Južnoafrička matematička olimpijada 2003

U prošlom broju bili smo na sjeveru, sad idemo na jug. Donosimo vam jedno natjecanje s druge hemisfere. Kao što vidite, riječ je o natjecanju Južnoafričke Republike (JAR). Njihova *olimpijada* se sastoji od 3 kruga. Prva dva su eliminacijska i to su testovi u kojima se zaokružuju točni odgovori. U trećem (konačnom) krugu dani su zadaci na koje se mora pismeno odgovoriti. Zadaci su raznih težina. Čitatelji će primijetiti da se zadatak sličan 1. zadatku pojavio na školskom natjecanju V. gimnazije pretprošle školske godine.[1] Neki zadaci su lagani, primjereni za 7. razred osnovne škole. No, ima i težih. Uživajte!

3. krug
Vrijeme za rješavanje: 4 sata

1. Imate 5 komadića papira. Uzmite jedan ili više njih i podijelite svaki na 5 dijelova. Postupak ponovite više puta. Dokažite da nikada nećete imati 2003 papirića.
2. Dan je paralelogram $ABCD$. Neka su E i F redom polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$. Pravci AE i AF sijeku dijagonalu $\overline{BD}$ u M i N. Dokaži da M i N dijele $\overline{BD}$ na tri jednaka dijela.
3. Prve četiri znamenke broja n su 1137. Dokaži da se miješanjem mjesta znamenaka broja n može dobiti broj djeljiv sa 7.
4. U danom peterokutu $ABCDE$, trokuti ABC, BCD, CDE, DEA i EAB svi imaju istu površinu. Pravci AC i AD sijeku BE redom u točkama M i N. Dokaži da je $|BM| = |EN|$.
5. Dokaži da zbroj kvadrata dva uzastopna prirodna broja ne može biti jednak zbroju četvrtih potencija dva uzastopna prirodna broja.
6. U trokutu ABC zbroj stranica je $2s$ i polumjer upisane kružnice je r. Tri polukružnice s promjerima (i nad stranicama) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ nacrtane su izvan $\triangle ABC$. Kružnica polumjera t dodiruje sve te tri polukružnice. Dokaži da je

$$\frac{s}{2} < t \leq \frac{s}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) r$$

UPUTE I RJEŠENJA NA STRANICI 46.

[1] Vidi *PlayMath* br. 1.