Logika dokazivanja *II. dio*

Tvrtko Tadić

U prošlom smo se broju pozabavili nekim osnovnim logičkim operacijama. Sada ćemo preći na dokazivanje. Pri tome ćemo se vrlo često vraćati na prošli broj i za praćenje članka nužno je poznavanje tematike iz prošlog broja.

Načini dokazivanja

U matematici su najčešći sljedeći načini dokazivanja:

1. Izravni dokaz
2. Dokaz preko kontradikcije
3. Dokaz po kontrapoziciji

Pri dokazivanju moramo imati u vidu i stvari koje već znamo kao što su aksiomi, teoremi, leme, definicije i sl. Bez njih ne bismo mogli krenuti dalje. Kao ni bez podataka koji su zadani u zadatku i u tom trenutku postaju nepromjenjive činjenice, npr. $x \in \mathbb{R}^+$ i sl.

Izravni dokaz

Izravni dokaz je najčešći i u njemu se uglavnom koristi tranzitivnost relacija $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$. Vrijedi:

$$((A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \ldots \wedge (A_n \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

i

$$((A \Leftrightarrow A_1) \wedge (A_1 \Leftrightarrow A_2) \wedge \ldots \wedge (A_n \Leftrightarrow B)) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B).$$

Primjer 1. Dokaži ako je $x > 1$ onda je $x^2 > 1$.
Rješenje.

$$x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0, \quad (1)$$

$$x > 1 \Rightarrow x + 1 > 2 \Rightarrow x + 1 > 0. \quad (2)$$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1.$$

■

Gore dani dokaz je "*ušminkan*" i takvi se dokazi često pojavljuju u knjigama i zbunjuju svakoga. Često se pitamo kako je autor došao do rješenja. Pa krenuo je od kraja. No moramo biti oprezni tada koristimo relaciju $\Leftrightarrow$ jer nam ona omogućuje povratak. Tako bi to u ovom slučaju izgledalo ovako:

$$x^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) > 0. \quad (1)$$

Dobili smo da je naša zadana nejednakost istovrijedna s nejednakosti $(x-1)(x+1) > 0$.

$$x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0, \quad (2)$$

$$x > 1 \Rightarrow x + 1 > 0. \quad (3)$$

$$(2) \wedge (3) \Rightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1. \blacksquare$$

Primijetimo kako smo u oba slučaja koristili neke općepoznate stvari poput razlike kvadrata i svojstva da je $(x > 0) \wedge (y > 0) \Rightarrow xy > 0$.

DOPUNA
U prošlom broju došlo je do propusta u definiciji limesa tako da dopunjujemo definiciju limesa iz prošlog broja.

Izjava $\lim_{x\to a} f(x) = L$ znači da je

$$(\forall e > 0)(\exists d > 0)(\forall x \in D(f))((0 < |x-a| < d) \Rightarrow (0 < |f(x) - L| < e)),$$

gdje je $D(f)$ područje definicije.
Uredništvo i autor zahvaljuju našem čitatelju *Darku Žubriniću* koji nam je ukazao na ovaj propust.

Primjer 2. Dokaži da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Mnogi će nacrtati sliku i reći da je to vrlo jednostavno i da je očito. No svi ti načini i priče kako funkcija teži prema 1 krivi su načini. Treba poći od definicije
Rješenje. Moramo dokazati da vrijedi sljedeća tvrdnja:

$$(\forall e > 0)(\exists d > 0)(\forall x \in \mathbb{R})((0 < |x - 0| < d) \Rightarrow (|\frac{x}{x} - 1| < e)).$$

Primijetimo kako je gornja tvrdnja istinita jer uistinu za svako $e > 0$ postoji d (u ovom slučaju to može biti $d = \epsilon$) za koji vrijedi

