GEOFIZIKA	Vol. 3	1986

Izvorni znanstveni rad
UDK 551.501

O svojstvima nekih omeđenih U i J razdioba

Ivan Penzar i Branka Penzar

Geofizički zavod
Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Zagreb

Primljeno 3. lipnja 1986., u konačnom obliku 21. srpnja 1986.

Razmatraju se svojstva funkcije gustoće vjerojatnosti u obliku omeđene parabole, napose prva dva momenta, medijan i intervali najvećih vjerojatnosti. Pokazuje se da medijan, kao i srednjak, daje slabu informaciju o tome gdje se u razdiobi nalazi područje najvećih vjerojatnosti te da varijanca nije jednoznačna mjera za rasap. Kratko je opisan način pridjeljivanja funkcije empirijskim histogramima. Rezultati mogu poslužiti u statističkoj analizi relativnog trajanja insolacije i naoblake.

On the properties of some bounded U- and J- distributions

Some characteristics of the probability density function in the form of a bounded part of a parabola – especially the first two moments, the median, and the intervals with the largest probabilities – are discussed. It is shown that the median, as well as the mean, gives a poor information on the location of the most frequent values, and that the variance cannot be considered as a parameter of dispersion. The way of fitting the function to the empirical histograms is briefly described. The results may be useful in the statistical analysis of relative sunshine duration and cloudiness data.

1. Uvod

Odavno je poznato da u mnogim klimama terminske i dnevne vrijednosti naoblake imaju razdiobu čestina sličnu slovu U. Upravo na dugogodišnjim, homogenim podacima opservatorija Zagreb–Grič Goldberg je (1930, 1932) potvrdio i fizikalno objasnio neke karakteristike takve razdiobe za koje se prije smatralo da potječu od netočnih opažanja ili slučajnih pojava u kraćim razdobljima. Nedavno je ustanovljeno da i dnevno relativno trajanje insolacije u Hrvatskoj ima empiričku razdiobu s najvećim čestinama u rubnim klasama; oba moda nisu obično jednako izrazita, a koji puta se jedan od njih i gubi (Penzar, Penzar, 1984). Takve omeđene razdiobe slične slovu U ili J u meteorologiji se inače rijetko pojavljuju. Većina meteoroloških parametara ima neomeđenu ili s jedne strane omeđenu razdiobu koja se često može nadomjestiti normalnom ili Gaussovom funkcijom gustoće vjerojatnosti. Budući da je to jedna od najpoznatijih i najviše upotrebljavanih funkcija gustoće u matematičkoj statistici i njenoj primjeni u raznim znanostima, postoji mogućnost da se dobro poznata svojstva normalne razdiobe uzmu nesvjesno kao općenito važeća. U slučaju kad stvarna razdioba nije nimalo slična normalnoj to bi moglo dovesti do pogrešnih zaključaka o objektu istraživanja.

U zadnje su vrijeme podaci o naoblaci i insolaciji mnogo traženi u heliotehničkim istraživanjima, pa se postavlja pitanje koliko se adekvatno oni mogu prikazati obično upotrebljavanim statističkim parametrima, odnosno kako se ponašaju ti parametri za omeđenu U ili J razdiobu.

To ćemo ponašanje ovdje prikazati polazeći ne od empirijske razdiobe čestina nego od jedne njezine teorijske aproksimacije – funkcije gustoće u obliku omeđenog polinoma 2. stupnja. Rezultati koje pokaže teorijska funkcija gustoće približno će vrijediti i za empirijske histograme koji su joj slični.

2. Funkcija gustoće u obliku omeđene parabole

Jednadžba parabole kojoj je os paralelna s osi y glasi:

$$y = A + Bx + Cx^2 \tag{1}$$

a koordinate ekstrema su joj:

$$x_t = -\frac{B}{2C}, \qquad y_t = A - \frac{B^2}{4C} \tag{2}$$

Za slučajnu varijablu definiranu u omeđenom intervalu, recimo od 0 do 100, kojoj pripadaju najveće vjerojatnosti na jednom ili na oba kraja tog intervala, može funkcija gustoće imati oblik (3):

$$f(x) = A + Bx + Cx^2, \qquad 0 \leq x \leq 100 \tag{3}$$

s tim da budu ispunjeni uvjeti:

$$C > 0 \tag{4}$$

$$10^2 A + \frac{10^4}{2} B + \frac{10^6}{3} C = 1 \tag{5}$$

a ako je diskriminanta parabole $B^2 - 4AC$ pozitivna, potreban je još i uvjet (6):

$$-B - \sqrt{B^2 - 4AC} \geqslant 200\,C \quad \text{ili} \qquad -B + \sqrt{B^2 - 4AC} \leqslant 0 \tag{6}$$

