

Primljen / Received: 12.2.2018.

Ispravljen / Corrected: 11.3.2019.

Prihvaćen / Accepted: 28.3.2019.

Dostupno online / Available online: 23.9.2019.

Ocjena podlokavanja oko dvojnih stupova mosta primjenom analize pouzdanosti

Autori:



Doc.dr.sc. **Merik Yilmaz**, dipl.ing.građ.
Sveučilište Atilim, Turska
Građevinski fakultet
meric.yilmaz@atilim.edu.tr



Doc.dr.sc. **Melih Calamak**, dipl.ing.građ.
Sveučilište u Južnoj Karolini
Fakultet građevinarstva i ekologije
calamak@cec.sc.edu



Prof.dr.sc. **A. Melih Yanmaz**, dipl.ing.građ.
Tehničko sveučilište Bliski istok, Turska
Građevinski fakultet
myanz@metu.edu.tr

Prethodno priopćenje

Merik Yilmaz, Melih Calamak, A. Melih Yanmaz

Ocjena podlokavanja oko dvojnih stupova mosta primjenom analize pouzdanosti

U ovom se istraživanju određuju uzroci nepouzdanosti uslijed vremenske varijacije dubine kaverne nastale podlokavanjem u uvjetima bistre vode na mjestu dvojnih stupova tandemskog razmještaja. Na primjeru se probabilističkom analizom ocjenjuje vjerojatnost gubitka stabilnosti uslijed podlokavanja oko dvojnih stupova, za razne razmake stupova. Istraženi su i utjecaji promjene koeficijenta varijacije probabilističkih varijabli podlokavanja, te funkcije razdiobe vjerojatnosti, na vjerojatnost gubitka stabilnosti. Utvrđeno je da su utjecaji promjene koeficijenta varijacije na vjerojatnost gubitka stabilnosti značajniji od razdiobe vjerojatnosti dubine podlokavanja.

Ključne riječi:

most, stup, vjerojatnost gubitka stabilnosti, podlokavanje, tandemski razmještaj, nepouzdanost

Research Paper

Merik Yilmaz, Melih Calamak, A. Melih Yanmaz

Reliability-based evaluation of scour around dual bridge piers

The causes of uncertainty involved in temporal variation of the depth of cavern formation due to clear water scouring at dual piers with tandem arrangement are identified in this study. In an example, the probability of failure induced by scouring around dual piers is estimated for various pier spacing using probabilistic analysis. The effects of changes in the coefficient of variation of probabilistic scouring variables and probability distributions on the probability of the loss of stability, are also investigated. It was established that the effects of variations in the coefficient of variation on the probability of the loss of stability are more significant compared to the probability distributions of the scour depth.

Key words:

bridge, pier, probability of the loss of stability, scour, tandem arrangement, uncertainty

Vorherige Mitteilung

Merik Yilmaz, Melih Calamak, A. Melih Yanmaz

Beurteilung der Unterspülung um die Doppelpfeiler einer Brücke anhand einer Zuverlässigkeitsanalyse

In dieser Studie werden die Ursachen für die Unzuverlässigkeit durch die zeitliche Variation der Tiefe der Kaverne bestimmt, die durch Unterspülung mit klaren Wasserbedingungen am Standort von Doppelpfeilern in Tandemanordnung erzeugt wird. Am Beispiel wird mittels der probabilistischen Analyse die Wahrscheinlichkeit eines Stabilitätsverlusts aufgrund der Unterspülung von Doppelpfeilern mit unterschiedlichen Säulenabständen bewertet. Die Auswirkungen der Änderung des Variationskoeffizienten probabilistischer Variablen der Unterspülung sowie der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion auf die Wahrscheinlichkeit eines Stabilitätsverlusts wurden ebenfalls untersucht. Es wurde festgestellt, dass die Auswirkungen der Änderung des Variationskoeffizienten auf die Wahrscheinlichkeit eines Stabilitätsverlusts signifikanter waren als die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Unterspülungstiefe.

Schlüsselwörter:

Brücke, Säule, Wahrscheinlichkeit eines Stabilitätsverlustes, Unterspülung, Tandemanordnung, Unzuverlässigkeit

1. Uvod

Pretjerano podlokavanje oko stupova i upornjaka mostova dovodi do erozije tla oko tih elemenata, što s vremenom može uzrokovati gubitak stabilnosti konstrukcije. Sigurno projektiranje mostova preko širokih rijeka s razvedenim obalama temelji se na pouzdanom određivanju dubine podlokavanja u blizini elemenata mosta. U jednadžbama za deterministički izračun dubine podlokavanja koriste se konstantne vrijednosti varijabli koje utječu na pojavu podlokavanja. Zapravo se može reći da su varijable koje utječu na podlokavanje po svojoj naravi uglavnom probabilističke. Zbog toga se proračun podlokavanja svakako treba provoditi na temelju određivanja nepouzdanosti. Ovisno o magnitudi nepouzdanosti, te stoga o vjerojatnosti gubitka stabilnosti, u projektiranom uporabnom vijeku mosta mogu se očekivati velika oštećenja pa čak i rušenje mosta. Zbog toga je proračun vjerojatnosti gubitka stabilnosti baziran na nepouzdanosti točniji od tradicionalne ocjene stabilnosti pomoću determinističkog faktora sigurnosti [1, 2].

Pouzdanost stupa mosta u odnosu na pojavu podlokavanja može se izračunati pomoću jednadžbe za izračun dubine podlokavanja izvedene na temelju velikog broja osnovnih neovisnih varijabli, s tim da pritom trebaju biti poznate razdiobe vjerojatnosti i koeficijenti varijacije osnovnih varijabli koji se koriste u jednadžbi. Kako bismo bili na strani sigurnosti, treba se provesti i analiza osjetljivosti za razne scenarije koji se mogu očekivati tijekom projektiranog uporabnog vijeka mosta. Na primjer, moguće izmjene u korištenju sliva mogu utjecati na režim voda i nanosa rijeke. Zbog toga se neke varijable kao što su brzina dolaznog toka, dubina toka, karakteristike materijala u koritu itd., mogu razlikovati od prvobitnih vrijednosti usvojenih u fazi projektiranja. To može dovesti ne samo do promjene koeficijentata varijacija već i do promjene razdiobe vjerojatnosti osnovnih varijabli mehanizma podlokavanja. Takva moguća nepovoljna djelovanja mogu se simulirati tako da se tim varijablama zadaju različite vrijednosti koeficijentata varijacije i funkcija gustoće vjerojatnosti [2]. Kako se probabilističkim pristupom utemeljenim na nepouzdanosti pokušava uspostaviti realnija kvantifikacija vjerojatnosti gubitka stabilnosti, takvo projektiranje mjera za zaštitu od podlokavanja može se smatrati konzervativnim. Dakle, konzervativan način projektiranja, u kojem se mjere za zaštitu od podlokavanja projektiraju i određuju na bazi svih nepovoljnih hidrauličkih uvjeta, dovodi do znatnog smanjenja godišnjih troškova održavanja i potrebe za sanacijom šteta uzrokovanih podlokavanjem. Zato se u novije vrijeme teorija pouzdanosti sve češće primjenjuje u projektiranju konstrukcijskih sustava [3]. Jedno od prvih istraživanja podlokavanja stupova mosta, koje se bazira na pouzdanosti, provedeno je u radu [1] gdje se uspostavlja odnos između vjerojatnosti gubitka stabilnosti i faktora sigurnosti za određenu kombinaciju varijabli.