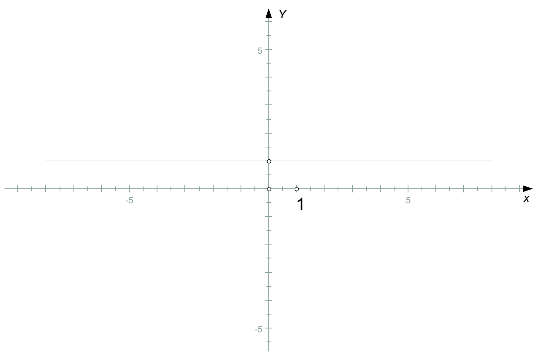
$$(0 < |x| < d) \Rightarrow (|\frac{x}{x} - 1| < e),$$

naime

$$(\forall e > 0)(d = \epsilon)(\forall x \in \mathbb{R})((0 < |x| < \epsilon) \Rightarrow (x \neq 0) \Rightarrow (\frac{x}{x} = 1) \Rightarrow (|\frac{x}{x} - 1| = 0 < e)).$$

■

Time smo dokazali našu tvrdnju. Ovaj je postupak zapravo geometrijska interpretacija zapisana matematičkim simbolima. Pogledajmo primjer iz prošlog broja.



Slika 1.

Primjer 3. Dokaži da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ zadana formulom $f(x) = x^2$ surjekcija.
Rješenje. Prisjetimo se definicije iz prošlog broja. Znači, mora vrijediti

$$(\forall y \in \mathbb{R}^+)(\exists x \in \mathbb{R})(f(x) = y).$$

Gornja izjava je istinita jer za $\forall y \in \mathbb{R}^+$, $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ i vrijedi $f(x) = (\sqrt{y})^2 = y$. ■

Dokaz preko kontradikcije

Ovom metodom dokazivanja pretpostavljamo suprotno, odnosno da tvrdnja T ne vrijedi. Znači da vrijedi izjava $\neg T$. U daljnjem postupku dokažemo da je $\neg T \equiv 0$. Iz čega zaključujemo da je $T \equiv 1$. Kod kontradikcije se služimo sljedećim pravilima

$$\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge \neg B,$$

$$\neg(\forall x \in A) = (\exists x \in A),$$

$$\neg(\exists x \in A) = (\forall x \in A).$$

Primjer 4. Ako je $x \in R \setminus \{0\}$ onda je $x^{-1} \neq 0$.
Rješenje. Ovaj pomalo smiješan primjer zahtijeva korištenje ove metode dokazivanja kako bi tvrdnja bila pravilno dokazana. Prvo zapišimo zadatak simbolički:

$$(x \neq 0) \Rightarrow (x^{-1} \neq 0).$$

Pretpostavimo da vrijedi suprotno, tj. da je izjava

$$(x \neq 0) \wedge (x^{-1} = 0)$$

točna. Budući da je x^{-1} inverzni element od x u skupu $\mathbb{R}$, vrijedi

$$1 = x \cdot x^{-1},$$

no također vrijedi

$$x \cdot x^{-1} = x \cdot (0) = 0.$$

Time smo dobili kontradikciju jer je $1 = 0$ laž. ■

Primjer 5. Dokaži da rješenje jednadžbe $x^3 = 3$ nije racionalan broj.
Rješenje. Zapišimo ponovo logičkim simbolima

$$(x^3 = 3) \Rightarrow (x \notin \mathbb{Q}).$$

Negacijom ove izjave dobivamo

$$(x^3 = 3) \wedge (x \in \mathbb{Q}),$$

odnosno tvrdnju da je x racionalan broj. Svaki racionalan broj može se zapisati u obliku razlomka, što znači da $(\exists a \in \mathbb{Z})(\exists b \in \mathbb{N})(x = \frac{a}{b}, \text{nzd}(a,b) = 1)$. Dakle vrijedi

$$\frac{a^3}{b^3} = 3 \Leftrightarrow a^3 = 3b^3.$$

Slijedi da je $a = 3k$, gdje je $k \in \mathbb{N}$, što nas dovodi do

$$27k^3 = 3b^3 \Leftrightarrow b^3 = 9k^3 \Rightarrow (\exists l \in \mathbb{N})(b = 3l).$$