Time su ispunjeni zahtjevi (7) i (8) koji vrijede za svaku funkciju gustoće i osigurano je da se oba ili jedini mod funkcije nalaze na rubovima intervala u kojem je funkcija definirana.

$$f(x) \geqslant 0 \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \mathrm{d}x = 1 \tag{8}$$

Funkcija razdiobe:

$$F(x) = \int_{0}^{x} f(x) \cdot \mathrm{d}x \tag{9}$$

bit će jednadžba trećeg stupnja bez slobodnog člana, koja zadovoljava potrebne uvjete:

$$F(0) = 0 \qquad F(100) = 1 \tag{10}$$

Iz (5) vidimo da koeficijenti A, B i C nisu međusobno nezavisni. Svaki od njih može se preko (2) i (5) izraziti pomoću koordinata minimuma parabole (1):

$$A = y_t + M x_t^2 \qquad B = -2M x_t \qquad C = M. \tag{11}$$

gdje je M pokrata (12).

$$M = \frac{3 - 300\,y_t}{3x_t^2 - 300\,x_t + 10^4} \cdot 10^{-2} \tag{12}$$

Uvrštavanjem izraza (11) u (3) jednadžba funkcije gustoće dobiva oblik (13). On jasno pokazuje da se radi o dvoparametarskoj razdiobi.

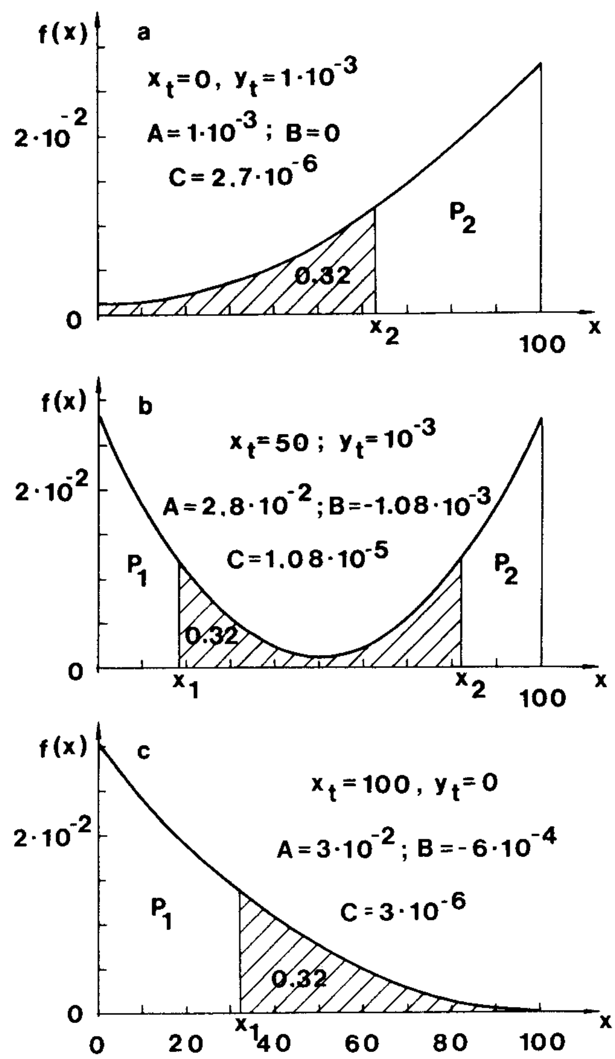
$$f(x) = y_t + M x_t^2 - 2M x_t \cdot x + M x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 100 \tag{13}$$

Razmatrat ćemo dalje samo one slučajeve kad se minimum funkcije (1) nalazi između pravaca $x = 0$ i $x = 100$, tj. kad histogram po obliku upućuje na omeđeni dio parabole. Mora dakle biti:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x_t \leqslant 100 \\ 0 \leqslant y_t < 10^{-2} \end{aligned} \tag{14}$$

što ujedno znači $B^2 - 4AC \leqslant 0$, pa uvjet (6) nije više potreban.

Na slici 1 prikazana su tri primjera funkcije gustoće (13). Iz zadanih parametara x_t i y_t određeni su prema (11) i (12) koeficijenti A, B i C.



Slika 1. Primjeri za funkciju gustoće vjerojatnosti u obliku omeđenog dijela parabole

Figure 1. Examples of the probability density function in the form of a bounded part of parabola.

