POUČAVANJE I UČENJE MATEMATIKE – zadaci koji zahtijevaju stalno prilagođavanje kroz primjer iz teorije grafova

Teaching and learning Maths-Tasks that requre constant adaptation on the example of graph theory

SAŽETAK:

U radu je prikazano iskustvo poučavanja i učenja matematike uz ishode učenja usmjerenih na matematičke kompetencije. Navedeni su problemi koji se pri tome javljaju i razmatrana je ideja kako ih riješiti na željeni način. Da bi se to ilustriralo, priložen je dio studentskog rada koji je izveden primjenom matematičkih kompetencija u rješavanju jednog problema iz stvarnog života (real-life task).

KLJUČNE RIJEČI: MATEMATIČKA IZOBRAZBA, MATEMATIČKE KOMPETENCIJE, PROCESI POUČAVANJA – UČENJA, GRAF

ABSTRACT:

The paper presents experience with teaching and learning mathematics with learning outcomes for mathematical competencies in bachelor studies at the Faculty of Geodesy and Geoinformatics.
Problems occuring in performing so are discussed and an idea of how to solve them is considered. To illustrate this, the paper also presents part of students' project work performed by applying mathematical competencies in solving one real-life task.

KEYWORDS: MATHEMATICS EDUCATION, MATHEMATICAL COMPETENCE, TEACHING-LEARNING PROCESSES, CHART

MSC 2010: 86A30, 90C35, 97B10, 97C70

1. O nastavi matematike

Poučavanje matematike na bilo kojem tehničkom fakultetu zadatak je koji zahtijeva stalno prilagođavanje. S jedne strane, obavezni smo slijediti potrebe naših kolega inženjera koji predaju stručne predmete; s druge strane, moramo se prilagoditi promjenama povezanim s novim vrstama znanja, posebnostima učenja, načinom komunikacije kao i stajalištima naših studenata, posebno brucoša.

Dio našeg profesionalnog gesla je poletno se uhvatiti u koštac s oba ova izazova. To kao pojedinci činimo svakodnevno; ipak, rezultat je to bolji ako je postignut na razini fakulteta/sveučilišta ili čak u širem edukacijskom spektru.

SEFI, *The European Society for Engineering Education* (Europsko društvo za inženjersku izobrazbu, vidi [5]), posebno njegova MWG, *Mathematics Working Group* (Matematička radna skupina), institucija je na koju se u tom smislu možemo osloniti.

Navodimo, ponešto skraćeno... *cilj SEFI-jeve Matematičke radne skupine jest osigurati forum za raspravu i smjernice za one koji su zainteresirani za matematičko obrazovanje studenata tehničkih znanosti u Europi. Doprinos tom cilju je dokument skupine o curriculumu, prvi put objavljen 1992. Drugo izdanje iz 2002. dodatno je prilagodilo dokument provedbi curriculuma formulirajući popis uz sadržaj vezanih ishoda učenja. Namjera trećeg izdanja (objavljeno 2013.) bila je izložiti, objasniti te ilustrirati okosnicu za sustavno uključivanje ovakvih ciljeva u učenje na višim edukacijskim razinama, temeljenih na najnovijim istraživanjima u području obrazovanja. U tu je svrhu korišten koncept kompetencija (**competence concept**) (Alpert, B. et. al. 2013, p. 7).*

Koncept matematičke kompetencije (MC) razvijen je u Danskoj, u sklopu danskog KOM projekta (KOM: Competencies and the Learning of Mathematics – Kompetencije i učenje matematike), kako bi se razvila platforma za temeljitu reformu danskog matematičkog obrazovanja na svim edukacijskim razinama ([6], [7]).