Na mostovima se mogu koristiti i skupine stupova, što ovisi o konstrukcijskim/geotehničkim zahtjevima i uvjetima opterećenja. Kada se koriste dvojni stupovi, o kojima će biti

više riječi u idućem poglavlju, maksimalna trenutačna dubina podlokavanja djelovanjem bistrre vode – u slučajevima kada dolazni tok ne sadrži vučeni nanos – veća je u odnosu na jednostruke stupove i to zbog djelovanja dodatnih mehanizama podlokavanja [4]. Naime, za istu dubinu temeljne stope, podlokavanje je manje izraženo kod jednostrukog stupa pa je i vjerojatnost gubitka stabilnosti bitno manja nego kod dvojnog stupa. Ako se za dvojni stup primjeni jednadžba za jednostruki stup, podcijenit će se mogućnost gubitka stabilnosti konstrukcije, tj. umanjit će se razina sigurnosti mosta. Zato se za ta dva slučaja trebaju provoditi zasebne analize pouzdanosti. U ranijim studijama u kojima je analizirana vjerojatnost gubitka stabilnosti [1, 2], primijenjena metodologija uglavnom se bazirala na jednostrukim stupovima. Nakon analize obrasca pojave podlokavanja na poziciji dvojnih stupova [4], uočena je potreba kvantificiranja vjerojatnosti sloma za dvojne stupove, možda u vidu pionirske studije.

Ovaj je rad nastao s osnovnom namjerom da se ublaži nedostatak tj. manjak radova o neadekvatnoj zastupljenosti ocjene pouzdanosti u analizi vremenske varijacije dubine podlokavanja oko dvojnih stupova mosta. Izračunava se vjerojatnost gubitka stabilnosti podlokavanjem uslijed djelovanja bistrre vode na poziciji dvojnih stupova tandemskog razmještaja, pri čemu se proračun bazira na jednadžbi o dubini podlokavanja koja je razvijena u zasebnoj studiji [5]. U toj je jednadžbi prikazana vremenska varijacija dubine kaverne nastale podlokavanjem oko dvojnih stupova. Nepouzdanosti osnovnih varijabli interpretirane su i definirane koeficijentom varijacije i funkcijama gustoće vjerojatnosti, kojima se karakterizira probabilistička varijacija pojedinačnih varijabli, a to su dubina dolaznog toka, d_v , srednja brzina dolaznog toka, u , te srednja veličina materijala u koritu, D_{50} . Simulacije Monte Carlo korištene su kako bi se generirale slučajne varijable koje utječu na podlokavanje, a radi proračunavanja vjerojatnosti gubitka stabilnosti. Ova metodologija dokazana je pomoću primjera u kojem se uspostavlja odnos između faktora sigurnosti i vjerojatnosti gubitka stabilnosti. Provedena je i analiza osjetljivosti kako bi se ocijenio utjecaj moguće varijacije statističkih podataka na vjerojatnost gubitka stabilnosti. Konačna odluka o dubini zajedničke temeljne stope dvojnog stupa prikazuje se prema najgorem mogućem scenariju, s najvećom vjerojatnošću gubitka stabilnosti na lokaciji mosta.

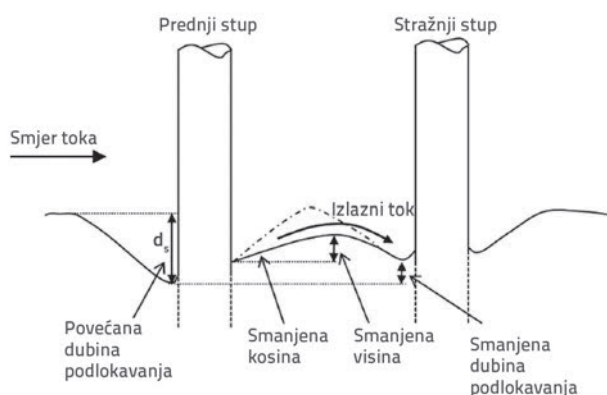
2. Podlokavanje bistrom vodom na poziciji dvojnih stupova

2.1. Mehanizmi podlokavanja dvojnih stupova

U slučaju dvojnih stupova s tandemskim razmještajem, kaverne koje nastaju podlokavanjem uslijed djelovanja bistrre vode na poziciji prednjeg i stražnjeg stupa mogu se preklapati pa se tako formira jedna zajednička kaverna. Kada omjer razmaka između stupova iznosi $b/d > 0,09$ (gdje je b promjer stupa a d međuosni razmak između stupova), tada dolazi do preklapanja,

tj. povezivanja pojedinačnih kaverni na prednjem i stražnjem stupu. Kada omjer razmaka između stupova iznosi $b/d < 0,09$, tada kaverne nastale podlokavanjem djeluju zasebno, tj. nema njihovog povezivanja [6].

Primarni mehanizmi lokalnog podlokavanja na mostu s jednostrukim stupovima su dotok, potkovasti vrtlog i vrtlog traga. Kod dvojnih stupova tandemskog razmještaja, gdje dolazi do povezivanja kaverni nastalih podlokavanjem, javljaju se utjecaji dodatnih mehanizama a to su jačanje, sklanjanje i odvajanje vrtloga [6]. Pritom je mehanizam jačanja odgovoran za povećanje maksimalne trenutačne dubine podlokavanja na dvojnim stupovima u odnosu na odgovarajuće djelovanje kod jednostrukih stupova. Mehanizam jačanja utječe na dubinu podlokavanja prednjeg stupa. Zbog povezivanja kaverni nastalih podlokavanjem na prednjem i stražnjem stupu, dubina podlokavanja na čelu prednjeg stupa povećava se prema spomenutom mehanizmu. Kada dođe do preklapanja, tj. povezivanja rupa nastalih podlokavanjem, tada se smanjuje nagib udarnog pokosa središnje dine. To je akrecijska zona između stupova te se razina korita u toj zoni smanjuje na način prikazan na slici 1. Tako se olakšava pronos materijala u koritu oko prednjeg stupa zbog čega je dubina podlokavanja na gornjem dijelu prednjeg stupa veća u odnosu na odgovarajuću dubinu kod jednostrukog stupa. Intenzitet ove pojave smanjuje se s povećanjem razmaka između stupova [7].