Očekivana vrijednost slučajne varijable ili prvi pomoćni moment razdiobe μ = = $E(x)$ izražen pomoću koeficijenata A, B i C, odnosno pomoću parametara x_t i y_t glasi:

$$\mu = \frac{A}{2} \cdot 10^4 + \frac{B}{3} \cdot 10^6 + \frac{C}{4} \cdot 10^8 \tag{15}$$

ili

$$\mu = 5 \cdot 10^3 y_t + 10^3 M (5 x_t^2 - \frac{2}{3} 10^3 x_t + 25 \cdot 10^3) \tag{16}$$

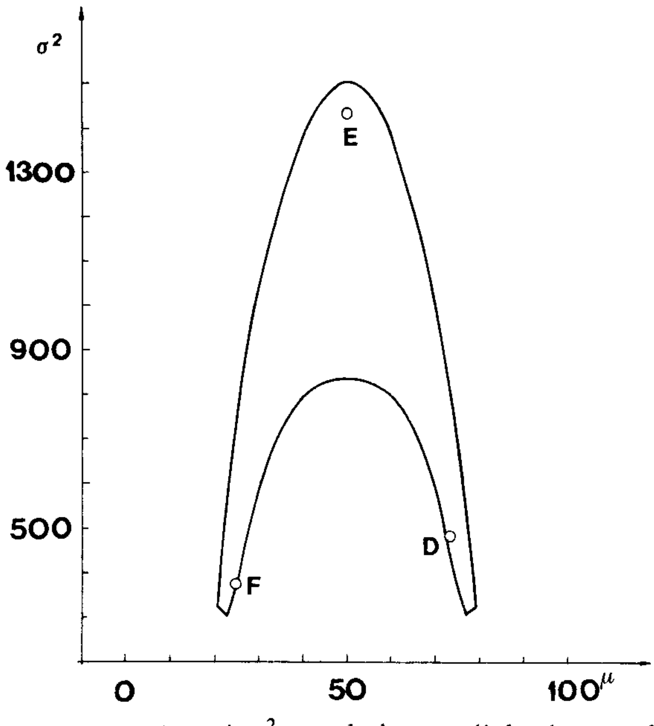
Drugi pomoćni moment razdiobe μ_2 = $E(x^2)$ može se odrediti iz izraza (17) ili (18):

$$\mu_2 = \frac{A}{3} \cdot 10^6 + \frac{B}{4} \cdot 10^8 + \frac{C}{5} \cdot 10^{10} \tag{17}$$

$$\mu_2 = \frac{10^6}{3} y_t + 10^6 M (\frac{1}{3} x_t^2 - 50 x_t + 2 \cdot 10^3) \tag{18}$$

Preko μ i μ_2 određujemo drugi centralni moment ili varijancu σ^2 = $E(x - \mu)^2$.

Parametarski prostor (14) preslikava se u ravnini (μ, σ^2) u omeđeni prostor prikazan na slici 2. Zbog oblika jednadžbi (16) i (18) ne dolazi u obzir analitičko rješavanje



Slika 2. Prostor za momente μ i σ^2 parabolne razdiobe koja zadovoljava uvjet (14). Točke D, E, F odgovaraju primjerima a, b, odnosno c na slici 1.

Figure 2. Space for the moments μ and σ^2 of the distribution (13) with the parameters satisfying the condition (14). The points D, E, and F correspond to the examples a, b, and c respectively, on Fig. 1.

sustava (19), nego bi se iz zadanih momenata μ i σ^2 parametri x_t i y_t mogli odrediti samo numeričkom iteracijom.

$$\begin{aligned} x_t &= x_t(\mu, \sigma^2) \\ y_t &= y_t(\mu, \sigma^2) \end{aligned} \tag{19}$$

Iz poznatog općeg izraza slijedi odredbena jednadžba za medijan ν koja je trećeg stupnja.

Razdioba $f(x)$ je u pravilu bimodalna s maksimumima u točkama $x = 0$ i $x = 100$. Položaj modova je fiksan, ali njihove ordinate mogu varirati, pa je općenito $f(0) \neq f(100)$. Specijalni su slučajevi:

a) kad funkcija ima dva jednaka maksimuma,

b) kad jedan maksimum potpuno iščezne.

Slučajevi a) nastupaju kod $x_t = 50$, a slučajevi b) za parametarski prostor (14) kod $x_t = 0$ i $x_t = 100$. Primjeri takvih funkcija gustoća prikazani su na slici 1.