Mogens Niss (Niss 2003, p.6/7), voditelj KOM projekta opisuje matematičku kompetenciju kao ...*umijeće razumijevanja, procjene, izvršenja, i upotrebe matematike u različitim unutar- i izvan- matematičkim kontekstima i situacijama u kojima matematika igra ili bi mogla igrati ulogu. Nužno, ali zasigurno ne i dovoljno za matematičku kompetenciju jest veliko prethodno poznavanje činjenica i posjedovanje tehničkih vještina.*

Unutar rezultata KOM projekta, objavljenih 2011., osim same definicije opće matematičke kompetencije kao takve, opisano je i osam matematičkih kompetencija od kojih se sastoji. To su: matematičko razmišljanje; postavljanje i rješavanje matematičkih problema; matematičko modeliranje; matematičko zaključivanje; definiranje matematičkih entiteta; primjena matematičkih simbola i matematičkog formalizma; komuniciranje kroz matematiku; korištenje pomagala i alata.

Tri dokumenta SEFI-jeve MWG skupine (Barry, M. D. J., Steele, N. C. (Eds.) (1992), Mustoe, L., Lawson, D. (Eds.) (2002), Alpers, B. et al. (2013)) bila su mi smjernice u procesu prenošenja matematičkog znanja. Potakli su me na uvođenje vizualizacije i animacije u nastavi, na naglašavanje svrhe učenja matematičkih sadržaja, na isticanje ishoda učenja i njihova povezivanja s temama predavanja kao i s potrebama unutar inženjerskih predmeta.

Sve sam to radila sa svrhom da kod studenata probudim svijest o potrebi za matematičkim kompetencijama i da potaknem primjenu istoga u inženjerskom kontekstu. Međutim, na prvim godinama studija sam se susrela s poteškoćama budući da uobičajeni koncept nastave ne daje prostora takvom pristupu, a i sami studenti nisu tome još dorasli budući da primjena MC-a u rješavanju zadataka iz stvarnog života zahtijeva aktivnu uključenost studenata kao i vladanje određenim inženjerskim znanjima.

Pokazalo se da se spomenuti pristup poučavanja može provesti unutar matematičkih kolegija koji se predaju na višim godinama studija. Radi se o kolegijima koje obično pohađa do 50 studenata, što aktivno sudjelovanje i usredotočenost na ekipni rad čini mogućim. Osim toga, kolegiji su najčešće izborni, pa studenti koji ih upisuju posjeduju razvijen pozitivni stav prema matematici, te samopouzdanje u vlastiti matematički potencijal. Prihvaćaju matematiku kao smislenu aktivnosti i njezinu primjenu shvaćaju kao korisni alat u raznim *real-life* situacijama.

Jedan takav matematički predmet u sklopu preddiplomskog studija geodezije i geoinformatike jest izborni kolegij *Diskretna matematika*. Studenti na kolegiju dobivaju ili sami odabiru projektni zadatak iz stvarnog života (*real-life project task*); opisuju ga s tehničkog i matematičkog stajališta, rješavaju ga uz pomoć ispredavanih matematičkih metoda, na kraju uspoređuju, interpretiraju i vrednuju rezultate. Svaki projekt mora biti prezentiran i branjen pred kolegama studentima.

Slijedi prikaz rada/projekta *Primjena teorije grafova na zagrebački park Ribnjak*, kao rezultat primjene MC-a i uspješne suradnje nastavnik – student.

2. Primjena teorije grafova na zagrebački park Ribnjak

Autori: Tomislav Leventić i Antonio Josić

Projektni zadatak

Kolegij: Diskretna matematika, 3. godina preddiplomskog studija Fakulteta geodezije i geoinformatike u Zagrebu

Zadatak: primijeniti naučeno o teoriji grafova na staze zagrebačkog parka Ribnjak

Koraci izrade projekta

1. Rekognosciranje terena
2. Vektorizacija
3. Proučavanje algoritama za rješavanje problema najkraćeg puta
4. Rješavanje problema najkraćeg puta po vektoriziranoj stazi parka različitim algoritmima

