

UDK 624.971:551.3.053:528.41:519.233.5
Izvorni znanstveni članak / Original scientific paper

Ispitivanje i analiza vertikalnosti dimnjaka

Mladen ZRINJSKI, Đuro BARKOVIĆ, Antonio TUPEK – Zagreb¹,
Ante POLOVIĆ – Duga Resa²

SAŽETAK. Zbog starosti i dotrajalosti, djelovanja sila težine dimnjaka, vjetra i drugih atmosferskih utjecaja, tektonskih aktivnosti, tehničkih nedostataka pri gradnji te promjene fizikalnih i mehaničkih svojstava građevnog materijala, može doći do značajnih deformacija i nagiba dimnjaka u prostoru, a u krajnjem slučaju i do njegova rušenja. Stoga je prijeko potrebno periodično ispitivanje stabilnosti visokih industrijskih dimnjaka pri čemu je jedan od temeljnih i najvažnijih nadzornih parametara prostorni nagib dimnjaka. Razvijene su mnoge klasične i moderne metode ispitivanja i analize vertikalnosti dimnjaka. U ovom je radu prikazana i detaljno iznesena metoda ispitivanja i analize vertikalnosti dimnjaka koja se temelji na izmjeri dimnjaka po kružnim horizontalnim presjecima s uspostavljene geodetske osnove. Središta kružnih presjeka određena su regresijskim modeliranjem kružnica, a prostorna os dimnjaka izračunata je primjenom trodimenzionalne linearne regresije. U radu je dan praktični primjer ispitivanja i analize vertikalnosti dimnjaka nekadašnje tvornice Pamučna industrija Duga Resa u Dugoj Resi.

Ključne riječi: dimnjak, geodetska mreža, regresijska kružnica, nagib osi dimnjaka, 3D linearna regresija.

1. Uvod

Izgradnja visokih industrijskih zidanih dimnjaka započela je u mnogim europskim zemljama u 19. stoljeću kao neposredna posljedica industrijske revolucije i gradnje mnogobrojnih tvornica. Visina dimnjaka ovisila je o mnogo faktora, kao na primjer vrsti industrijskog postrojenja, blizini naselja, topografiji, vjetru i dr. Stoga su visine dimnjaka varijabilne i kretale su se od nekoliko metara do stotinu metara pa i više. Nakon Drugoga svjetskog rata promjene u industrijskoj proizvodnji te nadasve širenje gradova dovelo je do gašenja mnogih tvornica, a dimnjaci su ili

¹ Izv. prof. dr. sc. Mladen Zrinjski, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, Hrvatska, e-mail: mzrinjski@geof.hr,

Prof. dr. sc. Đuro Barković, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, Hrvatska, e-mail: barkovic@geof.hr,

Antonio Tupek, mag. ing. geod. et geoinf., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, Hrvatska, e-mail: atupek@geof.hr,

² Ante Polović, mag. ing. geod. et geoinf., Geo-KOM d.o.o., Ulica bana Josipa Jelačića 87, HR-47250 Duga Resa, Hrvatska, e-mail: ante@geo-kom.hr.

uklonjeni ili prenamijenjeni. U novije vrijeme mnogi su dimnjaci zbog svoje socijalne i povijesne važnosti proglašeni zaštićenim objektima. Međutim, prestankom njihova korištenja, mnogi dimnjaci su zapostavljeni i godinama nisu održavani, a kao takvi rapidno su degradirali. Jedan od najvažnijih nadzornih parametara tijekom analize stabilnosti dimnjaka njegov je nagib (Barazzetti i dr. 2019). Djelovanje sila težine dimnjaka, tektonske aktivnosti, vjetar i drugi atmosferski uvjeti te promjena fizikalnih i mehaničkih svojstava građevnog materijala mogu dovesti do znatnih deformacija, a u krajnjem slučaju i do rušenja dimnjaka.

Klasični pristup određivanju vertikalnosti dimnjaka temelji se na primjeni optičkih teodolita pri čemu se analizira poprečno odstupanje točaka dimnjaka od vertikalne ravnine koju definira vizurna os instrumenta. Ta metoda omogućava određivanje nagiba samo u jednom smjeru, stoga je potrebno ponoviti mjerenja iz drugog, u optimalnom slučaju, okomitog smjera. Međutim, nedostatak je te metode nepristupačnost točaka na dimnjaku i potreba za izmjerom većeg broja točaka pri izmjeri dimnjaka u obliku krnjeg stošca (Marjetič i dr. 2011).