U praksi je često potrebno znati kakve vrijednosti slučajne varijable treba očekivati s velikom vjerojatnošću, a u kojem su intervalu vrijednosti malo vjerojatne, pa ih – kad se dogode – treba smatrati izuzetnima. Za potpuno ili približno simetrične unimodalne razdiobe problem se svodi na traženje najkraćeg intervala kojemu pripada velika, unaprijed zadana vjerojatnost. U pravilu se uzima da je interval simetričan oko moda, a to je potpuno točno kad je funkcija gustoće simetrična oko svog jedinog maksimuma. Kao što je poznato Chapman je interval od $\mu - \sigma$ do $\mu + \sigma$ za Gaussovu i njoj slične empirijske razdiobe definirao kao područje normalnih vrijednosti slučajne varijable, dok vrijednosti izvan tog intervala smatra malima odnosno velikima.

Ovdje vjerojatne ili normalne vrijednosti slučajne varijable očekujemo uz rubove razdiobe. Ukupnu vjerojatnost koja im pripada označit ćemo s $1 - \alpha$. (U analogiji s Chapmanovim kriterijem bilo bi $1 - \alpha = 0{,}68$.) No bilo bi logično da se intervali u kojima dolaze vjerojatne vrijednosti mijenjaju kako se mijenja oblik gustoće $f(x)$, tj. ordinate njezinih modova.

Da bismo te intervale pobliže odredili polazimo od najduljeg intervala kojemu pripada vjerojatnost α. Granice ćemo mu označiti s x_1 i x_2. To će biti interval simetričan oko vrijednosti x_t, ako ona nije preblizu ruba razdiobe. Ako jest, onda se najdulji α-postotni interval nalazi uz taj rub razdiobe.

Kad iz intervala u kojem je slučajna varijabla definirana isključimo najdulji α-postotni interval, preostaju područja u kojima su vrijednosti slučajne varijable vjerojatne. U pravilu to će biti dva područja: od 0 do x_1 s pripadnom vjerojatnošću P_1 i od x_2 do 100 s pripadnom vjerojatnošću P_2. Mora vrijediti:

$$P_1 + P_2 = 1 - \alpha \tag{20}$$

Granice x_1 i x_2 dobiju se kao realni korijen kubne jednadžbe za d koja slijedi iz izraza (21), uvršten u (22). Tu $2d$ znači širinu simetričnog α-postotnog intervala oko x_t.

$$F(x_t - d) - F(x_t + d) = \alpha \tag{21}$$

$$\begin{aligned} x_t - d &= x_1 \\ x_t + d &= x_2 \end{aligned} \tag{22}$$

Ako (22) pokaže $x_1 < 0$, stavlja se $x_1 = 0$, dok se umjesto $x_2 > 100$ stavlja $x_2 = 100$. Vjerojatnosti P_1 i P_2 slijede zatim iz izraza:

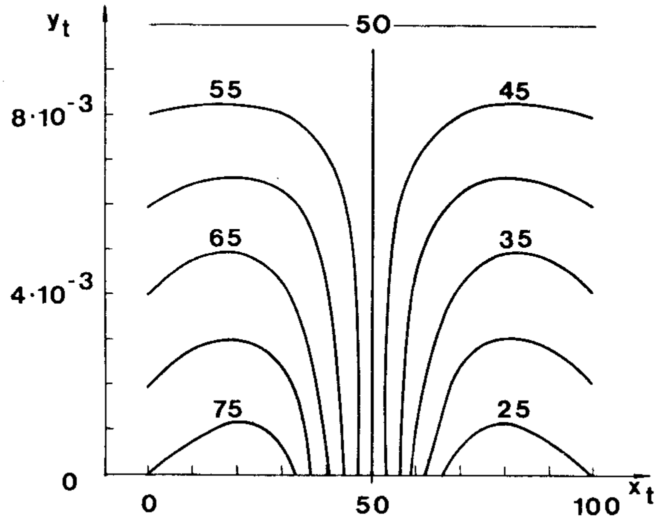
$$\begin{aligned} F(x_1) &= P_1 \\ 1 - F(x_2) &= P_2 \end{aligned} \tag{23}$$

3. Oblik parabolne razdiobe i vrijednosti pripadnih statističkih parametara

Prikazat ćemo sada promjene osnovnih statističkih parametara u ovisnosti o obliku funkcije gustoće (3) ili (13) kojoj koordinate minimuma zadovoljavaju uvjet (14).

