Svijet matrica

Filip Nikšić

Matrice su prilično napredan i relativno novi dio matematike s vrlo širokom primjenom. Osim što se koriste u matematici, one se nalaze u samom srcu kompjuterske znanosti. Jeste li se ikad zapitali što se događa u pozadini najnovije verzije vaše omiljene 3D igrice s vrhunskom grafikom, koju pokreće ultra-brzo "svemirsko" računalo za koje su vaši roditelji morali izdvojiti nekoliko plaća? Vjerojatno niste jer je igrica preuzbudljiva da biste se zamarali takvim pitanjima, ali ja ću vam svejedno otkriti o čemu se radi. U pozadini sve one kičaste grafike nalaze se (kladim se da naslućujete)- matrice! Pa pogledajmo što su to matrice i što se sve s njima može raditi.

Matrice? Što bi to moglo biti?

Matrica je pravokutno polje (tablica) brojeva. Primjerice,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

je matrica $A = (a_{ij})$ veličine 2×3, gdje je a_{ij} za $i = 1, 2$ i $j = 1, 2, 3$ element matrice u i-tom redu i j-tom stupcu. Matrice označavamo velikim slovima, a njihove elemente odgovarajućim malim slovima.

Zamjenom stupaca i redova matrice A dobivamo transponiranu matricu A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ako je matrica jednodimenzionalna, tj. ima samo jedan red ili stupac, onda je riječ o vektoru. Primjerice,

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

je vektor veličine 3. Za označavanje vektora koristimo mala slova, a i-ti element vektora x veličine n označavamo s x_i, za $i = 1, 2, ..., n$. Za standardni vektor uzimamo stupčani vektor ($n \times 1$ matricu), a odgovarajući redčani vektor dobivamo transponiranjem:

$$x^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Jedinični vektor e_i je vektor s i-tim elementom 1, a ostalim elementima 0. Veličina ovog vektora obično je jasna iz konteksta.

Nul-matrica je matrica kojoj je svaki element jednak 0. Označava se s $\mathbf{0}$, a razlika između broja 0 i nul-matrice obično je jasna iz konteksta. Veličina matrice također se saznaje iz konteksta.

Često se pojavljuju kvadratne matrice veličine $n \times n$. Postoji nekoliko posebnih kvadratnih matrica:

1. Dijagonalna matrica ima elemente $a_{ij} = 0$ gdje god je $i \neq j$. Kako su svi elementi osim onih na dijagonali jednaki nuli, matricu možemo zapisati navodeći elemente dijagonale:

$$dijagonala(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. Jedinična matrica I_n (još se označava i s E_n) je dijagonalna matrica veličine $n \times n$ s jedinicama na dijagonali:

$$I_n = dijagonala(1, 1, ..., 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

   Kad se pojavi I bez indeksa, veličina matrice se saznaje iz konteksta. Primijetimo da je i-ti red jedinične matrice jedinični vektor e_i.

3. Simetrična matrica zadovoljava uvjet $A = A^T$. Naprimjer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Operacije s matricama

Upoznati s osnovnim definicijama i terminologijom u našem (o, čudesnom li) svijetu matrica, krećemo u daljnje istraživanje. Elementi matrice su, kao što ste već vjerojatno primijetili, brojevi koji mogu biti realni, kompleksni, cijeli... Brojevni sustav definira zbrajanje i množenje brojeva, a te definicije možemo proširiti tako da one pokriju i zbrajanje i množenje matrica.

Zbrajanje

Ako su $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ matrice veličine $m \times n$, njihova suma $C = (c_{ij}) = A + B$ je matrica veličine $m \times n$ za koju vrijedi

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

za $i = 1, 2, ..., m$ i $j = 1, 2, ..., n$. Naprimjer:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Neutralni element kod zbrajanja matrica je nul-matrica:

$$A + \mathbf{0} = A = \mathbf{0} + A.$$

Zbrajanje matrica je asocijativno $((A+B)+C = A+(B+C))$ i komutativno $(A+B = B+A)$.