Primjena modernih geodetskih mjernih stanica, terestričkih laserskih skenera i bespilotnih letjelica pruža mogućnost beskontaktno izmjere visokih dimnjaka i prikupljanja velike količine preciznih i točnih mjernih podataka. Praktični primjeri primjene modernih mjernih sustava u izmjeri dimnjaka dani su u Marjetič i dr. (2011), Zheng i dr. (2012), Kregar i dr. (2015), Barazzetti i dr. (2019).

U ovom radu prikazana je metoda modeliranja prostorne osi dimnjaka na osnovi regresijskog modeliranja kružnih horizontalnih presjeka te modeliranja prostornog pravca. Izložena metoda praktično je primijenjena na dimnjaku nekadašnje tvornice Pamučna industrija Duga Resa u Dugoj Resi. Izmjera dimnjaka obavljena je geodetskom mjernom stanicom.

2. Primijenjena metodologija

Određivanje osi dimnjaka i analiza njezine vertikalnosti temelji se na geodetskoj izmjeri plašta dimnjaka. Općenito, neki dimnjak s kružnim poprečnim presjekom može se aproksimirati krnjim stošcem, pri čemu je njegova prostorna os jednaka geometrijskoj osi aproksimirajućeg stošca. Primjenom geodetskih metoda izmjere dimnjak, odnosno njegov plašt, diskretizira se s konačnim brojem izmjerenih detaljnih točaka čije su koordinate određene u državnom referentnom koordinatnom sustavu ili u nekom lokalnom trodimenzionalnom koordinatnom sustavu. Koordinate detaljnih točaka na plaštu dimnjaka određuju se na temelju geodetske osnove koja se uspostavlja u njegovoj neposrednoj blizini. Postavljeni uvjeti u pogledu kriterija kvalitete konačnog produkta, tj. nagiba osi dimnjaka, determiniraju primijenjen instrument i pribor te odabranu metodu izmjere.

Metoda modeliranja osi dimnjaka i analiza njezine vertikalnosti prikazana u ovom radu temelji se na izmjeri dimnjaka po n unaprijed definiranih približno horizontalnih kružnih presjeka, pri čemu je nulti horizontalni presjek referentni presjek. Regresijskim modeliranjem primjenom matematičkog modela posrednih mjerenja i metode najmanjih kvadrata, a na temelju dobivenog skupa mjerenih točaka opterećenih slučajnim pogreškama mjerenja, jednoznačno se određuje matematička funkcija (kružnica) koja definira eksplicitnu zakonitost promjene mjerenja o georeferenciranom položaju. Središte regresijske kružnice određuje položaj osi

dimnjaka na definiranom presjeku. Takvo regresijsko modeliranje svih izmjerenih horizontalnih presjeka dimnjaka rezultira s n diskretnih točaka položaja osi, koje definiraju realnu os dimnjaka. U skladu s inicijalnom pretpostavkom, konačni je cilj računске obrade podataka definiranje prostorne osi dimnjaka eksplicitnom matematičkom funkcijom, konkretno prostornim pravcem. Regresijsko modeliranje uz primjenu teorije najmanjih kvadrata rezultira određivanjem parametara prostornog pravca, odnosno koeficijenata smjera njegova jediničnog vektora. U daljnjem tekstu detaljno je prikazana matematička osnova modeliranja prostorne osi dimnjaka.