3. 1. Momenti

Poznato je da kod razdioba sličnih Gaussovoj prvi pomoćni i drugi centralni moment daju informaciju o smještaju podataka na skali za slučajnu varijablu, odnosno o njihovom rasapu. Za omeđene U ili J razdiobe već same poznate granice intervala u kojoj je razdioba definirana određuju na izvjestan način položaj podataka i njihov najveći mogući raspon, pa neki posebni parametri lokacije i disperzije i nisu neophodno potrebni.



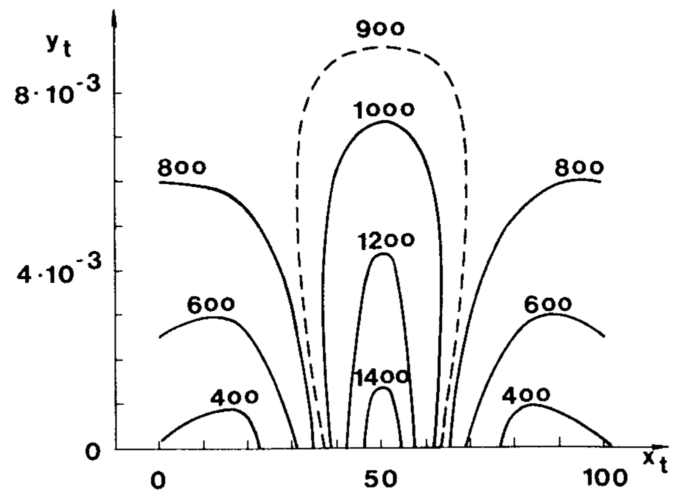
Slika 3. Ovisnost prvog momenta μ o parametrima razdiobe x_t i y_t.

Figure 3. The mean μ as a function of the parameters x_t and y_t.

Simetrične funkcije $f(x)$ imaju minimum u sredini intervala u kojem su definirane ($x_t = 50$), a na istom mjestu nalazi im se i prvi moment μ. Kad se – uz konstantni y_t –

x_t udaljuje od 50 i μ se najprije brzo, a zatim sporije, udaljuje u suprotnom smjeru. No nakon što x_t prijeđe određenu vrijednost (21 odnosno 79) počinje se μ vraćati prema sredini razdiobe (sl. 3). Ako se povećava parametar y_t, a to znači da se parabola širi, μ se i opet približuje vrijednosti 50, koju bi imao kod $y_t = 10^{-2}$, kad parabola prijeđe u pravac, a $f(x)$ u jednoliku funkciju gustuće $f(x) = 10^{-2}$, $0 \leqslant x \leqslant 100$. Ekstreme postiže μ za vrijednosti parametara: $x_t = 21, y_t = 0$ ($\mu = 79$) i $x_t = 79$, $y_t = 0$ ($\mu = 21$).

Slika jasno pokazuje da se prvi moment nikad ne podudara ni s jednim modom, nego se dapače može podudarati s antimodom gustoće. Vidimo da naziv očekivana vrijednost slučajne varijable, koji se često upotrebljava, može ovdje dovesti do zabune, jer se nesvjesno nameće misao da bi trebalo očekivati one vrijednosti varijable koje nastupaju s velikom vjerojatnošću, što je i istina kod mnogih razdioba.



Slika 4. Ovisnost varijance σ^2 o parametrima razdiobe x_t i y_t.

Figure 4. The variance σ^2 as a function of the parameters x_t and y_t.

Kako pokazuje slika 4, pravilo da je varijanca veća što je parabola šira, tj. što je funkcija $f(x)$ manje zakrivljena, ne vrijedi općenito nego samo za jako asimetričnu gustoću. Simetrična ili približno simetrična gustoća $f(x)$ ima osobito veliku varijancu kad joj je minimum blizu osi x. Maksimum ima varijanca za vrijednosti parametara $x_t = 50$, $y_t = 0$ ($\sigma^2 = 1500$), a minimume ($\sigma^2 = 300{,}3$) za dva para vrijednosti: $x_t = 14$, $y_t = 0$ i $x_t = 86$, $y_t = 0$.

