigama [1] i [5].

Teorem 3.2 (Silverman-Toeplitzov teorem). *Neka je $(a_{m,n})_{m,n=1}^{\infty}$ beskonačna matrica realnih brojeva koja ima sljedeća svojstva:*

- $\lim_{m\to\infty} a_{m,n} = 0$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$,
- $\sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| < \infty$,
- $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = 1$.

Ako je $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentni niz realnih brojeva, tada konvergira i niz $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ zadan sa

$$y_m := \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} x_n \quad \textit{za svaki } m \in \mathbb{N}$$

te vrijedi $\lim_{m\to\infty} y_m = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Dokaz teorema 3.1. Označimo:

$$\beta := \sup_{r\in\langle 0,\infty\rangle} p([0,r]^d)$$

i najprije dokažimo da vrijedi

$$\lim_{r\to\infty} p([0,r]^d) = \beta. \tag{5}$$

Za svaki ε takav da je $0 < \varepsilon < \beta$ postoje $r_\varepsilon > 0$ i pakiranje kugala P_ε u kocku $[0,r_\varepsilon]^d$ volumena većeg od $(\beta - \varepsilon/2)r_\varepsilon^d$. Za bilo koji $k \in \mathbb{N}$ kocku $[0,kr_\varepsilon]^d$ možemo podijeliti na k^d kongruentnih manjih kocaka. Svaku od njih možemo pakirati translatom od P_ε te unija svih tih pakiranja daje pakiranje od $[0,kr_\varepsilon]^d$ volumena većeg od $(\beta-\varepsilon/2)k^d r_\varepsilon^d$. Za bilo koji $r \geq r_\varepsilon$ i jedinstveni $k \in \mathbb{N}$ takav da je $kr_\varepsilon \leq r < (k+1)r_\varepsilon$ sada imamo

$$p([0,r]^d) > \frac{(\beta-\varepsilon/2)k^d r_\varepsilon^d}{(k+1)^d r_\varepsilon^d} = \Big(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big(1 - \frac{1}{k+1}\Big)^d.$$

Ako je $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ dovoljno velik da vrijedi

$$\Big(1 - \frac{1}{k_\varepsilon + 1}\Big)^d \geq \frac{\beta - \varepsilon}{\beta - \varepsilon/2},$$

tada za svaki $r \geq k_\varepsilon r_\varepsilon$ imamo

$$\beta - \varepsilon < p([0,r]^d) \leq \beta.$$

Time je dokazano (5).

Sada pokažimo da je

$$\varrho(P) \leq \beta \quad \text{za svako pakiranje } P \in \mathrm{Pak}^*(\mathbb{R}^d). \tag{6}$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji pakiranje kugala P u $\mathbb{R}^d$ takvo da je $\varrho(P) > \beta$ te označimo $\delta := (\varrho(P) - \beta)/2 > 0$. Po definiciji gustoće pakiranja (4) postoji $s_0 > 0$ takav da za svaki $s \geq s_0$ vrijedi

$$\frac{|P \cap [-s,s]^d|}{(2s)^d} > \varrho(P) - \delta = \beta + \delta. \tag{7}$$

Odaberimo $s \geq \max\{s_0, 2\}$ dovoljno velik da vrijedi i

$$\Big(1 - \frac{2}{s}\Big)^d > 1 - \delta. \tag{8}$$

Sada promotrimo sve kugle pakiranja P koje se cijele nalaze u $[-s,s]^d$ i označimo njihovu uniju s P'. Sve točke iz $P\cap[-s,s]^d$ koje nisu u P' udaljene su za manje od 2 od ruba kocke $[-s,s]^d$, tj.

$$(P\cap[-s,s]^d)\setminus P' \subseteq [-s,s]^d\setminus[-(s-2),s-2]^d,$$

što nam daje

$$|P\cap[-s,s]^d| - |P'| \le (2s)^d - (2s-4)^d.$$

Translacijom možemo P' pretvoriti u pakiranje kugala u kocku $[0,2s]^d$ pa smo dobili

$$p([0,2s]^d) \ge \frac{|P'|}{(2s)^d} \ge \frac{|P\cap[-s,s]^d|}{(2s)^d} - \Big(1-\Big(1-\frac{2}{s}\Big)^d\Big),$$

a radi (7) i (8) konačno imamo $p([0,2s]^d) > \beta$. To vodi na kontradikciju s definicijom broja β i dokazuje (6).