Zaključujemo kako je $\text{nzd}(a,b) \geq 3 \neq 1$, što znači da je naša pretpostavka kriva, tj. da $x \notin \mathbb{Q}$. ■

Primjer 6. Dokaži da vrijedi:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(|e| < x) \Rightarrow (e = 0).$$

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, dakle da vrijedi izjava:

$$\neg((\forall x \in \mathbb{R}^+)(|e| < x) \Rightarrow (e = 0)).$$

Ako je $A \equiv (\forall x \in \mathbb{R}^+)(|e| < x)$ i $B \equiv (e = 0)$. Znači negacija izjave je

$$((\forall x \in \mathbb{R}^+)(|e| < x)) \wedge (e \neq 0).$$

Da bi gornja izjava bila točna i A i $\neg B$ moraju biti točne izjave. Budući da je $e \neq 0$, vrijedi $|e| \in \mathbb{R}^+$. Ako vrijedi izjava A, ona mora vrijediti i za $x = |e|$, što bi značilo da mora vrijediti i izjava $|e| < |e|$, a to ne može vrijediti. Znači, naša pretpostavka ne vrijedi (dobili smo kontradikciju). Dakle mora vrijediti suprotna izjava, odnosno $A \Rightarrow B$. ■

Primjer 7. [**Dirichletovo pravilo**]Ako n golubova stavimo u $n-1$ kutiju, dokaži da postoji kutija u kojoj se nalaze barem dva goluba.
Rješenje. Neka je $g(i)$ broj golubova u i-toj kutiji. Tada tvrdimo

$$\exists i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\},\ g(i) > 1. \quad (1)$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\},\ g(i) \leq 1.$$

No to znači da je ukupan broj golubova $n = g(1) + g(2) + \cdots + g(n-1) \leq n-1$, što nije istina. Znači da je naša pretpostavka kriva, dakle izjava (1) je točna. ■

Primjer 8. Zadan je 20-ero znamenkasti prosti broj. Dokaži da u njegovom dekatskom zapisu postoje 3 iste znamenke.
Rješenje. Označimo broj s p. Pretpostavimo suprotno da se svaka znamenka pojavljuje najviše 2 puta. Ako je $s_i(p)$ broj koji pokazuje koliko se puta znamenka i pojavila u decimalnom zapisu tada je

$$s_0(p) + s_1(p) + s_2(p) + \cdots + s_9(p) = 20.$$

Kako je $s_i(p) \leq 2,\ \forall i \in \{1, 2 \ldots, 9\}$ dobivamo da za svaki i vrijedi $s_i(p) = 2$ jer bi u suprotnom zbroj bio manji od 20, što ne može biti. No u tom slučaju je zbroj znamenki promatranog broja

$$2(0 + 1 + 2 + \cdots + 8 + 9) = 2 \cdot 45 = 90,$$

što je djeljivo s 3, a ako je zbroj znamenki djeljiv s 3, tada je i broj djeljiv s tri. Budući da je $p > 3$ (jer ima 20 znamenki), to znači da nije prost. Dakle, naša pretpostavka ne vrijedi i to znači da postoji znamenka koja se pojavljuje u tom broju 3 ili više puta. ■
Evo jednog primjera koji ćemo riješiti preko kontradikcije i izravnim dokazivanjem. Prvo rješenje se pripisuje Euklidu.

Primjer 9. Dokaži da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva.
Rješenje. Pretpostavimo suprotno. Neka postoji konačno mnogo prostih brojeva. Neka su $2, 3, 5, \ldots, p_k$ svi prosti brojevi. Gledajmo sada broj $A = 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots p_{k-1} p_k + 1$. Svaki se broj može rastaviti kao umnožak prostih faktora, ali broj A nije djeljiv ni sa jednim od postojećih prostih faktora. To znači da se on ne može rastaviti na proste faktore, pa je time on sam prost, što nemože

biti jer je $A > p_k$. Znači, dobili smo kontradikciju, tj. naša pretpostavka ne vrijedi. Ima beskonačno mnogo prostih brojeva. ■

Nekad možemo odmah zaključiti hoćemo li koristiti izravni dokaz ili neku drugu metodu dokazivanja, ovdje ćemo primjer riješiti na dva načina. Ostavljamo čitateljima da odrede koji je dokaz lakši.