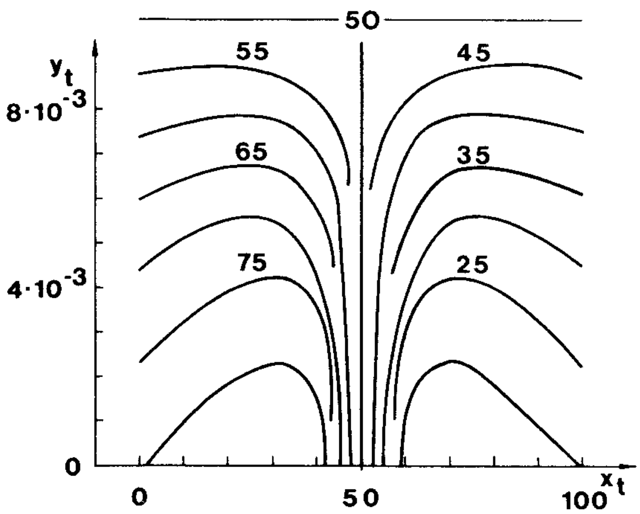
Lako je vidjeti da vjerojatnost za slučajnu varijablu unutar intervala definiranih pomoću μ i σ nije konstantna kao npr. kod normalne razdiobe nego ovisi o parametrima x_t i y_t.

Momenti μ, i osobito σ^2, svaki za sebe, sadrže dakle slabiju informaciju o parabolnoj razdiobi nego što smo navikli u slučaju Gaussove ili neke druge neomeđene unimodalne razdiobe. No oblik naše razdiobe, odnosno njeni parametri x_t i y_t diktiraju položaj para (μ, σ^2) u prostoru na slici 2. Približno simetričnim razdiobama (x_t oko

50) s izrazitim minimumom (y_t blizu 0) pripada gornji dio prostora na slici, a simetričnim razdiobama sa slabo izraženim modovima (veliki y_t) dio u okolišu točke ($\mu = 50$, $\sigma^2 = 900$). U uskim krakovima prostora na slici nalaze se momenti jako asimetričnih razdioba. Za one, koje na svom lijevom rubu imaju mnogo veći maksimum nego na desnom, s graničnim slučajem $x_t = 100$, je lijevi krak prostora; razdiobama sličnim slovu J (x_t blizu 0) padaju momenti u desni krak.

3. 2. Medijan

Umjesto srednjaka upotrebljava se koji puta kao parametar lokacije medijan. Njegova promjena u ovisnosti o parametrima razdiobe koju ispitujemo (sl. 5) vrlo je slična promjeni prvog momenta (sl. 3). Dok je y_t malen, medijan se nalazi bliže onom modu koji je jače izražen. No nikada ne može pasti u točku u kojoj $f(x)$ ima maksimum, nego je od nje udaljen barem za 16 jedinica skale.



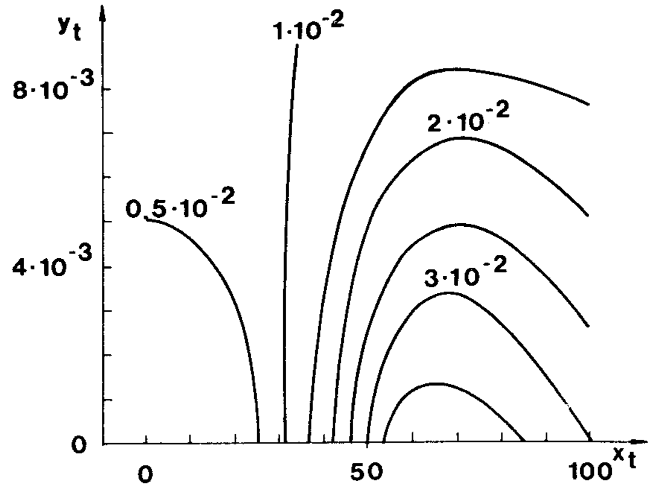
Slika 5. Ovisnost medijana ν o parametrima razdiobe x_t i y_t.

Figure 5. The median ν as a function of the parameters x_t and y_t.

3. 3. Područja velikih vrijednosti

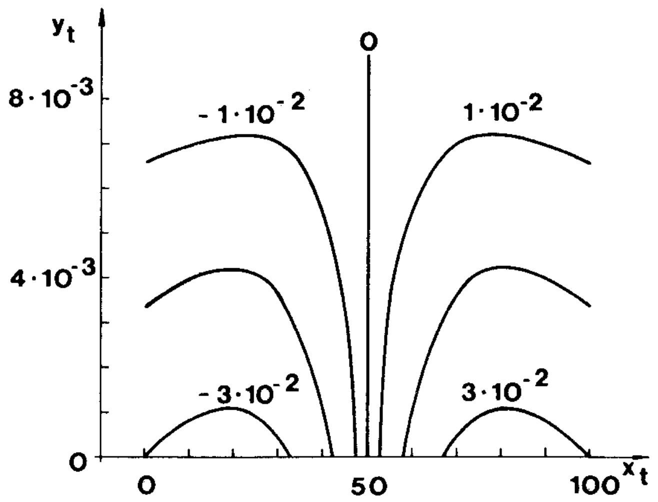
Pri opisu bilo koje razdiobe osnovno je poznavati intervale u kojima se slučajna varijabla nalazi uz veliku vjerojatnost.