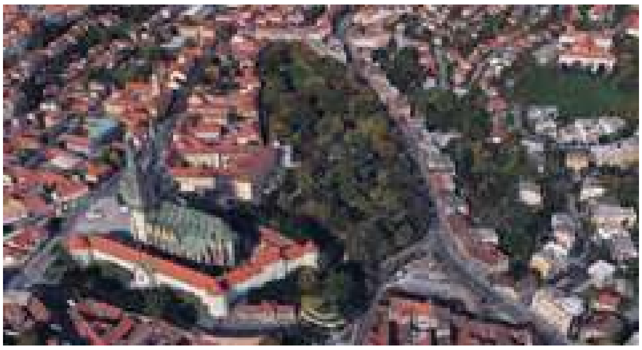
Park Ribnjak

Park Ribnjak jedan od najljepših gradskih parkova

Nalazi se između ulice Ribnjak (na istoku) i zidina zagrebačke Katedrale

Ribnjak je naziv biskupskog parka istočno od stolne crkve - današnje zagrebačke katedrale

Na tom mjestu je prije bio umjetni ribnjak, koji je vodu dobivao iz potoka Medveščaka. Kada je ribnjak isušen, lokalitet je uređen i pretvoren u gradski park.



Slika 2.1 3D model parka Ribnjak i okolnog grada (preuzeto iz programa Google Earth)

Slika 2.2 Kartografski prikaz parka Ribnjak i smještaj u gradu Zagrebu (preuzeto s http://we-fly-by.blogspot.com/p/o-karte.html)

Definicija grafa

Formalno, **graf** definiramo kao uređeni par skupova $(V;E)$, gdje je V skup **vrhova**, a E skup 2–podskupova od V, koje zovemo **bridovi**.

Ovu definiciju možemo proširiti tako da dopustimo **petlje** (bridove koje spajaju vrh sa samim sobom), **višestruke bridove** (više bridova između para vrhova, npr. kod problema Königsberških mostova) i **usmjerene bridove** (bridovi koji imaju orijentaciju).

Naravno, usmjerene bridove reprezentiramo uređenim parovima, a ne 2–podskupovima, dok kod višestrukih bridova E postaje multiskup.

Graf koji ima usmjerene bridove zvat ćemo **usmjereni graf**

Osnovni pojmovi

Red grafa G je broj vrhova od G.
Veličina grafa G je broj bridova od G.
Potpun graf je jednostavan graf u kojem je svaki par vrhova spojen bridom.

Višestruki bridovi su bridovi s istim parom krajeva.

Petlja je brid čiji se krajevi podudaraju.

Za dva vrha kažemo da su **susjedni** ako postoji brid u tom grafu koji ih spaja.

Za dva brida kažemo da su **susjedni** ako postoji vrh u tom grafu koji je njima zajednički.

Težina brida e jednostavnog povezanog grafa G je realan broj $w(e)$ pridružen bridu e. Graf s pridruženim težinama ćemo zvati **težinski**.

Šetnja u grafu G je niz $W := v_0 e_1 v_1 e_2 ... e_k v_k$, čiji su članovi naizmjenice vrhovi v_i i bridovi e_i, tako da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i v_i, $1 \leq i \leq k$.

Šetnja se naziva **staza** ako su svi bridovi šetnje međusobno različiti.

Ako su na stazi i svi vrhovi međusobno različiti, ona se naziva **put**.

Ciklus je zatvorena staza pozitivne duljine čiji su vrhovi (osim krajeva) međusobno različiti.

Staze parka Ribnjak

Red grafa: 28

Veličina grafa: 46

Slika 2.3 Grafički prikaz staza parka Ribnjak

Eulerovi grafovi

Kažemo za stazu da je **Eulerova staza** ukoliko prolazi svim bridovima grafa.

Zatvorenu Eulerovu stazu zovemo **Eulerova tura**.
Graf je **Eulerov** ako dopušta Eulerovu turu.