Ako je λ neki skalar (broj), a $A = (a_{ij})$ matrica, tada je $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ njihov skalarni umnožak dobiven množenjem svakog elementa matrice A skalarom λ. Kao specijalni slučaj možemo definirati negativnu matricu $-A$, tako da matricu $A = (a_{ij})$ pomnožimo skalarom -1. Slijedi:

$$A + (-A) = \mathbf{0} = (-A) + A.$$

Ovo nam omogućuje da definiramo oduzimanje matrice kao pribrajanje negativne matrice: $A - B = A + (-B)$.

Množenje

Na prvi pogled, množenje matrica pomalo je zbunjujuće. Da bismo pomnožili matrice $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$, one moraju biti ulančane, tj. broj stupaca matrice A mora biti jednak broju redova matrice B. Matrica $C = (c_{ij}) = A \cdot B$ imat će redova koliko i A i stupaca koliko i B. Neka je A veličine $m \times k$, a B veličine $k \times n$. Matrica C je tada veličine $m \times n$ i vrijedi:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ik} b_{kj}.$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & b_{1j} & \dots & \dots \\ \dots & b_{2j} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & b_{kj} & \dots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & c_{ij} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

Naprimjer:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{1} & 1 \\ 2 & \mathbf{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & \mathbf{7} & 3 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} = \mathbf{7}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1) & (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1)) & (1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1) & (1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1)) \\ (4 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 1) & (4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot (-1)) & (4 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1) & (4 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 + 6 \cdot (-1)) \\ (7 \cdot 1 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 1) & (7 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot (-1)) & (7 \cdot 0 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1) & (7 \cdot (-1) + 8 \cdot 1 + 9 \cdot (-1)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & -2 \\ 30 & 17 & 16 & -5 \\ 48 & 29 & 25 & -8 \end{pmatrix}$$

Neutralni element kod množenja matrica je jedinična matrica:

$$I_m A = A I_n = A$$

za svaku matricu A veličine $m \times n$. Množenje nul-matricom daje nul-matricu:

$$A\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Množenje ulančanih matrica je asocijativno ($(AB)C = A(BC)$), ali nije komutativno:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

Kod matrica postoji i svojstvo distributivnosti:

$$A(B + C) = AB + AC,$$

$$(A + B)C = AC + BC.$$

O inverznoj matrici

Prije nego krenemo dalje, pomnožite sljedeće dvije matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -25 & 26 & -33 \\ 4 & -4 & 5 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ako ste ispravno množili, dobili ste:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Drugim riječima, dobili ste da je $AB = I$. Prisjetimo li se množenja realnih brojeva, vidjet ćemo da ovdje imamo analogiju. Kod množenja brojeva, ako je $ax = 1$, slijedi da je $x = a^{-1}$, tj. x je recipročan broj broju a. Koristeći analogiju, zbog $AB = I$, kažemo da je $B = A^{-1}$, a za A^{-1} kažemo da je inverzna matrica matrice A.

Napomene:

- Inverzne matrice se definiraju samo za kvadratne matrice.
- Mnoge kvadratne matrice nemaju inverznu matricu. Ovdje imamo analogiju s realnim brojevima: **0** nema svoj recipročni par.
- Ako kvadratna matrica A ima inverznu matricu, tada je ta matrica jedinstvena, tj. postoji samo jedna matrica B takva da je $AB = BA = I$.
- Iako kod realnih brojeva imamo notaciju $a^{-1} = 1/a$, ta notacija se ne koristi kod inverznih matrica jer ne postoji koncept dijeljenja matrica.

Još o primjeni

Već smo rekli da se matrice koriste u računalnoj grafici, no pogledajmo primjer koji bi nam svima mogao koristiti. Imamo slijedeći sustav triju jednadžbi s tri nepoznanice:

$$x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 8,$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 2,$$

$$-x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -1.$$

Koristeći matrice, ovaj sustav možemo zapisati na slijedeći način:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Označimo li prvu matricu s A, drugu s x, a treću s b, imamo

$$Ax = b.$$

Ako A ima svoju inverznu matricu A^{-1}, rješenje sustava je vektor

$$x = A^{-1}b.$$

Dakle, sve što treba napraviti je pronaći inverznu matricu, pomnožiti je s b i riješili smo sustav.