Slika 1. Shematski prikaz mehanizma pojačanja i sklanjanja (nacrtano prema [8])

2.2. Napredovanje podlokavanja na poziciji dvojnih stupova

Eksperimentalno istraživanje opisano u [5, 9] provedeno je u hidromehaničkom laboratoriju Građevinskog fakulteta Sveučilišta Bliski istok u turskom gradu Ankari. Za provedbu eksperimenata korišten je pravokutan hidraulički kanal konstantnog pada, ispunjen istovrsnim materijalom koji tvori korito. Ispitana su dva identična modela tandemskih stupova izrađenih od PVC-a. Pritom su korištena tri različita promjera stupa, b . Prilikom postavljanja stupova korišteni su različiti odnosi razmaka: $b/d = 0,25, 0,33$ i $0,50$. U eksperimentima su

korištena tri različita intenziteta toka, u/u_c , od 0,917 do 0,946, gdje u predstavlja srednju brzinu dolaznog toka a u_c srednju graničnu brzinu dolaznog toka koji uzrokuje kretanje nanosa na površini korita. Povezana tj. zajednička kaverna nastala podlokavanjem dobivena je za sve vrijednosti b/d pod uvjetima protoka bistre vode. Dodatni podaci o postavi eksperimenta, opsegu ispitivanja, postupku i rezultatima, dostupni su u radovima [5, 9]. Fotografija batimetrije korita u jednom od pokusa, za $b = 7,5$ cm, $b/d = 0,25$ i $t = 360$ min., prikazana je na slici 2. na kojoj se vidi zajednička kaverna nastala podlokavanjem oko dvojnih stupova.



Slika 2. Fotografija batimetrije korita

Za dvojne se stupove može projektirati zajednička temeljna stopa, a njena se dubina određuje ovisno o maksimalnoj dubini podlokavanja u neposrednoj blizini stupova [4]. U svakom vremenskom intervalu, na čelu prvog stupa bilježi se maksimalna trenutačna dubina podlokavanja u zajedničkoj kaverni nastaloj podlokavanjem [4]. Dakle, u eksperimentima se u čestim intervalima snima dubina podlokavanja, d_s , na čelu prednjeg stupa u vremenu, t . Kontinuirana dubina podlokavanja mjeri se pomoću ultrazvučnog mjernog sustava SeaTek 5 MHz [10]. Primjenom izmjerenih vrijednosti d_s u jedinici vremena t dobiva se višestruka linearna regresijska jednadžba s koeficijentom determinacije $R^2 = 0,84$ za dubinu podlokavanja na čelu prednjeg stupa [5]:

$$\frac{d_s}{b} = 0.801 \left(\frac{d_0}{b} \right)^{0.155} (F_d)^{2.357} (T_s)^{0.123} \left(\frac{b}{d} \right)^{0.102} \quad (1)$$

gdje je d_s dubina podlokavanja, b je promjer stupa, d_0 je dubina dolaznog toka, F_d je Froudeov broj, $T_s = t D_{50} (\Delta g D_{50})^{0.5} / b^2$ je bezdimenzijsko vrijeme, t je vrijeme, D_{50} je srednja veličina materijala u koritu, Δ je relativna uronjena gustoća čestica materijala u koritu, g je ubrzanje sile teže, a d je međuosni razmak između stupova. Prema saznanjima autora ovog rada, navedena jednadžba je prvi u literaturi zabilježeni prikaz isključivo vremenske varijacije dubine kaverne nastale podlokavanjem

za dvojne stupove. Rezultati eksperimentalnog istraživanja pokazuju da maksimalna trenutačna dubina podlokavanja raste s povećanjem odnosa razmaka između stupova, b/d , u analiziranom rasponu vrijednosti.

3. Interpretacija izvora nepouzdanosti u analizi podlokavanja

Točnost u proračunu vjerojatnosti gubitka stabilnosti konstrukcije usko je povezana s razinom na kojoj su nepouzdanosti iz raznih izvora uključene u simulacije. Nepouzdanost modela koja proizlazi iz izraza (1) ignorira se tj. u analizu se uključuje samo nepouzdanost koja proizlazi iz ulaznih parametara. Većina osnovnih varijabli koje se odnose na podlokavanje same su po sebi nepouzdanost, a to su primjerice brzina i dubina dolaznog toka te karakteristike materijala u koritu (što uključuje granulometrijski sastav i vrstu tog materijala). S druge strane, kao determinističke su varijable usvojene vrijednosti kao što su veličina i razmak stupova te trajanje visokih voda. Na raspodjelu brzina može utjecati progresivno mijenjanje hrapavosti korita na rijekama s čestim bujičnim poplavama. Zato su vremenske varijacije brzine i dubine toka u nestalnim koritima moguće čak i pri konstantnom vodostaju. Nepouzdanost u pogledu brzine toka proizlazi iz nedostatka preciznih prototipskih podataka, i to zbog poteškoća u korištenju mjernih uređaja u prirodnim uvjetima: zbog nestalnog korita, zbog neodgovarajuće preciznosti uređaja i lokacije mjerenja te zbog ljudske pogreške. Srednja veličina materijala u koritu ne može biti konstantna u prirodnim uvjetima, te isto tako ne može biti iskazana funkcijom gustoće vjerojatnosti za uvjete nestalnog korita. Granulometrija može varirati i od poplave do poplave. Stoga se može reći da je ona po svojoj prirodi nepouzdana [3, 11, 12]. S druge strane, kada se radi o grupi stupova, moguće je i dodatni porast nepouzdanosti u pogledu brzine i dubine toka, što ovisi o stupnju interferencije turbulentnog polja toka između stupova mosta. Nažalost, ponekad nisu dovoljno precizni rezultati koji se dobivaju pomoću mjerača brzine toka u polju toka s kombiniranim vremenski uvjetovanim utjecajima vrtloga traga na poziciji prednjeg stupa te potkovastog vrtloga na stražnjem stupu. Polje toka može se simulirati i računalnim programom primjenom trodimenzionalnog pristupa baziranog na detaljnom modeliranju turbulencije. Međutim, u okviru tog pristupa javlja se i problem baždarenja jer su mjerenja brzine povezana s nepouzdanostima ako nisu provedena uz primjenu opsežnih i preciznih nizova podataka. Stoga se u okviru preliminarnog pristupa spomenute nepouzdanosti mogu proizvoljno povećati za slučaj jednog stupa, te se stoga takvi mogući utjecaji mogu uključiti u analizu osjetljivosti.

Nepouzdanost varijable može se izraziti pomoću koeficijenta varijacije, $COV = \sigma/\mu$, gdje je σ standardna devijacija a μ je srednja vrijednost varijable. Odstupanje varijable od njene srednje vrijednosti može se odrediti pomoću mjerenja i opažanja.

