# Zlatni rez

*Rudi Mrazović*

Većina od vas susrela se s nekim iracionalnim brojevima kao što su $\pi$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}, \ldots$ Jedan od takvih brojeva je i *zlatni broj* koji se pojavljuje u *zlatnom rezu*.


Slika 1. *Zlatni rez*

Objasnimo najprije što je to zlatni rez. Nacrtajmo neku dužinu $\overline{AB}$. Cilj zlatnog reza je podijeliti dužinu $\overline{AB}$ u dva dijela tako da se manji dio prema većem dijelu odnosi kao veći dio prema cijeloj dužini $\overline{AB}$.

## Konstrukcija zlatnog reza

Neka je $\overline{AB}$ dužina koju trebamo podijeliti. Nacrtajmo pravokutan trokut $ABC$ takav da je

$$|AB| = 2 \cdot |BC|.$$

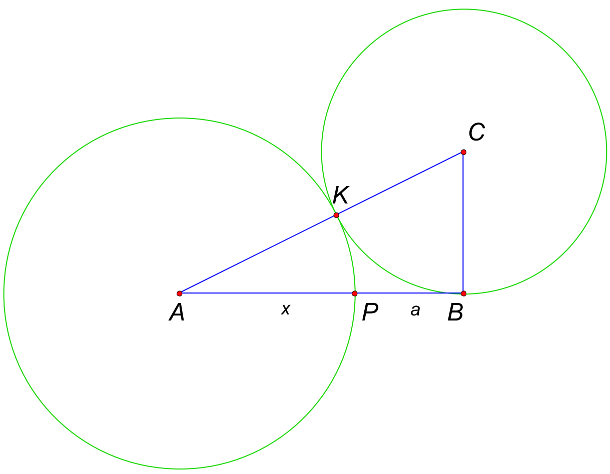
Neka je $K$ točka na hipotenuzi $\overline{AC}$, takva da je

$$|KC| = |BC|.$$

Sada konstruirajmo točku $P$ na kateti $\overline{AB}$ tako da je

$$|AP| = |AK|.$$

Točka $P$ dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru zlatnog reza. Provjerite sami ispravnost konstrukcije!




Slika 2. *Konstrukcija zlatnog reza*

## Zlatni broj

Odredimo sada u kojem se omjeru odnose $|AP|$ i $|BP|$. Neka je $x = |AP|$ i $a = |BP|$. Tada prema svojstvu zlatnog reza vrijedi da je

$$x : a = (x + a) : x.$$

Iz ove jednakosti slijedi da je

$$x^2 = ax + a^2,$$

$$x^2 - ax - a^2 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe[1] su

$$x_1 = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1) \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{a}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

Uočimo da je drugo rješenje negativno, pa nam zbog toga preostaje samo prvo rješenje i traženi omjer $\dfrac{x}{a} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Taj broj nazivamo *zlatnim brojem*, a najčešće ga označavamo grčkim slovom $\varphi$. Približna vrijednost zlatnog broja iznosi $\varphi \approx 1.618$. Ponekad se i broj $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ naziva zlatnim brojem.

Pokažimo sada povezanost zlatnog reza s Fibonaccijevim brojevima. Fibonaccijevi brojevi su članovi niza

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots,$$

tj. niza u kojemu je svaki član jednak zbroju dvaju prethodnih brojeva. Prva dva člana Fibonaccijevog niza iznose 1. S $F_n$ označavat ćemo $n$-ti po redu Fibonaccijev broj.

Fibonaccijevi brojevi imaju mnoga zanimljiva svojstva, a jedno od njih je i sljedeća formula (Cassinijev[2] identitet):

$$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}.$$

Ako ovu jednadžbu podijelimo s $F_{n-1}F_n$, dobivamo da je

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n+1}}{F_n} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{F_{n-1}F_n}.$$

Uočimo da je za veliki $n$ broj $\frac{1}{F_{n-1}F_n}$ malen. Ako ovaj broj zanemarimo, slijedi približna formula:

$$F_n : F_{n-1} \approx F_{n+1} : F_n.$$

Vidimo da se dva uzastopna Fibonaccijeva broja međusobno odnose otprilike u omjeru zlatnog reza. Zapravo, što su oni veći, to se više približavamo zlatnom broju.

Povezanost Fibonaccijevih brojeva sa zlatnim rezom vidi se i u Binetovoj[3] formuli:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

ili

$$F_n = \frac{\varphi^n - \frac{1}{\varphi^n}}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - \frac{1}{\varphi^n}}{\varphi - \frac{1}{\varphi}}.$$

Zlatni rez javlja se i u mnogim drugim područjima matematike. Tako se i u geometriji dijagonale i stranice pravilnog peterokuta međusobno odnose u omjeru zlatnog reza.

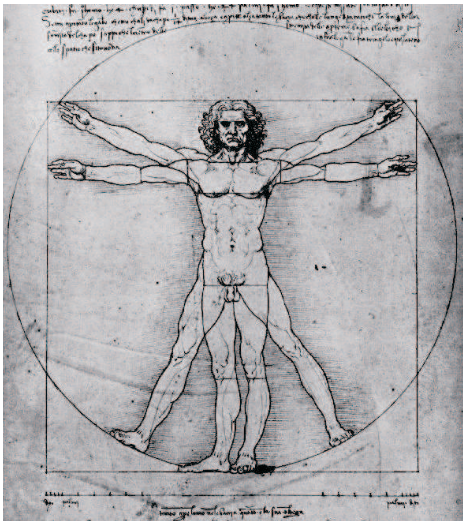
Osim u matematici, zlatni rez često se pojavljuje u raznim granama umjetnosti.

[1] Općenito, rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ su $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

[2] **Jean Dominque Cassini** (1625.–1712.), francuski astronom

[3] **Jacques Phillipe Marie Binet** (1786.–1856.), francuski matematičar i astronom

Krenimo od poznate slike (skice) talijanskog slikara **Leonarda da Vincija**.

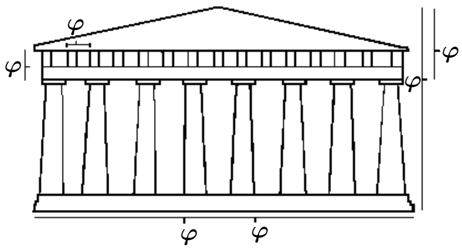


Slika 3. *Skica čovjeka*

Ova slika pokazuje da je visina čovjeka jednaka rasponu njegovih ruku (stranice kvadrata su jednake). Duljina stranice kvadrata i polumjera kružnice s ove slike odnose se u omjeru zlatnog reza.

No, nije ovo jedina da Vincijeva slika na kojoj se pojavljuje zlatni prerez. Čak se i na slavnoj *Mona Lisi* može primijetiti omjer zlatnog prereza.

Kao primjer zlatnog reza u arhitekturi možemo uzeti znameniti Partenon na Akropoli u Ateni, u kojem se visina stupova (od prve ulazne stepenice) prema visini građevine odnosi u omjeru zlatnog reza.




Slika 4. *Partenon*

Poznati antički povjesničar **Herodot** zapisao je kako mu je jedan egipatski svećenik spomenuo da je površina kvadrata nad visinom Keopsove piramide jednaka površini bočnog trokuta na njoj. Pokušajte iz toga podatka doći do zlatnog broja na Keopsovoj piramidi.