Rješenje nagradnog natječaja br. 218

Neka je

$$a_n = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} \quad \text{za} \quad n \geq 1.$$

Odredi sumu $a_1 + a_2 + \ldots + a_{85}$.

Rješenje. Stavimo $b_n = \sqrt{2n-1}$. Tada je $4n = b_{n+1}^2 + b_n^2$. Tada je

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{b_{n+1}^2 + b_n^2 + b_{n+1}b_n}{b_{n+1} + b_n} \\ &= \frac{(b_{n+1} - b_n)(b_{n+1}^2 + b_{n+1}b_n + b_n^2)}{(b_{n+1} - b_n)(b_{n+1} + b_n)} \\ &= \frac{b_{n+1}^3 - b_n^3}{b_{n+1}^2 - b_n^2} = \frac{1}{2}(b_{n+1}^3 - b_n^3). \end{aligned}$$

Sada dobivamo

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_{85} &= \frac{1}{2}(b_2^3 - b_1^3) + \frac{1}{2}(b_3^3 - b_2^3) + \ldots + \frac{1}{2}(b_{86}^3 - b_{85}^3) \\ &= \frac{1}{2}(b_{86}^3 - b_1^3) = \frac{1}{2}(\sqrt{171^3} - 1). \end{aligned}$$

Knjigom Zvonko Benčić, Josip Moser, *Povijest i filozofija tehnike – radovi EDZ sekcije 2017. godine*, Kiklos – krug knjige, Zagreb, 2017., nagrađeni su rješavatelji:

1. *Ivan Novak* (3), Srednja škola Vrbovec, Vrbovec;
2. *Zlatko Petolas* (4), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb;
3. *Nika Utrobičić* (4), III. gimnazija, Split.

Riješili zadatke iz br. 3/267

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Lana Kramar* (1), Srednja škola Zlatar, Zlatar, 3568, 3570; *Zlatko Petolas* (4), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, 3567–3580.

b) Iz fizike: *Borna Cesarec* (7), OŠ Augusta Cesarca, Krapina, 418–421.

Nagradni natječaj br. 220

Dani su pozitivni realni brojevi a, b, c i

$$A = 3 + (a + b + c) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right),$$

$$B = \frac{3(a+1)(b+1)(c+1)}{abc + 1}.$$

Dokaži da je $A \geq B$. Kada vrijedi jednakost?