2.1. Regresijsko modeliranje horizontalnih presjeka dimnjaka

Geodetska izmjera dimnjaka po približno horizontalnom presjeku rezultira skupom od m mjerenih točaka koje su, u optimalnom slučaju, ravnomjerno raspoređene po plaštu dimnjaka (slika 1). Prostorne koordinate mjerenih točaka (y, x, H) određene su u lokalnom 3D koordinatnom sustavu, a njihova položajna točnost iskazana je standardnim odstupanjima koordinata (s_y, s_x, s_H) . Pretpostavka je da su koordinate detaljnih točaka opterećene samo i isključivo slučajnim pogreškama mjerenja. Zbog nesavršenosti dimnjaka i prisutnosti pogrešaka mjerenja izmjerene točke neće jednoznačno definirati kružnicu. Stoga je temeljni cilj odrediti matematičku funkciju, u konkretnom slučaju kružnicu, koja definira oblik dimnjaka u izmjerenom horizontalnom presjeku. To se obavlja primjenom regresijskog modeliranja pomoću algoritma regularnog izjednačenja posrednih mjerenja različitih točnosti i metode najmanjih kvadrata. Bitno je naglasiti da se modeliranje horizontalnog presjeka dimnjaka obavlja odvojeno položajno i visinski. Ravninske koordinate mjerenih točaka na plaštu dimnjaka temelj su za regresijsko modeliranje kružnice (2D izjednačenje), dok se visinska komponenta horizontalnog presjeka, odnosno visina središta regresijske kružnice računa prema algoritmu izjednačenja direktnih mjerenja različitih točnosti (1D izjednačenje). Konačni rezultat modeliranja horizontalnog presjeka dimnjaka obuhvaća sintezu konačnih rezultata zasebnih računskih obrada.

Prema temeljnom načelu metode najmanjih kvadrata (Klak 1982, Feil 1989):

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \rightarrow \text{minimum}, \quad (1)$$

gdje su:

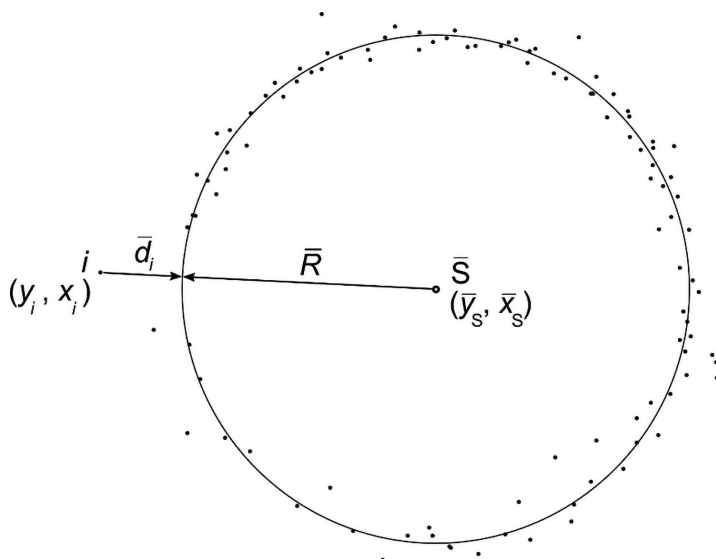
\mathbf{v} – vektor popravaka mjerenja,

\mathbf{P} – matrica težina mjerenja,

intencija je regresijskog modeliranja odrediti onu regresijsku kružnicu, odnosno ravninske koordinate njezina središta (\bar{y}_s, \bar{x}_s) i radijus (\bar{R}) , za koju će suma kvadrata radijalnih odstupanja mjerenih točaka od kružnice \bar{d}_i biti minimalna, uzimajući u obzir težine mjerenja (slika 1).

Prema algoritmu regularnog izjednačenja posrednih mjerenja različitih točnosti (Feil 1989, Rožić 2007), uspostavlja se nelinearan funkcijski model:

$$\bar{d}_i = F_i(\bar{y}_s, \bar{x}_s, \bar{R}) = \sqrt{(y_i - \bar{y}_s)^2 + (x_i - \bar{x}_s)^2} - \bar{R}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$



Slika 1. Regresijsko modeliranje horizontalnih presjeka dimnjaka.

gdje su:

- \bar{d}_i – radijalno odstupanje i -te mjerene točke od regresijske kružnice,
- y_i, x_i – ravninske koordinate i -te mjerene točke,
- \bar{y}_s, \bar{x}_s – izjednačene ravninske koordinate središta regresijske kružnice,
- \bar{R} – izjednačena vrijednost radijusa regresijske kružnice,
- m – broj mjerenih točaka na jednom horizontalnom presjeku dimnjaka.