4. Problem primjene

Proračun vjerojatnosti gubitka stabilnosti dokazuje se sljedećim primjerom. Dostupni su sljedeći podaci o lokaciji mosta: promjer identičnih okruglih stupova tandemskog razmještaja iznosi 1,8 m, srednja vrijednost dubine dolaznog toka je 0,8 m, a srednja brzina dolaznog toka iznosi 0,85 m/s. Srednja vrijednost medijana veličine materijala u koritu je 6 mm, međuosni razmak između stupova je 4,55 m, a trajanje visokih voda (t_p) je 6 sati. U analizama se sljedeće vrijednosti smatraju probabilističkim varijablama: srednja brzina dolaznog toka, dubina dolaznog toka (dotoka) i srednja veličina materijala u koritu. Sljedeće se vrijednosti u analizama smatraju determinističkim varijablama: veličina stupa, trajanje poplave te razmak između stupova. Na temelju analize konstrukcije i geotehničkih istraživanja usvojeno je da dubina zajedničke temeljne stope dvojnih stupova, (d_s) iznosi otprilike 2,0 m. Ispitane su vrijednosti u rasponu od 1,7 m i 2,3 m kako bi se odredio utjecaji dubine stope stupa na vjerojatnost gubitka stabilnosti. Na temelju spomenutih podataka može se prema [13] izračunati da srednja granična brzina dolaznog toka (u_c) iznosi 1,0 m/s:

$$\frac{u_c^2}{\Delta g D_{50}} = 2,0 \left(\frac{D_{50}}{d_o} \right)^{-1/3} \quad (2)$$

gdje je u_c srednja granična brzina dolaznog toka, Δ je relativna uronjena gustoća čestica materijala u koritu, g je ubrzanje sile teže, D_{50} je srednja veličina materijala u koritu, a d_o je dubina dolaznog toka. Ovdje se može usvojiti da vrijednost Δ za kvarcni pijesak iznosi 1,65 [13]. Dakle, u koritu rijeke prevladava bistra voda te se dubina podlokavanja brzo mijenja odmah pri nailasku visokih voda. Nakon toga se prirast brzine produblivanja kaverne smanjuje te dubina podlokavanja asimptotski doseže dubinu ravnoteže [13]. Kada se prema jednadžbi (1) vrijednost d_s iskazuje usvajanjem vrijednosti $\Delta = 1,65$ i $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, dobiva se jednadžba:

$$d_s = 0,00361 b^{0,701} d_o^{0,155} u^{2,357} D_{50}^{-0,994} t^{0,123} d^{0,102} \quad (3)$$

gdje je d_s dubina podlokavanja, b je promjer stupa, d_o je dubina dolaznog toka, a u je srednja brzina dolaznog toka, D_{50} je veličina srednje čestice materijala u koritu, t je vrijeme, a d je međuosni razmak između stupova.

4.1. Proračun vjerojatnosti gubitka stabilnosti

Prema tradicionalnom determinističkom pristupu, treba se postići faktor sigurnosti koji je veći od jedan. Međutim, kada se uzmu u obzir nepouzdanosti koje se odnose na osnovne varijable, može se odrediti vjerojatnost gubitka stabilnosti, P_f (rizik), koja se ne može prihvatiti kao pouzdana vrijednost. Prihvatljivost rizika ovisi o značaju i lokaciji mosta. Na primjer,

u SAD-u se za mostove preko malih rijeka može usvojiti granična vrijednost od $P_f = 10^{-3}$, dok kod većih mostova, s većim prometnim opterećenjem, ta vrijednost može iznositi 10^{-5} [14]. Jasno je da građevine tijekom uporabljivosti mogu biti izložene opterećenjima koja dovode do gubitka stabilnosti. Ipak, vjerojatnost gubitka stabilnosti konstrukcije može se smanjiti redovnim pregledima i odgovarajućim održavanjem. Primjerice, razina otpornosti konstrukcije može se povećati polaganjem kamenog nabačaja ili djelomično injektiranog kamenog nabačaja oko stupova mosta. Osjetljivost mosta na podlokavanje može se ocijeniti u okviru redovnih pregleda konstrukcije [15, 16]. Tako se može ocijeniti stanje građevine te se po potrebi mogu poduzeti odgovarajuće preventivne mjere (dodatne sanacije).

Vjerojatnost gubitka stabilnosti, P_f , mosta zbog pretjeranog podlokavanja oko njegovih stupova definirana je u radu [1] kao vjerojatnost kod koje je margina sigurnosti, SM , manja od nule. Vrijednosti SM i P_f definirane su kao $SM = d_f - d_s$ tj. $P_f = P(SM < 0)$, gdje je d_f dubina zajedničke temeljne stope dvojnih stupova, d_s je dubina podlokavanja, a P je vjerojatnost.

Determinističke varijable, u kojima se rizik proračunava pomoću srednje vrijednosti parametra, prikazane su u tablici 1. U toj tablici slučaj br. 2 predstavlja originalan slučaj koji je definiran u problemu primjene, dok u Slučajevima 1 i 3 imamo različite razmake i promjere stupova. U slučajevima 4 i 5 razmaci između stupova se razlikuju ali im promjer ostaje isti. Što se tiče zahtjeva konstrukcije, veličina stupa raste u intervalima od 20 cm usporedo s povećanjem razmaka između stupova. Slučaj br. 2 zapravo predstavlja tipičnu primjenu za most s dva prometna traka. Osnovna ideja na kojoj se zasniva odabir slučajeva prikazanih u tablici 2. sastoji se u ograničavanju defleksije ploče mosta, tj. kada su stupovi manji, potreban je i manji razmak između stupova. S druge strane, veći se razmak može primijeniti kod debljih stupova. Varijabilnost nepouzdanih parametara, d_0 i u , raste usporedo sa smanjenjem razmaka, a tome je razlog interferencija polja toka oko stupova. U slučaju br. 3 vrijednosti COV smanjuju se zbog povećanja razmaka između stupova. Za probabilističke se varijable generiraju proizvoljni brojevi pomoću

funkcije gustoće vjerojatnosti (eng. *Probability Density Function* - PDF), srednje vrijednosti i koeficijenta varijacije varijable. Za te su potrebe funkcije gustoće vjerojatnosti i vrijednosti koeficijenta varijacije d_0 , u , i D_{50} , dobivene iz prethodnih studija [2, 3, 11, 12, 17, 18], a preporučene vrijednosti PDF i COV koriste se kako je prikazano u kombinaciji (A) u tablici 2. Pretpostavljeno je da most nije u području utjecaja toka po inundacijskom pojasu na glavno korito. Dakle, na forme dna i vrstu podlokavanja ne utječe ništa drugo osim lokalnih karakteristika toka. Odnos dubine temeljne stope stupa i najveće dubine podlokavanja nakon poplave definira se kao faktor sigurnosti, FS . Osim toga, provode se i dodatne analize osjetljivosti kako bi se istražili mogući utjecaji vrste razdiobe i koeficijenta varijacije varijabli na vjerojatnost gubitka stabilnosti. U literaturi se za iste varijable definiraju različite vrste vrijednosti PDF i COV, tj. d_0 , u , i D_{50} [2, 3]. Stoga su u ovom radu izmijenjene vrste razdioba i vrijednosti COV te su prikazane u kombinacijama (B)s i (C)s u tablici 2. U kombinaciji A, u kojoj su prikazana statistička svojstva parametara iz novije literature, vrijednosti koeficijenta varijacije relativno su niže, a koristi se Gaussova razdioba (normalna razdioba). Od kombinacije A do kombinacije C, vrijednosti COV donekle se povećavaju, a funkcije gustoće vjerojatnosti srednje brzine dolaznog toka i srednje veličine čestica variraju od normalne razdiobe do trokutaste i uniformne razdiobe. Izuzetak su slučajevi 4 i 5 u kojima se istražuje utjecaj razmaka stupova mosta na vjerojatnost gubitka stabilnosti, te se analiziraju statistički podaci o dubini podlokavanja.