Slika 6 prikazuje vrijednost naše funkcije gustoće u točki $x = 0$ ovisno o parametrima x_t i y_t. Raspored vrijednosti $f(100)$ dobit ćemo ako skalu na apscisi okrenemo tako da 0 i 100 zamijene mjesta. Za $x_t = 50$ oba maksimuma funkcije $f(x)$, koji su jednaki, relativno se naglo smanjuju s povećanjem y_t. Ako je pak x_t blizu 30 ili blizu 70, ordinata bližeg moda raste vrlo slabo, a ordinata daljega se smanjuje veoma jako pri povećanju y_t. Zanimljivo je da se uz konstantni y_t ordinate $f(0)$ i $f(100)$ jače razlikuju kad parametar x_t nije na samom rubu razdiobe nego negdje oko vrijednosti 20 ili 80 (sl. 7).



Slika 6. Ovisnost veličine $f(0)$ o parametrima razdiobe x_t i y_t.

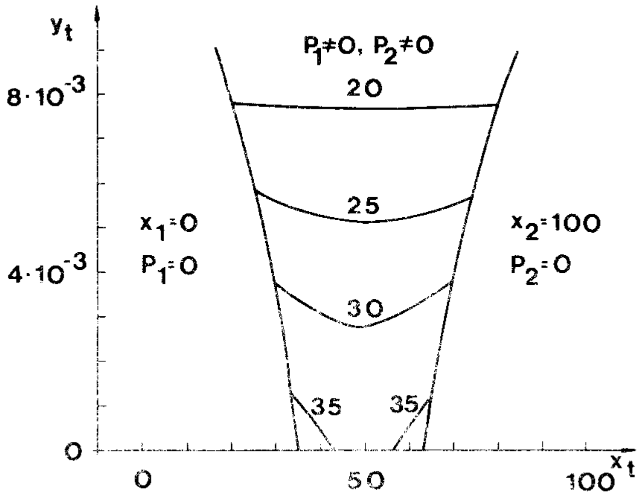
Figure 6. The value $f(0)$ as a function of the parameters x_t and y_t.



Slika 7. Ovisnost razlike $f(0) - f(100)$ o parametrima razdiobe x_t i y_t.

Figure 7. The difference $f(0) - f(100)$ as a function of the parameters x_t and y_t.

Vjerojatne, normalne ili najčešće vrijednosti slučajne varijable treba tražiti uz rubove razdiobe. U skladu s izrazima (20) do (23) izrađena je za ilustraciju slika 8 koja prikazuje slučaj $1 - \alpha = 0{,}68$. Linije pokazuju polovicu širine simetričnog 32-postotnog intervala oko x_t. Za parametre x_t i y_t u omeđenom području na slici obje su površine P_1 i P_2 različite od nule. Napose za x_t = 50 vrijedi $P_1 = P_2$ = 0,34. Lijevo od omeđenog područja je $x_1 = 0$, $P_1 = 0$, što znači da za taj parametarski potprostor male vrijednosti slučajne varijable uopće nisu vjerojatne. Funkcije gustoće kojima parametri padaju desno od omeđenog područja na slici uopće nemaju na svojem desnom rubu intervala s vjerojatnim vrijednostima slučajne varijable (x_2 = 100, P_2 = 0).



Slika 8. Polovica širine simetričnog 32-postotnog intervala oko x_t za razne vrijednosti parametara razdiobe.

Figure 8. Half the width of the symmetric 32 percent interval about x_t as a function of the parameters x_t and y_t.

4. Zaključak

Parabolnu razdiobu upotrijebili smo proučavajući relativno trajanje insolacije u Hrvatskoj kao element klime (Penzar, Penzar 1984, 1985) i kao veličinu važnu za planiranje u heliotehnici. Premda je razdioba mnogo manje fleksibilna od beta razdiobe, jer se ne može pridijeliti bilo kakvom U histogramu, ona se u tim analizama pokazala prikladnijom budući da rad s njom zahtijeva samo minimalna računska pomagala; napose je izračunavanje vjerojatnosti vrlo brzo i jednostavno.