Eulerov teorem :

(a) Multigraf bez izoliranih vrhova je Eulerov ako i samo ako je povezan, te je svaki vrh parnog stupnja.

(b) Multigraf bez izoliranih vrhova ima nezatvorenu Eulerovu stazu ako i samo ako je povezan i ima točno dva vrha neparnog stupnja.

Hamiltonovski grafovi

Hamiltonov put je put koji prolazi kroz sve vrhove grafa.
Ukoliko je Hamiltonov put zatvoren, govorimo o **Hamiltonovu ciklusu**.

Kažemo da je graf **Hamiltonov** ukoliko dopušta Hamiltonov ciklus. Kako kod ovog problema višestruki bridovi ne igraju nikakvu ulogu, uvijek možemo pretpostaviti da je graf jednostavan.

Problem najkraćeg puta

Problem traženja puta između dva vrha u grafu tako da suma uključenih bridova bude najmanja moguća!

Primjer na stazama parka Ribnjaka: traženje najkraćeg puta između točaka A i B'

Algoritam najbližeg susjeda (NN algoritam)

Podoptimalno rješenje za određivanje minimalnog hamiltonovskog ciklusa

Algoritam se sastoji u ponavljanom posjećivanju najbližeg neposjećenog susjeda sve do dolaska do cilja

Slika 2.4 Odabir sljedećeg neposjećenog susjeda (S) prema NN algoritmu

Slika 2.5 Najkraći put prema susjeda (S) prema NN algoritmu NN algoritmu

Rezultat NN algoritma

Ukupna duljina puta: 617 m

Jako loše rješenje za ovakvu vrstu problema

Kod određivanja minimalnog hamiltonovskog ciklusa u prosjeku daje 25 % lošije rješenje od najboljeg mogućeg

Pokazano je da postoji mnogo rasporeda vrhova grafa za koje daje najgore moguće rješenje

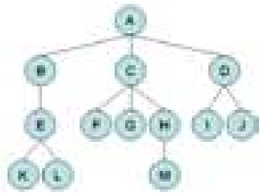
Šuma i stablo

Šuma je graf bez ciklusa: komponente šume su stabla.

Stablo je povezan graf bez ciklusa.

Svaki povezani graf sadrži stabla kao svoje podgrafove.

Ako takav podgraf/stablo sadrži sve vrhove zadanog grafa zovemo ga ***razapinjuće stablo***.

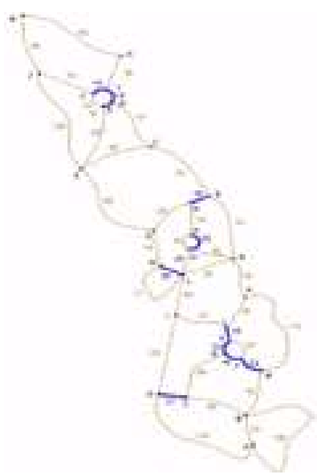


Slika 2.6 Stablo; graf bez ciklusa

Kruskalov algoritam

Algoritam minimalnog razapinjućeg stabla

U svakom koraku se odabire brid najmanje težine takav da njegovo ubacivanje ne stvara ciklus



Slika 2.7 Odabir bridova prema Kruskalovu algoritmu

Slika 2.8 Najkraći put prema Kruskalovu algoritmu

Rezultat Kruskalovog algoritma

Ukupna duljina puta: 589 m

Bolje rješenje, no ne i optimalno

Dijkstrin algoritam

Jedan od najefikasnijih i najpogodnijih algoritama za određivanje najkraćeg puta između dva vrha

Koraci:

1. Početni čvor označiti stalnim indeksom 0, a svim ostalim čvorovima dati privremeni indeks ∝.
2. Čvor k koji još nema stalni indeks dobiva novi, privremeni, čija je vrijednost:

   min[(stari indeks k), (stari indeks j) + l_{jk}], gdje je j čvor koji je zadnji dobio stalan indeks, a l_{jk} duljina grane koja povezuje čvorove j i k. Ukoliko takve grane nema $l_{jk} = \infty$.
3. Najmanja vrijednost indeksa između svih privremenih indeksa postaje stalan indeks.
4. Ukoliko svi čvorovi posjeduju stalni indeks (ili ukoliko odredišni čvor posjeduje stalni indeks) KRAJ, inače se vrati u korak 2 Ispis najkraćeg puta: Algoritam rekurzivno prolazi putem od cilja do početka pomoću sačuvanih prethodnika ili pomoću oduzimanja vrijednosti brida od vrijednosti vrha te pronalaska odgovarajuće vrijednosti na susjednom vrhu.

Slika 2.9 Prikaz nakon 1. koraka Dijkstrinog algoritma

Slika 2.10 Prikaz nakon 2. i 3. koraka Dijkstrinog algoritma

Slika 2.11 Najkraći put prema Dijsktrinom algoritmu algoritmu

Rezultat Dijkstrinovog algoritma

Ukupna duljina puta: 540 m

Optimalno rješenje

Edsger Wybe Dijkstra (1930. – 2003.) bio je nizozemski računalni znanstvenik i pionir u istraživanjima mnogih područja računalnih znanosti. Zbog velikog doprinosa znanosti nagrada koju je dobio netom prije smrti, ACM PODC, preimenovana je u Dijkstra Prize ubrzo nakon njegove smrti.

LITERATURA KORIŠTENA ZA IZRADU PROJEKTA

Beban Brkić, J. (2017). Diskretna matematika (Skripta), Zagreb: Geodetski fakultet.

Lipschutz, S., Lipson M. (1997): Discrete Mathematics, Schaum's Outline Series, New York: McGraw-Hill.

Nakić, I. (2011/2012): Diskretna matematika, (Predavanja), Zagreb: PMF-Matematički odsjek.

Pavčević, M-O. (2006): Uvod u teoriju grafova, Zagreb: Element.

POPIS URL-ova

URL 1: Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page (pristupljeno 6. 5. 2017.)

URL 2: Youtube, https://www.youtube.com/ (pristupljeno 23. 4. 2017.)

URL 3: ZGportal, http://www.zgportal.com/o-zagrebu/povijest-zagrebackih-naselja/park- ribnjak/(pristupljeno 23. 4. 2017.)

URL 4: http://www.csun.edu/~danielk/.../graph-theory/notes02.pdf (pristupljeno 20. 4. 2017.)

LITERATURA

Alpers, B. et al. (2013). A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education. A Report of the Mathematics Working Group, Brussels: SEFI.

Barry, M. D. J., Steele, N. C. (Eds.) (1992). A Core Curriculum in Mathematics for the European Engineer. SEFI Document 92.1, Brussels: SEFI.

Mustoe, L., Lawson, D. (Eds.) (2002). Mathematics for the European Engineer. A Curriculum for the Twenty-First Century. A Report by the SEFI Mathematics Working Group. Brussels: SEFI.

Niss, M. A. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM project. In A. Gagatsis, & S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education, Athens, Greece:* Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society, 115-124.

Niss, M., 2011., Mathematical competencies and the learning of mathematics: the danish kom project, http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve375/1112/docs/KOMkompetenser.pdf , (pristupljeno 21. 5. 2018.)

URL 1: SEFI Mathematics Working Group; http://sefi.htw-aalen.de/

AUTORI | AUTHORS

doc. dr. sc. Jelka Beban-Brkić, dipl. ing., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, e-mail:jbeban@geof.hr

Antonio Josić, univ. bacc. ing. geod. et geoinf., diplomski studij, Geodetski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, e-mail: ajosic@geof.hr

Tomislav Leventić, univ. bacc. ing. geod. et geoinf., diplomski studij, Geodetski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, e-mail: tleventic@geof.hr