Zaključak

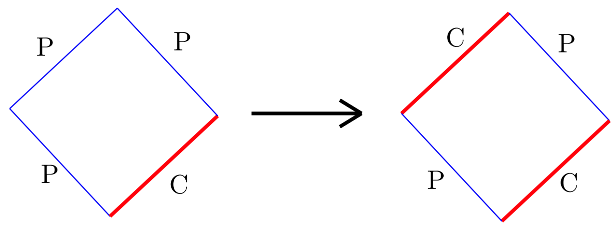
Matrice su se pokazale vrlo dobrim alatom za rješavanje sustava n jednadžbi s n nepoznanica, (posebice kod rješavanja računalom) a osim toga postoji još mnogo drugih primjena. Nadam se da sam ovim relativno kratkim člankom kojim sam pokrio tek osnove ovog područja matematike, uspio pobuditi vašu znatiželju da se malo detaljnije informirate iz raznih matematičkih i informatičkih knjiga i putem Interneta.

JEDNO RJEŠENJE POMOĆU MATRICA

Uredništvo

U prošlom broju prilikom prikaza igre `set` dali smo zgodan prikaz primjene matrica. Mnogi procesi i postupci mogu se opisati pomoću matrica. U problemskim zadacima matrice se isto tako mogu primijeniti. Evo zadatka koji se pojavio na iranskom natjecanju iz matematike.

Stranice pravilnog 2^n-terokuta su obojene crveno i plavo u nekom poretku. Korak je postupak bojenja svake stranice kojoj su susjedne stranice iste boje u crveno, i bojenja svake stranice kojoj su susjedne stranice različite boje u plavo. Dokaži da će nakon 2^{n-1} koraka sve stranice biti obojene u crveno.



Prikaz bojenja četverokuta.

Rješenje. Numerirajmo stranice brojevima $1, 2, \ldots, 2^n$ i neka je $x_i^{(j)}$ 0 ako je i-ta stranica crvena, 1 ako je i-ta stranica plava nakon j koraka. Tada postoji matrica A za koju vrijedi

$$\begin{pmatrix} x_1^{(j+1)} \\ \vdots \\ x_{2^n}^{(j+1)} \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} x_1^{(j)} \\ \vdots \\ x_{2^n}^{(j)} \end{pmatrix} \pmod 2.$$

Da budemo precizni, $A = P + P^{-1}$, gdje je P matrica definirana

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & i - j \equiv 1 \pmod{2^n}; \\ 0, & \text{u suprotnom.} \end{cases}$$

Znači

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da za bilo koju regularnu matricu B vrijedi $(B + B^{-1})^2 = B^2 + 2I + B^{-2} \equiv B^2 + B^{-2} \pmod 2$. Iz toga slijedi $(B + B^{-1})^{2^l} \equiv B^{2^l} + B^{-2^l} \pmod 2$, $l \in \mathbb{Z}$. *Lako*[1] pokažemo da je

$$(P^r)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i - j \equiv r \pmod{2^n}; \\ 0, & \text{u suprotnom.} \end{cases}$$

Slijedi da je $P^{2^n} = I$, odnosno da je

$$P^{2^{n-1}} = P^{-2^{n-1}},$$

što nas dovodi do

$$A^{2^{n-1}} \equiv P^{2^{n-1}} + P^{-2^{n-1}} = 2P^{2^{n-1}} \equiv 0 \pmod{2^n}.$$

Dakle,

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2^{n-1})} \\ \vdots \\ x_{2^n}^{(2^{n-1})} \end{pmatrix} \equiv A^{2^{n-1}} \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_{2^n}^{(0)} \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod 2.$$

Time smo dokazali da će nakon 2^{n-1} koraka svi vrhovi biti crveni. ■

[1] One koje zanima kako se ta činjenica dokazuje pozivamo da pogledaju u rješenjima na stranici 44.