Nelinearna funkcijska relacija iz izraza (2) uspostavlja se za svaku mjerenu točku, a njihova linearizacija razvojem u Taylorov red, temeljem prethodno određenih približnih vrijednosti nepoznanica \mathbf{x}_0 , izraz (4), dovodi do formiranja linearnog sustava jednadžbi popravaka (Feil 1989, Rožić 2007):

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{l}, \quad (3)$$

gdje su:

\mathbf{v} – vektor popravaka,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \bar{y}_s} \right)_0 & \left(\frac{\partial F_1}{\partial \bar{x}_s} \right)_0 & \left(\frac{\partial F_1}{\partial \bar{R}} \right)_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{\partial F_m}{\partial \bar{y}_s} \right)_0 & \left(\frac{\partial F_m}{\partial \bar{x}_s} \right)_0 & \left(\frac{\partial F_m}{\partial \bar{R}} \right)_0 \end{bmatrix} - \text{matrica koeficijenata jednadžbi popravaka,}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_s \\ x_s \\ R \end{bmatrix} - \text{vektor prikraćenih vrijednosti nepoznanica,}$$

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} F_1(y_S^0, x_S^0, R^0) \\ \vdots \\ F_m(y_S^0, x_S^0, R^0) \end{bmatrix} - \text{vektor prikraćenih vrijednosti mjerenja,}$$

pri čemu vrijedi sljedeće (Feil 1989, Rožić 2007):

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}, \quad (4)$$

gdje su:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{y}_S \\ \bar{x}_S \\ \bar{R} \end{bmatrix} - \text{vektor izjednačenih vrijednosti nepoznanica,}$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} y_S^0 \\ x_S^0 \\ R^0 \end{bmatrix} - \text{vektor približnih vrijednosti nepoznanica.}$$

Stohastički dio matematičkog modela posrednih mjerenja definiran je matricom težina \mathbf{P} (Feil 1989, Rožić 2007). Bitno je napomenuti kako se, u ovom specifičnom slučaju, težine iz matrice \mathbf{P} odnose na prikraćene vrijednosti mjerenja koje u biti nisu direktno mjerene već su funkcije koordinata mjerenih točaka i približnih vrijednosti nepoznanica danih vektorom \mathbf{x}_0 iz izraza (4). Prema tome, matrica težina mjerenja određuje se primjenom zakona o prirastu težina (Klak 1982, Feil 1989, Rožić 2007).

Nadalje, prema algoritmu izjednačenja (Rožić 2007), matrica koeficijenata normalnih jednadžbi \mathbf{N} formira se prema relaciji:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}, \quad (5)$$

a vektor apsolutnih članova normalnih jednadžbi prema izrazu:

$$-\mathbf{n} = -\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}. \quad (6)$$

Rješenje normalnih jednadžbi slijedi iz izraza (Feil 1989, Rožić 2007):

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{n} = \mathbf{Q}_{\mathbf{xx}} \mathbf{n}, \quad (7)$$

gdje je:

$\mathbf{Q}_{\mathbf{xx}}$ – matrica kofaktora nepoznanica.

Točnost nepoznanica određuje se standardnim odstupanjima nepoznanica prema izrazima (Feil 1989, Rožić 2007):

$$s_{\bar{y}_s} = s_0 \sqrt{q_{x_1} q_{x_1}}, \quad (8)$$

$$s_{\bar{x}_s} = s_0 \sqrt{q_{x_2} q_{x_2}}, \quad (9)$$

$$s_{\bar{R}} = s_0 \sqrt{q_{x_3} q_{x_3}}, \quad (10)$$

gdje su:

- $s_{\bar{y}_s}, s_{\bar{x}_s}, s_{\bar{R}}$ – standardna odstupanja nepoznanica (ravninskih koordinata središta i radijusa regresijske kružnice),
 s_0 – referentno standardno odstupanje,
 $q_{x_1} q_{x_1}, q_{x_2} q_{x_2}, q_{x_3} q_{x_3}$ – kofaktori pojedinih nepoznanica (dijagonalni članovi matrice kofaktora nepoznanica \mathbf{Q}_{xx}).

Potpuni prikaz svih računskih koraka i kontrola u sklopu regularnog izjednačenja posrednih mjerenja različitih točnosti dan je u Rožić (2007). Prethodno izneseni postupak daje matematičku osnovu za određivanje regresijske kružnice koja najbolje, u pogledu metode najmanjih kvadrata, odgovara danom setu od m mjerenih točaka na pojedinom horizontalnom presjeku dimnjaka. Međutim, točnost konačnog rezultata izjednačenja, tj. točnost ravninskih koordinata središta i radijusa regresijske kružnice, ovisit će o točnosti određivanja približnih vrijednosti nepoznanica. Ako približne vrijednosti nepoznanica nisu dovoljno točno određene, navedeno će imati utjecaj na konačnu kontrolu izjednačenih mjerenja koja neće biti zadovoljena. Potrebno je provesti ponovno izjednačenje uz uvođenje prethodno dobivenih izjednačenih vrijednosti nepoznanica kao novih približnih vrijednosti nepoznanica (Rožić 2007). Regresijsko modeliranje obavlja se iterativno sve do iteracije za koju je kontrola izjednačenih mjerenja zadovoljena i rješenje konvergira.