Tablica 1. Determinističke varijable i njihove vrijednosti za razmatrane slučajeve

Slučaj	d [m]	b [m]	t_f [hr]
1	3,60	1,6	6
2	4,55	1,8	6
3	7,20	2,0	6
4	3,60	1,8	6
5	5,45	1,8	6

Tablica 2. Statistička svojstva razmatranih parametara podlokavanja

Varijable	Srednja vrijednost [μ]	Komb.	1. slučaj	2. slučaj	3. slučaj	4. slučaj	5. slučaj	PDF
			COV	COV	COV	COV	COV	
d_0	0,8 m	A	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	Normalna
		B	0,20	0,15	0,12	NA	NA	Normalna
		C	0,20	0,15	0,12	NA	NA	Normalna
u	0,85 m/s	A	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	Normalna
		B	0,020	0,015	0,012	NA	NA	Normalna
		C	0,015	0,010	0,008	NA	NA	Trokutasta
D_{50}	6 mm	A	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	Normalna
		B	0,075	0,075	0,075	NA	NA	Normalna
		C	0,075	0,075	0,075	NA	NA	Uniformna

U proračunu vjerojatnosti gubitka stabilnosti pomoću $P_f = P(SM < 0)$, za generiranje slučajnih brojeva koristi se simulacija Monte Carlo, kao i kod prijašnjih istraživanja za jednostruke stupove [1, 2]. Zbog utjecaja na točnost vrijednosti P_f treba se u metodi Monte Carlo odrediti broj simulacija. Koeficijent varijacije generiranih slučajnih varijabli smanjuje se usporedo s povećanjem broja simulacija i one se približavaju srednjoj vrijednosti. U ovom je istraživanju provedeno 15000 simulacija kako bi se dobile precizne vrijednosti P_f .

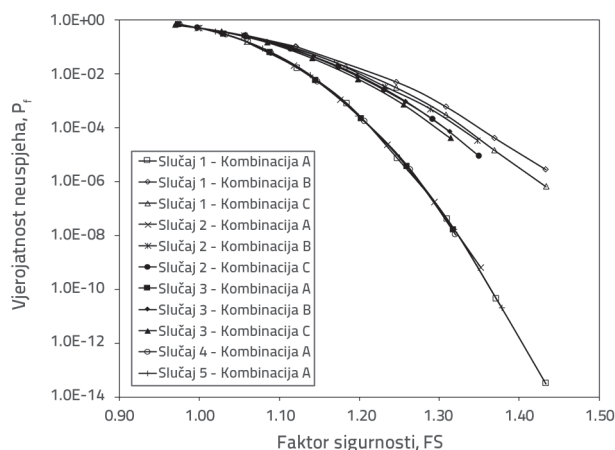
4.2. Rezultati i rasprava

Za sve su slučajeve i kombinacije izračunane srednje vrijednosti i koeficijenti varijacije dubina podlokavanja stupa, faktori sigurnosti, te vjerojatnosti gubitka stabilnosti. Rezultati proračuna prikazani su u tablici 3. U slučajevima od 1 do 3, srednje dubine podlokavanja, $\mu(d_s)$, dobivene tijekom simulacija, ne razlikuju se bitno u pojedinačnim kombinacijama, ali se zato uočava znatna promjena koeficijenta varijacije dubine podlokavanja, d_s . Koeficijent varijacije (COV) znatno varira (do 64 %) u kombinacijama usporedo s promjenom vrijednosti COV i PDF za dubinu dolaznog toka, brzinu i veličinu materijala u koritu. Isto tako, vjerojatnost gubitka stabilnosti znatno varira od kombinacije do kombinacije. Promjene vrijednosti $COV(d_s)$ i P_f značajnije su u kombinaciji (B)s ako se ona usporedi s kombinacijom (C)s. Može se stoga ustvrditi da su vrijednosti $COV(d_s)$ i vjerojatnost gubitka stabilnosti osjetljivije na promjene koeficijenta varijacije ulaznih varijabli u odnosu na funkcije gustoće vjerojatnosti. Uz to se može usporediti slučaj 2 – kombinacija (A) sa slučajevima 4 i 5, gdje je promjer stupa isti ali ne i razmak između stupova. Može se uočiti da se s porastom razmaka između tandemskih stupova smanjuje srednja dubina podlokavanja stupa, tj. da raste faktor sigurnosti dok se istovremeno smanjuje vjerojatnost gubitka stabilnosti. To je očekivan rezultat, jer je dubina podlokavanja obrnuto proporcionalna razmaku između stupova (vidi izraz (3)).

Tablica 3. Utjecaj raznih ulaznih vrijednosti COV i PDF na statistiku dubine podlokavanja i sigurnost mosta

Slučaj	Komb.	$\mu(d_s)$ [m]	COV (d_s)	P_f
1	A	1,604	0,058	$0,007 \times 10^{-3}$
	B	1,608	0,095	$5,000 \times 10^{-3}$
	C	1,607	0,089	$3,080 \times 10^{-3}$
2	A	1,701	0,058	$1,080 \times 10^{-3}$
	B	1,705	0,087	$24,100 \times 10^{-3}$
	C	1,704	0,083	$16,900 \times 10^{-3}$
3	A	1,748	0,058	$5,750 \times 10^{-3}$
	B	1,753	0,083	$43,200 \times 10^{-3}$
	C	1,754	0,079	$37,400 \times 10^{-3}$
4	A	1,742	0,058	$4,840 \times 10^{-3}$
5	A	1,669	0,058	$0,272 \times 10^{-3}$

Osim toga, na slici 3. prikazana je vjerojatnost gubitka stabilnosti u odnosu na faktor sigurnosti. Kod konstantne dubine temeljne stope, faktor sigurnosti se u kombinacijama smanjuje usporedo s povećanjem dubine podlokavanja. Uz to, kod povećanja vrijednosti COV za parametre, probablističke se analize provode s vrijednostima udaljenima od srednje vrijednosti analiziranog parametra. To dovodi do manjih dubina podlokavanja ako se vrijednosti parametra uzimaju s lijeve strane razdiobe vjerojatnosti. S druge strane, dubine podlokavanja su veće ako se vrijednosti parametra uzimaju s desne strane razdiobe. Vrijednosti se nasumce biraju na lijevoj i desnoj strani srednje vrijednosti razdiobe pa njihov broj na jednoj i na drugoj strani nije podudarano. Dakle, vrijednost P_f koja je najčešće registrirana u 15000 simulacija Monte Carlo smatra se ciljom vrijednošću P_f . Kao rezultat može se navesti kako vjerojatnost da će doći do veće dubine podlokavanja raste s porastom vrijednosti COV razmatranih varijabli (vidi sliku 3.).