Drugo rješenje. Dokažimo da su svaka dva broja oblika $2^1+1, 2^2+1, 2^{2^2}+1, \ldots, 2^{2^k}+1, \ldots,\ k \in \mathbb{N}$ relativno prosti. Uzmimo neka dva prirodna broja u i v, gdje je $u < v$. Primijetimo da je

$$2^{2^v}-1+2 = (2^{2^{v-1}}+1)(2^{2^{v-1}}-1)+2 = (2^{2^{v-1}}+1)(2^{2^{v-2}}+1)\ldots\underline{(2^{2^u}+1)}\ldots(2^{2^0}+1)(2^{2^0}-1)+2.$$

Znači, pri dijeljenju $2^{2^v}+1$ s $2^{2^u}+1$ dobivamo ostatak 2, što znači da su svi gore navedeni brojevi uistinu relativno prosti, tj. nemaju zajedničkih prostih djelitelja. Svaki broj može se rastaviti kao umnožak prostih brojeva. Budući da ima bekonačno mnogo brojeva oblika $2^{2^k}+1$ to znači da ima beskonačno mnogo prostih brojeva.

Napomena: Ovdje smo umjesto 2 mogli koristiti bilo koji drugi broj jer su uvijek svi brojevi $a^{2^0}+1, a^{2^1}+1, \ldots,\ a \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ međusobno relativno prosti. ■

Ako odlučite krenuti putem kontradikcije, put do njezinog nalaženja ne mora biti toliko lagan. Zato pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 10. Dokažite da ne postoji prirodan broj n takav da za svaki $k = 1, 2, \ldots, 9$ prva znamenka broja $(n+k)!$ počinje sa k.

(Predložen za MMO 2001.)

Rješenje. Za svaki $m \in \mathbb{N}$ neka je

$$N(m) = \frac{m}{10^{d(m)-1}}$$

gdje je $d(m)$ broj znamenki broja m. Primijetimo da je $1 \le N(m) < 10$. *Lako*[2] pokažemo da vrijedi

$$N(lm) \le N(l)N(m). \quad (1)$$

Pretpostavimo da je n takav prirodan broj za koji vrijedi da je za $k = 1, 2, \ldots, 9$ prva znamenka broja $(n+k)!$ jednaka k. Ako je $2 \le k \le 9$, onda vrijedi $(n+k)! = a \cdot 10^r$, gdje je $a \in \mathbb{R}^+$ za koji vrijedi $k < a < k+1$ i neki $r \in \mathbb{N}$, i $(n+k-1)! = b \cdot 10^s$, gdje je $k-1 < b < k$ i $s \in \mathbb{N}$. Onda imamo

$$1 < N(n+k) = N\left(\frac{(n+k)!}{(n+k-1)!}\right) = \frac{a}{b} < \frac{k+1}{k-1} \le 3. \quad (2)$$

$N(m) \ge N(m+1)$ se može dogoditi samo ako je $N(m) \ge 9$. Dakle, iz (2) slijedi

$$1 < N(n+2) < N(n+3) < \cdots < N(n+9) < \frac{5}{4}.$$

Upotrebljavajući (1) i činjenicu da je $N((n+1)!) < 2$ dobivamo

$$N((n+2)!) \le N((n+1)!)N(n+2) < 2\cdot\left(\frac{5}{4}\right),$$

$$N((n+3)!) \le N((n+2)!)N(n+3) < 2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2,$$

$$N((n+4)!) \le N((n+3)!)N(n+4) < 2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^3 < 4.$$

[2] Ova činjenica je očita, te se može dokazati na nekoliko načina. Jedan od tih dokaza naveden je u rubrici rješenja na stranici 43.