Uzorci kojima je razdioba bila pridijeljena sastojali su se od dnevnih vrijednosti relativnog trajanja insolacije za određeni mjesec i sadržavali su između 660 i 930 članova. Kako funkcija gustoće nije pogodna za procjenu parametara metodom maksimalne vjerojatnosti, a metoda momenata nije davala najbolje rezultate, procjenjivali smo koeficijente u (3) iz razdiobe čestina metodom najmanjih kvadrata. Ako procjene nisu odmah zadovoljile uvjet (5), trebalo ih je popraviti tako da se podijele s vrijednosti koju su dale za lijevu stranu relacije (5). Uspjeh prilagodbe teorijske razdiobe podacima bio je provjeren na dva načina.

Od ukupno 88 tako analiziranih uzoraka velikoj većini su srednjak i varijanca bili unutar prostora za μ i σ^2 parabolne razdiobe, a nekima izvan, ali blizu granica toga prostora. U oba slučaja razdioba se dala dobro prilagoditi podacima. Tablica 1 prikazuje u kojem se rasponu kretao svaki od koeficijenata A, B, C i parametara dobivenih funkcija gustoće. Samo dva uzorka nisu se mogla dobro prikazati parabolnom razdiobom; njihovi srednjaci i varijance nalazili su se izvan prostora za μ i σ^2 parabolne razdiobe.

Na temelju toga smatramo da se podaci o relativnom dnevnom trajanju insolacije u umjerenoj klimi u pravilu pokoravaju parabolnoj razdiobi i da se tom razdiobom mogu prikazati svi U i J empirijski histogrami naoblake ili nekog drugog meteorološkog elementa kojima srednjak i varijanca padaju unutar ili blizu prostora za μ i σ^2 parabolne razdiobe.

Tablica 1. Ekstremne vrijednosti koeficijenata i parametara funkcije gustoće f(x) za relativno dnevno trajanje insolacije u Hrvatskoj

Table 1. Extreme coefficients and parameters of f(x) for relative daily sunshine duration in Croatia

	Minimum	Maximum
A	$0{,}1 \cdot 10^{-2}$	$4{,}0 \cdot 10^{-2}$
B	$-12{,}3 \cdot 10^{-4}$	$-0{,}1 \cdot 10^{-4}$
C	$0{,}7 \cdot 10^{-6}$	$9{,}5 \cdot 10^{-6}$
x_t	8,8	68,0
y_t	$2 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-3}$

Statističke parametre kojima se najčešće opisuju velike skupine podataka treba u slučajevima U ili J histograma upotrebljavati oprezno. Odavno je poznato da srednjak ne pokazuje gdje se u U razdiobi nalazi područje najvećih vjerojatnosti, tj. gdje bi trebala biti smještena glavnina članova slučajnog uzorka. Pokazali smo da isto vrijedi i za medijan parabolne razdiobe. Dapače, srednjak ili medijan mogu se naći i u klasi kojoj pripada najmanja čestina. Vidjeli smo također da varijanca ili standardna devijacija parabolne razdiobe, a prema tome i empirijskih veličina koje se po toj razdiobi ravnaju, ne može dati informaciju o zbijenosti podataka. Statističke analize dnevnih vrijednosti relativnog trajanja insolacije i sličnih veličina trebale bi se prvenstveno osnivati na ordinatama modova i njihovom međusobnom odnosu te na intervalima u kojima se slučajna varijabla nalazi uz zadanu (veliku ili malu) čestinu, odnosno vjerojatnost.

Zahvala

Ovaj rad izrađen je u okviru istraživanja koja su financijski potpomognuta sredstvima Republičke zajednice za znanstveni rad. Student Ivo Penzar izveo je proračune na elektroničkom računalu. Zahvaljujemo im na pomoći.

Literatura

Goldberg, J. (1930): Die Häufigkeit der Bewölkungsgrade und ihr jährlicher Gang. Meteorologische Zeitschrift **47**, 184–187.

Goldberg, J. (1932): Anmerkungen zum Studium der Bewölkung. Meteorologische Zeitschrift **49**, 193–195.

Penzar, I., B. Penzar (1984): Features of sunshine duration in Croatia determined by means of distribution functions. Idöjárás **88**, 193–201.

Penzar, B., I. Penzar (1985): O proljetnom režimu sunčanosti u Hrvatskoj. Geofizika **2**, 141–162.

Adresa autora: I. Penzar i B. Penzar, Geofizički zavod, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, P. p. 224, 41001 Zagreb, Jugoslavija.