Slika 3. Utjecaj faktora sigurnosti na vjerojatnost gubitka stabilnosti

U svim slučajevima, u kombinaciji A zabilježene su minimalne vjerojatnosti gubitka stabilnosti za određeni faktor sigurnosti, i to zato što su u dotičnoj kombinaciji vrijednosti COV najniže. U kombinacijama B i C, gdje su vrijednosti COV više, ustanovljeno je da su vrijednosti P_f čak i do 10^7 puta više od onih u kombinaciji A. Razlika između izračunate vjerojatnosti gubitka stabilnosti mosta manja je za Kombinacije B i C u odnosu na kombinaciju A. To pokazuje da promjene funkcija gustoće vjerojatnosti za u i D_{50} od normalne do trokutaste i uniformne raspodjele ne utječu bitno na probablističko ponašanje mosta koji se analizira u ovom radu. Stoga se može ustvrditi da je vjerojatnost gubitka stabilnosti mosta manje osjetljiva na variranje tipa funkcije gustoće vjerojatnosti varijabli. Međutim, na sigurnost konstrukcije utječu čak i male promjene vrijednosti COV. U projektiranju mostova preko rijeka koji se ne nalaze u gusto naseljenim urbanim područjima, vrijednost P_f niža od 10^{-3} ($P_f \leq 0,001$) može se smatrati prihvatljivom u pogledu sigurnosti konstrukcije [1]. Za mostove s tandemskeim stupovima, takva vrijednost P_f bilježi se kada je faktor sigurnosti veći od 1.30 u svim razmatranim scenarijima. Konačna odluka o dubini

zajedničke temeljne stope dvojnih stupova donosi se na temelju najgoreg mogućeg scenarija koji bi se mogao ostvariti na dotičnom mostu. Najgori mogući scenarij može se dobiti u okviru zajedničke analize variranja hidroloških i hidrauličkih značajki i karakteristika materijala u koritu tijekom uporabnog trajanja mosta. Moguće promjene u korištenju sliva, klimatski faktori, lokalni uvjeti na široj lokaciji mosta itd., mogu dovesti do bitno drugačijih uvjeta koji se ne podudaraju s podacima dobivenima tijekom projektiranja. Zato se u obzir trebaju uzeti očekivane promjene prije spomenutih karakteristika ovisno o položaju mosta unutar sliva, te se na toj osnovi trebaju pripisati vrijednosti COV.

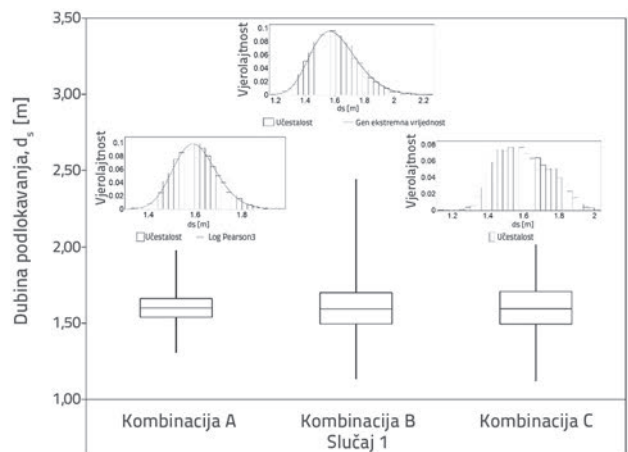
U ovom se istraživanju jednadžba za vremensku varijaciju dubine kaverne nastale podlokavanjem oko dvojnih stupova ne uspoređuje s jednadžbom za određivanje iste vrijednosti za jednostruke stupove. Zbog utjecaja ojačanja, maksimalna trenutačna dubina podlokavanja veća je kod dvojnih stupova u odnosu na jednostruke stupove. Za istu dubinu stope, jednostruki će stup biti manje izložen podlokavanju u odnosu na dvostruki, a njegove vrijednosti P_f bit će mnogo niže nego u slučaju dvojnog stupa. Stoga, ako se jednadžba za jednostruki stup koristi za dvojni stup, podcjenjuje se vjerojatnost gubitka stabilnosti te se umanjuje sigurnost mosta. To upućuje na važnost provođenja zasebnih analiza pouzdanosti za ta dva slučaja. U ovom se istraživanju analizira podlokavanje dvojnih stupova s aspekta pouzdanosti, čime se želi ublažiti sadašnji nedostatak publiciranih radova o ocjeni vremenske varijacije dubine podlokavanja oko dvojnih stupova mostova.

Cilj je ovog rada odrediti reprezentativnu funkciju gustoće vjerojatnosti za podlokavanje dvojnih stupova. Zato se trebaju detaljno ocijeniti statistička obilježja dubine podlokavanja oko dvojnih stupova mostova. U tom se smislu statistički analiziraju podaci o dubini podlokavanja dobiveni na temelju simulacija Monte Carlo, a na bazi deskriptivnih statističkih podataka, histograma učestalosti i kutijastih dijagrama. Rezultati deskriptivnih statističkih analiza smatraju se pomoćnim sredstvom za tumačenje podataka te nisu iskazani u ovom radu. Međutim, histogrami učestalosti, kutijasti dijagrami i rezultati testa prilagodbe funkcije gustoće vrlo su značajni te su stoga detaljno ovdje prikazani. Histogrami učestalosti, prilagođene funkcije gustoće vjerojatnosti i kutijasti dijagrami dubine podlokavanja, prikazani su za sve slučajeve i kombinacije na slikama od 4. do 7. Kutijasti dijagrami omogućuju prikaz minimalnih, maksimalnih, srednjih te prvih i trećih kvartila podataka. Osim toga, ti dijagrami pokazuju raspršenost i simetriju raspodjele. Prema dobivenim rezultatima, u Kombinaciji A dobivaju se relativno simetrične raspodjele. U kombinaciji B raspodjele su uglavnom nagnute ulijevo, dok su raspodjele u kombinaciji C relativno simetrične. Potrebno je napomenuti da, bez obzira na simetričnost raspodjela u kombinaciji C, one su u toj kombinaciji spljoštene pa se stoga teško mogu definirati pomoću zajedničke funkcije gustoće vjerojatnosti. Na slici 7. vidimo da su obrasci raspodjela dubina podlokavanja stupova za slučajeve 2, 4 i 5 vrlo slični u smislu asimetričnosti

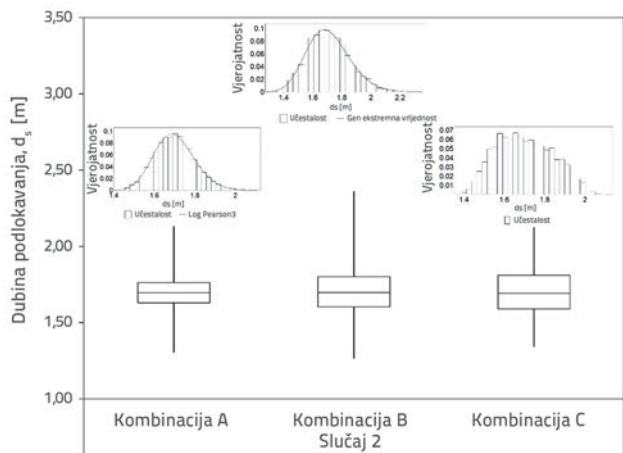
i spljoštenosti. Međutim njihove srednje vrijednosti i medijani se razlikuju. U odnosu na ostale slučajeve, slučaj 4 ima najveću srednju vrijednost i medijan.