To je kontradiktorno našoj pretpostavci jer bi trebalo vrijediti $4 < N(n+4) < 5$. Ne postoji n takav da $(n+k)!$ počinje znamenkom k za svaki $k = 1, 2, \ldots, 9$. ■

Dokaz po kontrapoziciji

Ovaj se način dokazivanja se rijeđe upotrebljava, no i on može biti koristan. Tu se koristi sljedeća zakonitost

$$(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Primjer 11. Neka su a, b, c stranice trokuta ABC. Dokaži ako je $a^2+b^2 \neq c^2$ onda je $\angle BCA \neq 90°$.
Rješenje. Zapišimo našu tvrdnju simbolički

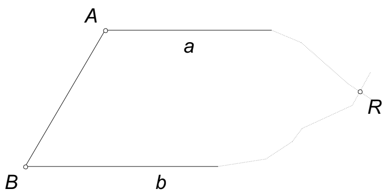
$$(a^2 + b^2 \neq c^2) \Rightarrow (\angle BCA \neq 90°).$$

Gornja izjava istovrijedna je donjoj izjavi

$$(\angle BCA = 90°) \Rightarrow (a^2 + b^2 = c^2),$$

što je zapravo Pitagorin poučak za koji znamo da vrijedi. Time smo dokazali našu tvrdnju. ■

Primjer 12. Vidi sliku 2. Dokaži ako je $\alpha + \beta = 180°$, tada je $a \cap b = \emptyset$.



Slika 2.

Rješenje. Naš zadatak je zapravo

$$(\alpha + \beta = 180°) \Rightarrow (a \cap b = \emptyset).$$

Naša izjava istovrijedna je izjavi

$$(a \cap b \neq \emptyset) \Rightarrow (\alpha + \beta \neq 180°).$$

Neka je $a \cap b = R$. Znači da je

$$\alpha + \beta + \angle BRA = 180°,$$

što znači da je $\alpha + \beta = 180° - \angle BRA \neq 180°$. ■

Zadaci

1. Dokaži da je $2 + \sqrt[3]{3}$ iracionalan broj.
2. $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y})$
3. Ako je a^2 paran, onda je a paran.

4. Neka su a, b, c različiti prirodni brojevi i neka je P polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Dokaži da je barem jedna od ovih tvrdnji lažna:

$$P(a) = b,\ P(b) = c,\ P(c) = a,$$

gdje su a, b, c različiti cijeli brojevi.

RJEŠENJA I UPUTE NA STRANICI 43.

Poziv na razmišljanje

Pri pisanju ovog članka autor je došao do jednog zanimljivog problema. Naime znamo da su izjave

$$A \Rightarrow B$$

i

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

istovrijedne (o tome smo govorili u dokazu po kontrapoziciji). No pogledajmo sada sljedeću tvrdnju.

Ako je $x^{-1} \neq 0$ *onda je* $x \neq 0$.

Ova tvrdnja se dokazuje na jednak način kao tvrdnja u primjeru 5. i ona je točna. No u čemu je sad problem? Izjava

$$(x^{-1} \neq 0) \Rightarrow (x \neq 0)$$

je istovrijedna izjavi

$$\neg(x \neq 0) \Rightarrow \neg(x^{-1} \neq 0),$$

što je zapravo izjava

$$(x = 0) \Rightarrow (x^{-1} = 0).$$

Znači dobili smo da je izjava

Ako je $x = 0$ *onda je* $x^{-1} = 0$.

točna. No tona nikako ne može biti točna izjava jer bi to značilo $1 = x \cdot x^{-1} = 0 \cdot 0 = 0$. Gdje je greška? Autor poziva čitatelje da mu šalju svoja razmišljanja na *e-mail:* math@petagimnazija.hr.