Još jedino trebamo naći pakiranje $P\in\mathrm{Pak}^*(\mathbb{R}^d)$ gustoće točno β. Tvrdnja je trivijalna u dimenziji $d=1$ pa u daljnjem pretpostavimo $d\ge 2$. Za svaki $n\ge 2$ uzmimo pakiranje kugala P_n u kocku $[0,n]^d$ koje postiže maksimum iz definicije (3) broja $p([0,n]^d)$. Prostorne „pojaseve“

$$\mathbb{R}^{d-1}\times\Big[\frac{(n-1)n}{2},\frac{n(n+1)}{2}\Big] \quad \text{i} \quad \mathbb{R}^{d-1}\times\Big[-\frac{n(n+1)}{2},-\frac{(n-1)n}{2}\Big]$$

možemo „zazidati“ translatima kocke $[0,n]^d$, a uniju odgovarajućih translata od P_n označimo $\widetilde{P}_n$. Konačno definirajmo $P:=\bigcup_{n=2}^{\infty}\widetilde{P}_n$. Tvrdimo da je $\varrho(P)=\beta$. Za bilo koji $s\ge 1$ neka je $m\in\mathbb{N}$, $m\ge 2$, jedinstveni broj takav da je

$$\frac{(m-1)m}{2} \le s < \frac{m(m+1)}{2}. \tag{9}$$

Svakako imamo

$$2\sum_{n=2}^{m-1}\Big(\frac{2s}{n}-1\Big)^{d-1}|P_n| \le |P\cap[-s,s]^d| \le 2\sum_{n=2}^{m}\Big(\frac{2s}{n}+1\Big)^{d-1}|P_n|.$$

Kako je $p([0,n]^d)=|P_n|/n^d$ to se može zapisati

$$\sum_{n=2}^{m-1}\frac{n}{s}\Big(1-\frac{n}{2s}\Big)^{d-1}p([0,n]^d) \le \frac{|P\cap[-s,s]^d|}{(2s)^d} \le \sum_{n=2}^{m}\frac{n}{s}\Big(1+\frac{n}{2s}\Big)^{d-1}p([0,n]^d),$$

a potom primjenom (9) slijedi da se $|P\cap[-s,s]^d|/(2s)^d$ nalazi između

$$\Big(1-\frac{1}{m}\Big)^{d-1}\sum_{n=2}^{m-1}\frac{2n}{m(m+1)}p([0,n]^d)$$

i

$$\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{d-1}\sum_{n=2}^{m}\frac{2n}{(m-1)m}p([0,n]^d).$$

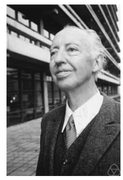
Upotrebom teorema 3.2 i dokazane činjenice (5) lako vidimo da oba ta izraza konvergiraju prema β kada $s \to \infty$, što radi (9) ujedno znači da $m \to \infty$. Po teoremu o sendviču zaključujemo

$$\lim_{s\to\infty}\frac{|P\cap[-s,s]^d|}{(2s)^d}=\beta,$$

što smo i trebali pokazati. □

4 Kromatski broj ravnine

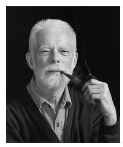
Sljedeći poznati otvoreni problem pripisuje se matematičarima Hadwigeru i Nelsonu.



Hugo Hadwiger (1908.–1981.), švicarski matematičar. Bavio se geometrijom, kombinatorikom i kriptografijom.