U ovom se istraživanju ispituju probabilistička svojstva dubine podlokavanja oko tandemskih stupova mosta, a ona se karakteriziraju pomoću funkcije gustoće vjerojatnosti. Za to se koriste dva uobičajena testa prilagodbe, Kolmogorov-Smirnov test i hi-kvadrat test, i to za dvije razine značajnosti: $\alpha = 5\%$ i $\alpha = 10\%$ [19]. Obje ocjene prilagodbe mogu se primijeniti za dobiveni niz podataka o dubini podlokavanja stupa. Prilagođene razdiobe su kontinuirane pa se može provesti Kolmogorov-Smirnov test. Niz podataka relativno je velik pa se lako može podijeliti u manje podskupove tj. binarne nizove. Može se dakle primijeniti i hi-kvadrat test [19]. Ispitane funkcije gustoće vjerojatnosti sastoje se od najčešćih razdioba koje se koriste u hidrotehnici, a te razdiobe su normalna (N), log-normalna (LN), 3-parameterska log-normalna (LN-3P), Gamma (G), Log-Pearsonova tip III (LPT3) i generalizirana razdioba ekstremnih vrijednosti (GEV). Prilagođena razdioba se prihvaća ako je prihvaćena u jednom od testova. Odbijena je ako nije prihvaćena u oba testa. Rezultati ocjene prilagodbe iskazani su u tablici 4. U toj tablici slovo A označava „prihvaćeno“ a slovo B „odbijeno“. Najbolje vrijednosti PDF ispitane prema Kolmogorov-Smirnovu testu označene su u tablici jednom zvjezdicom, dok su najbolje vrijednosti PDF prema hi-kvadrat testu označene s dvije zvjezdice. Dobiveni rezultati pokazuju da se za kombinacije A i B u svim slučajevima primjenjuju gotovo sve ispitane vrijednosti PDF.

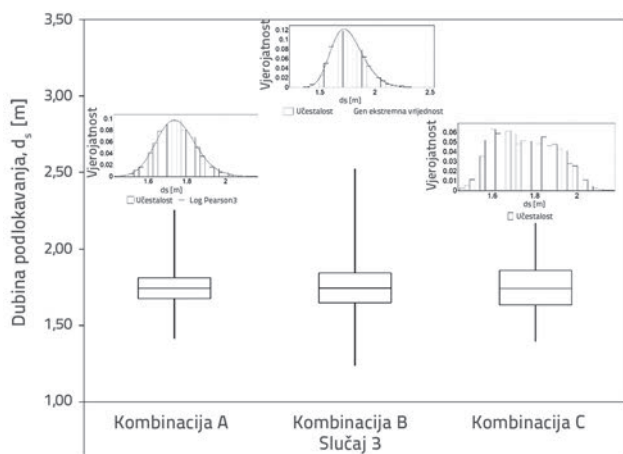
Ustanovljeno je da su razdiobe LPT3 i GEM u probabilističkom smislu najbolje za karakteriziranje dubine podlokavanja oko tandemskih stupova mosta. Međutim, dubina podlokavanja ne može se definirati zajedničkim tipom vrijednosti PDF za kombinaciju C za svaki slučaj u kojem je varirana vrijednost PDF za srednju brzinu dolaznog toka i za medijan veličine materijala u koritu. Tome je razlog kurtičnost (spljoštenost) histograma učestalosti u kombinaciji. Na histogramima se vidi negativan višak kurtičnosti, što znači da je raspodjela spljoštena (vidi kombinaciju (C) na slikama od 4. do 6.).



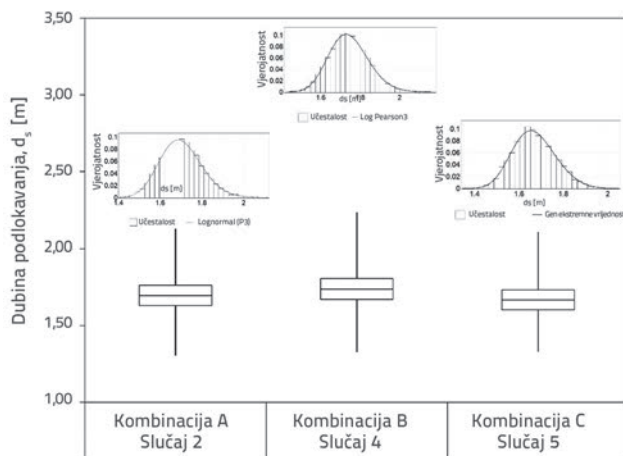
Slika 4. Kutijasti dijagrami i histogrami učestalosti za dubine podlokavanja u slučaju 1



Slika 5. Kutijasti dijagrami i histogrami učestalosti za dubine podlokavanja u slučaju 2



Slika 6. Kutijasti dijagrami i histogrami učestalosti za dubine podlokavanja u slučaju 3



Slika 7. Kutijasti dijagrami i histogrami učestalosti za dubine podlokavanja u slučajevima 4 i 5

Tablica 4. Rezultati ocjene prilagodbe za funkcije gustoće vjerojatnosti

Slučaj	Komb.	α	Vrsta vrijednosti PDF					
			N	LN	LN-3P	G	LPT3	GEV
1	A	0,10	R	A	A	A	A*/**	A
		0,05	A	A	A	A	A*/**	A
	B	0,10	R	A	A	R	A	A*/**
		0,05	R	A	A	R	A	A*/**
	C	0,10	R	R	R	R	R	R
		0,05	R	R	R	R	R	R
2	A	0,10	R	A	A*	A	A**	A
		0,05	R	A	A*	A	A**	A
	B	0,10	R	A	A	R	A*/**	A
		0,05	R	A	A	A	A*/**	A
	C	0,10	R	R	R	R	R	R
		0,05	R	R	R	R	R	R
3	A	0,10	R	A	A	A	A*	A**
		0,05	R	A	A	A	A*	A**
	B	0,10	R	A	A	R	A	A*/**
		0,05	R	A	A	A	A	A*/**
	C	0,10	R	R	R	R	R	R
		0,05	R	R	R	R	R	R
4	A	0,10	R	A	A**	A	A*	A
		0,05	R	A	A**	A	A*	A
5	A	0,10	R	A	A	A	A**	A*
		0,05	R	A	A	A	A**	A*

* Najprilagođenija funkcija gustoće vjerojatnosti prema Kolmogorov-Smirnovu testu za ocjenu prilagodbe
 ** Najprilagođenija funkcija gustoće vjerojatnosti prema hi-kvadrat testu za ocjenu prilagodbe