> *Koji najmanji broj boja je potreban za bojenje svih točaka ravnine tako da svake dvije točke udaljene točno za* 1 *imaju različite boje?*

Nije teško primjerom pokazati da je 7 boja dovoljno; pogledajte sliku 2. Tek nedavno je de Grey [8] pokazao da je zapravo nužno koristiti barem 5 boja. Ako ravninu $\mathbb{R}^2$ shvatimo kao jednostavni neusmjereni (ali beskonačni) graf čiji vrhovi su upravo njezine točke, a dva vrha su spojena bridom ako i samo ako su pripadne točke udaljene za 1, tada traženi broj možemo nazvati *kromatski broj ravnine* i označavati $\chi(\mathbb{R}^2)$. Svaki konačni skup točaka $S \subseteq \mathbb{R}^2$ inducira njegov podgraf: opet su dvije točke spojene bridom ako i samo ako su na međusobnoj udaljenosti 1. Najmanji broj boja potreban za njegovo bojenje pišemo $\chi(S)$.



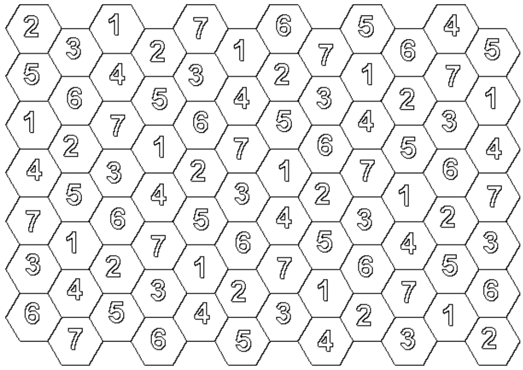
Edward Nelson (1932.–2014.), američki matematičar. Bavio se matematičkom fizikom i matematičkom logikom

Sljedeći teorem dokazali su de Bruijn i Erdős [3] i to u nešto većoj općenitosti nego što je nama potrebna.

Teorem 4.1 (de Bruijn-Erdősov teorem). *Za $k \in \mathbb{N}$ sljedeće dvije tvrdnje su ekvivalentne.*

Aubrey David Nicholas Jasper de Grey (1963.), britanski biolog i pisac.

> Beskonačna formulacija (KrB): $\chi(\mathbb{R}^2) \le k$, *tj. ravnina se može „pravilno" obojiti u k boja.*
>
> Konačna formulacija (KrK): *Za svaki konačni skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ vrijedi $\chi(S) \le k$, tj. svaki konačni podskup ravnine S se može „pravilno" obojiti u k boja.*



Slika 2: Pravilno bojenje ravnine u 7 boja. Pravilni šesterokuti na slici imaju stranice duljine 0.499. Nije važno kako su obojeni njihovi rubovi, dokle god je to učinjeno na konzistentan način.

Posljedica teorema 4.1 je

$$\chi(\mathbb{R}^2) = \max\{\chi(S) : S \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ konačan}\}.$$

Zapravo je de Grey u članku [8] pokazao $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 5$ upravo tako što je u ravnini konstruirao skup S od 1585 točaka za koji vrijedi $\chi(S) = 5$. Ekvivalencija (KrB)$\Longleftrightarrow$(KrK) mu je dala metodološku podlogu za istraživanje: ako je doista $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 5$ tada se to u teoriji moralo moći dokazati nalaženjem (dovoljno velikog) konačnog podgrafa S za kojeg je $\chi(S) \geq 5$.

Začudo, dokaz teorema 4.1 počiva na matematičkoj logici i teoriji skupova. Zato ćemo se prije njegovog dokaza morati prisjetiti logike sudova. Alfabet logike sudova sastoji se od skupa propozicionalnih varijabli $\mathcal{P}$, skupa logičkih veznika $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ i zagrada. Rekurzivno se definiraju formule logike sudova (vidjeti skriptu [18]), to su simbolički izrazi poput

$$(A \wedge B) \rightarrow \big(B \vee (\neg C \leftrightarrow A)\big)$$

za $A, B, C \in \mathcal{P}$. Semantičko značenje im pridaje tek interpretacija, a to je svaka funkcija $I \colon \mathcal{P} \rightarrow \{\text{„laž“}, \text{„istina“}\}$. Vrijednost interpretacije I na pojedinoj formuli F je opet „laž“ ili „istina“, a definira se rekurzivno, prema uobičajenim pravilima za logičke veznike (opet vidjeti [18]). Za skup formula $\mathcal{F}$ kažemo da je *ispunjiv* ako postoji interpretacija I takva da za svaku formulu $F \in \mathcal{F}$ vrijedi $I(F) = \text{„istina“}$. *Teorem kompaktnosti logike sudova* glasi:

Ako je ispunjiv svaki konačni podskup od $\mathcal{F}$, tada je ispunjiv i cijeli $\mathcal{F}$.

Njegov dokaz se može naći u skripti [18], pri čemu treba imati na umu da nama skup propozicionalnih varijabli ne mora biti prebrojiv. U dokazu se nužno koristi aksiom izbora.

Dokaz teorema 4.1. Dokazujemo samo implikaciju (KrK) $\Longrightarrow$ (KrB), jer je obrat trivijalan. Neka je dan k-člani skup boja, kojeg, radi jednostavnosti, poistovjećujemo s $\{1, 2, \ldots, k\}$. Za skup propozicionalnih varijabli uzimamo $\mathcal{P} := \mathbb{R}^2 \times \{1, 2, \ldots, k\}$, tj. skup svih parova $(\text{točka}, \text{boja})$. Zapišimo sada jezikom logike sudova činjenicu da je bojenje pravilno:

- $(T, 1) \vee (T, 2) \vee \cdots \vee (T, k)$ za svaku točku $T \in \mathbb{R}^2$, što čitamo: „točka T je obojena nekom od boja $1, 2, \ldots, k$“;
- $\neg\big((T, i) \wedge (T, j)\big)$ za svaku točku $T \in \mathbb{R}^2$ i svake međusobno različite $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, što čitamo: „nije tako da točka T istovremeno ima boje i i j“;
- $\neg\big((T_1, i) \wedge (T_2, i)\big)$ za svake točke $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^2$ međusobno udaljene za 1 i svaki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, što čitamo: „nije tako da točke T_1 i T_2 na međusobnoj udaljenosti 1 imaju istu boju i“.

Ako nađemo interpretaciju I koja sve gornje formule evaluira u „istina“, tada ćemo točku T obojiti bojom i ako i samo ako je $I((T, i)) =$ „istina“. Svaki konačni podskup gornjeg skupa formula tiče se samo nekog konačnog skupa točaka ravnine S pa je on ispunjiv po pretpostavci (KrK). Korištenjem teorema kompaktnosti logike sudova slijedi da je ispunjiv i skup svih gornjih formula, a to je upravo ono što smo trebali. $\square$

U članku [11] izložene su neke varijante problema bojenja ravnine te su dane daljnje poveznice na literaturu.

5 Zadaci za vježbu

Čitatelju ostavljamo nekoliko zadataka na kojima može isprobati naučene tehnike, ali i samostalno otkriti nove trikove.

Zadatak 1. Neka je $\mathcal{S}$ proizvoljna familija ograničenih zatvorenih podskupova od $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Dokažite da je ekvivalentno:

(SkupB) $\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S \neq \emptyset$,

(SkupK) za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ vrijedi
$S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \neq \emptyset$.

Zadatak 2. Neka je $\mathcal{K}$ proizvoljna familija konveksnih ograničenih zatvorenih podskupova od $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Dokažite da je ekvivalentno:

(KonvB) $\bigcap_{K\in\mathcal{K}} K \neq \emptyset$,

(KonvK) za sve $K_1, K_2, \ldots, K_{d+1} \in \mathcal{K}$ vrijedi
$K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_{d+1} \neq \emptyset$.

Napomena. Ovaj rezultat zove se *Hellyjev teorem* [10].

Zadatak 3. Neka su $k \geq 3$ i $m \geq 2$ prirodni brojevi. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.