5. Zaključak

Ovaj je rad pionirsko istraživanje koja je provedeno kako bi se odredila vjerojatnost gubitka stabilnosti uslijed podlokavanja dvojnih stupova tandemskeg razmještaja. Izvori nepouzdanosti, povezani s utjecajnim varijablama na vremensku varijaciju dubine kaverne nastale podlokavanjem u uvjetima bistrer vode na dvojne stupove, tumače se i definiraju pomoću odgovarajućih razdioba vjerojatnosti i koeficijenata varijacije, COV. Utjecaji promjene koeficijenata varijacije i razdiobe vjerojatnosti ulaznih varijabli, tj. dubina dolaznog toka, srednja brzina dolaznog toka, te medijan materijala u koritu, analiziraju se kroz promjenu koeficijenta varijacije za dubinu podlokavanja i vjerojatnost gubitka stabilnosti. Ustanovljeno je da su rezultati mnogo osjetljiviji na promjenu vrijednosti COV nego na razdiobu vjerojatnosti. Može se uočiti da vjerojatnost gubitka stabilnosti raste s porastom koeficijenta varijacije koji je pripisan

varijablama. Ispitan je i utjecaj razmaka stupova i zaključeno je da se s porastom razmaka između stupova smanjuje srednja dubina podlokavanja stupa pa se tako umanjuje i vjerojatnost da će doći do gubitka stabilnosti. Kao doprinos stanju znanja područja, predlaže se reprezentativna funkcija gustoće vjerojatnosti za analizu podlokavanja dvojnih stupova. Rezultati ocjene prilagodbe pokazuju da raspodjela Log-Pearson tip

III, i generalizirana razdioba ekstremnih vrijednosti, najbolje ocrtavaju podlokavanje dvojnih stupova. I, na kraju, čitavo se istraživanje može primijeniti na stvarnom slučaju određivanjem dubine zajedničke temeljne stope dvojnih stupova primjenom najgorega mogućeg scenarija koji može dovesti do najviše vjerojatnosti gubitka stabilnosti uslijed podlokavanja dvojnih stupova.

LITERATURA

- [1] Johnson, P.A.: Reliability based Pier Scour Engineering, *Journal of Hydraulic Engineering*, 118 (1992) 10, pp. 1344–1358, [https://10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1992\)118:10\(1344\)](https://10.1061/(ASCE)0733-9429(1992)118:10(1344)).
- [2] Yanmaz, A.M., Calamak, M.: Evaluation of Scour Risk at Foundations of River Bridges, *Teknik Dergi/Technical Journal of Turkish Chamber of Civil Engineers*, 27 (2016) 3, pp. 7533–7549.
- [3] Johnson, P.A.: Uncertainty of Hydraulic Parameters, *Journal of Hydraulic Engineering*, 122 (1996) 2, pp. 112–114, [https://10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1996\)122:2\(112\)](https://10.1061/(ASCE)0733-9429(1996)122:2(112)).
- [4] Selamoglu, M.: Modeling Temporal Variation of Scouring at Dual Bridge Piers, PhD Thesis, Orta Dogu Teknik Universitesi, Ankara, Turkey, 2015.
- [5] Yilmaz, M., Yanmaz, A.M., Koken, M.: Temporal Evolution of Clear Water Scour at Dual Bridge Piers, *Teknik Dergi/Technical Journal of Turkish Chamber of Civil Engineers*, 29 (2018) 1, pp. 8167–8184, <https://10.18400/tekderg.345263>.
- [6] Hannah, C.R.: Scour at Pile Groups, Research Rep No 28-3, Civil Engineering Dept, Univ of Canterbury, Christchurch, New Zealand, 1978.
- [7] Hosseini, R., Amini, A.: Scour Depth Estimation Methods around Pile Groups, *KSCCE Journal of Civil Engineering*, 19 (2015) 7, pp. 2144–2156, <https://10.1007/s12205-015-0594-7>.
- [8] Nazariha, M.: Design Relationships for Maximum Local Scour Depth for Bridge Pier Groups, PhD Thesis, University of Ottawa, Ottawa, Canada, 1996.
- [9] Yilmaz, M., Yanmaz, A.M., Koken, M.: Clear-Water Scour Evolution at Dual Bridge Piers, *Canadian Journal of Civil Engineering*, 44 (2017) 4, pp. 298–307, <https://10.1139/cjce-2016-0053>.
- [10] SeaTek Instrumentation and Engineering, <http://seatek.members.atlantic.net/>, 05/04/2015.
- [11] Yanmaz, A.M., Cicekdag, O.: Composite Reliability Model for Local Scour around Cylindrical Bridge Piers, *Canadian Journal of Civil Engineering*, 28 (2001) 3, pp. 520–535, <https://10.1139/I01-009>.
- [12] Yanmaz, A.M.: Overtopping Risk Assessment in River Diversion Facility Design, *Canadian Journal of Civil Engineering*, 27 (2000) 2, pp. 319–326, <https://10.1139/I99-074>.
- [13] Yanmaz, A.M.: Köprü Hidroliği (Bridge Hydraulics), METU Press, Ankara, Turkey, 2002.
- [14] Lagasse, P.F., Ghosn, M., Johnson, P.A., Zevenbergen, L.W., Clopper, P.E.: Risk-Based Approach for Bridge Scour Prediction, Final Rep National Cooperative Highway Research Program, Transportation Research Board, National Research Council, Washington DC, USA, 2013.
- [15] Yanmaz, A.M., Caner, A., Berk, A.: Renovation of a Safety-Inspection Methodology for River Bridges, *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 21 (2007) 5, pp. 382–389, [https://10.1061/\(ASCE\)0887-3828\(2007\)21:5\(382\)](https://10.1061/(ASCE)0887-3828(2007)21:5(382)).
- [16] Caner, A., Yanmaz, A.M., Yakut, A., Avsar, O., Yilmaz, T.: Service Life Assessment of Existing Highway Bridges with No Planned Regular Inspections, *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 22 (2008) 2, pp. 108–114, [https://10.1061/\(ASCE\)0887-3828\(2008\)22:2\(108\)](https://10.1061/(ASCE)0887-3828(2008)22:2(108)).
- [17] Muzzammil, M., Siddiqui, N.A., Siddiqui, A.F.: Reliability Considerations in Bridge Pier Scouring, *Structural Engineering and Mechanics*, 28 (2008) 1, pp. 1–18, <https://10.12989/sem.2008.28.1.001>.
- [18] Johnson, P.A.: Fault Tree Analysis of Bridge Failure due to Scour and Channel Instability, *Journal of Infrastructure Systems*, 5 (1999) 1, pp. 35–41, [https://10.1061/\(ASCE\)1076-0342\(1999\)5:1\(35\)](https://10.1061/(ASCE)1076-0342(1999)5:1(35)).
- [19] Ang, A.H.S., Tang, W.H.: *Probability Concepts in Engineering: Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering*, John Wiley & Sons, New York, 2007.