(vdWB) Ako je svaki prirodni broj obojen u jednu od m boja, tada barem jedna boja sadrži aritmetičku progresiju duljine k.

(vdWK) Postoji $n \in \mathbb{N}$ (ovisan o k i m) sa sljedećim svojstvom: ako je svaki broj iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ obojen u jednu od m boja, tada barem jedna boja sadrži aritmetičku progresiju duljine k.

Napomena. Tvrdnje (vdWB) i (vdWK) su dvije formulacije tzv. *van der Waerdenovog teorema* [19]. Lako je vidjeti da taj rezultat slijedi iz Szemerédijevog teorema (i povijesno mu je bio motivacija), ali dokažite ekvivalenciju (vdWB)$\Longleftrightarrow$(vdWK) bez pozivanja na rezultate koje ne znate dokazati.

Zadatak 4. Neka je $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ alfabet sastavljen od m slova. Za konačnu ili beskonačnu riječ nad tim alfabetom kažemo da je *kvadratno slobodna* ako ona nije oblika $vuuw$ za neku nepraznu riječ u, neku (moguće praznu) riječ v i neku (moguće praznu, a moguće i beskonačnu) riječ w. Drugim riječima, kvadratno slobodna riječ nema nepraznu podriječ oblika uu. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.

(RijB) Postoji beskonačna kvadratno slobodna riječ nad alfabetom $\mathbb{A}$.

(RijK) Postoji po volji duga konačna kvadratno slobodna riječ nad alfabetom $\mathbb{A}$.

Napomena. Tvrdnje (RijB) i (RijK) vrijede za $m \geq 3$ i to je prvi dokazao Thue [15].

Literatura

[1] J. Boos, *Classical and modern methods in summability*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[2] F. Bosnić, V. Kovač, *Vjerojatnosna lema o regularnosti i njezine primjene u kombinatorici*, Osječki matematički list, vol. **17** (2017), br. 1, 1–29.

[3] N. G. de Bruijn, P. Erdős, *A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations*, Indagationes Math. **13** (1951), 369–373.

[4] H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller, D. Radchenko, M. Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 24*, Ann. of Math. (2) **185** (2017), no. 3, 1017–1033.

[5] R. G. Cooke, *Infinite matrices and sequence spaces*, Dover Publications, Inc., New York, 1965.

[6] P. Erdős, P. Turán, *On Some Sequences of Integers*, J. London Math. Soc. **11** (1936), no. 4, 261–264.

[7] B. Green, T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Ann. of Math. (2) **167** (2008), no. 2, 481–547.

[8] A. D. N. J. de Grey, *The chromatic number of the plane is at least 5*, Geombinatorics **28** (2018), no. 1, 18–31.

[9] T. C. Hales, *A proof of the Kepler conjecture*, Ann. of Math. (2) **162** (2005), no. 3, 1065–1185.

[10] E. Helly, *Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **32** (1923) 175–176.

[11] V. Kovač, *Kromatski broj ravnine — neriješeni problem o bojenju*, math.e, br. 6., 2005.

[12] K. F. Roth, *On certain sets of integers*, J. London Math. Soc. **28** (1953), 104–109.

[13] L. L. Silverman, *On various definitions of the sum of a divergent series*, Ph.D. disertacija, University of Missouri, Columbia, 1910.

[14] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 199–245.

[15] A. Thue, *Über unendliche Zeichenreihen*, Norske Vid. Skrifter I Mat.-Nat. Kl., Christiania **7** (1906), 1–22.

[16] O. Toeplitz, *Über allgemeine lineare Mittelbildungen*, Prace Matematyczno-Fizyczne **22**, (1911), no. 1, 113–119.

[17] M. Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 8*, Ann. of Math. (2) **185** (2017), no. 3, 991–1015.

[18] M. Vuković, *Matematička logika 1*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2000.

[19] B. L. van der Waerden, *Beweis einer Baudetschen Vermutung*, Nieuw. Arch. Wisk. **15** (1927), 212–216.