U skladu s prethodnim razmatranjem, visinska komponenta regresijske kružnice, tj. visina središta kružnice, određuje se zasebnim izjednačenjem prema algoritmu direktnih mjerenja različitih točnosti, a određena je tzv. težinskom sredinom:

$$\bar{H}_s = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{L}}{\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}}, \quad (11)$$

gdje su:

- \bar{H}_s – izjednačena visina središta regresijske kružnice,
 \mathbf{e} – vektor jedinica,
 $m \times 1$
 \mathbf{P} – matrica težina mjerenja,
 $m \times m$
 \mathbf{L} – vektor mjerenja (visina svih mjerenih točaka na obodu horizontalnog presjeka dimnjaka).
 $m \times 1$

Točnost nepoznanice, odnosno standardno odstupanje visine središta regresijske kružnice određuje se izrazom:

$$s_{\bar{H}_s} = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n_f \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}}}, \quad (12)$$

gdje su:

\mathbf{v} – vektor popravaka mjerenja,

$m \times 1$

$n_f = m - 1$ – broj prekobrojnih mjerenja.

Potpuni prikaz svih računskih koraka i kontrola u sklopu izjednačenja direktnih mjerenja različitih točnosti dan je u Rožić (2007).

2.2. Regresijsko modeliranje osi dimnjaka

Općenito, izmjera dimnjaka obavlja se u n približno horizontalnih presjeka. Prema prethodno izloženoj metodi, modeliranje presjeka dimnjaka rezultira skupom od n regresijskih kružnica definiranih prostornim koordinatama središta $(\bar{y}_{S_j}, \bar{x}_{S_j}, \bar{H}_{S_j})$ i radijusom (\bar{R}_j) te pripadnom ocjenom točnosti u formi standardnog odstupanja $(s_{\bar{y}_{S_j}}, s_{\bar{x}_{S_j}}, s_{\bar{H}_{S_j}}, s_{\bar{R}_j})$, pri čemu je $j = 0, 1, 2, \dots, k$ ($k = n - 1$). Početni horizontalni presjek dimnjaka ($j = 0$) referentni je presjek, a koordinate njegova središta regresijske kružnice $(\bar{y}_{S_0}, \bar{x}_{S_0}, \bar{H}_{S_0})$ definiraju referentnu vrijednost položaja osi dimnjaka. Međutim, navedeni skup od k središta regresijskih kružnica $(\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_k)$ ne definira jednoznačno prostorni pravac. Stoga se, radi jednoznačnog određivanja prostorne osi dimnjaka jedinstvenom matematičkom funkcijom, obavlja novo regresijsko modeliranje primjenom trodimenzionalne (3D) linearne regresije. Temeljna je intencija 3D linearne regresije odrediti regresijski prostorni pravac koji u kontekstu metode najmanjih kvadrata najbolje odgovara danom setu od k 3D točaka. U konkretnom slučaju, os dimnjaka definirana je središtem regresijske kružnice nultog horizontalnog presjeka \bar{S}_0 ($j = 0$) i jediničnim vektorom smjera $\vec{o} = \vec{a}i + \vec{b}j + \vec{c}k$ (slika 2). Stoga se rješenje problema 3D linearne regresije svodi na određivanje komponenta \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} jediničnog vektora \vec{o} .

Potreba određivanja koeficijenata smjera jediničnog vektora dovodi do definiranja uvjeta koji nepoznanice (komponente \vec{a} , \vec{b} , \vec{c}) moraju zadovoljiti, tj. $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 = 1$. Sve navedeno rezultira određivanjem 3D prostornog pravca primjenom regresijskog modeliranja pomoću matematičkog modela posrednih mjerenja s uvjetima nepoznanica i metode najmanjih kvadrata.

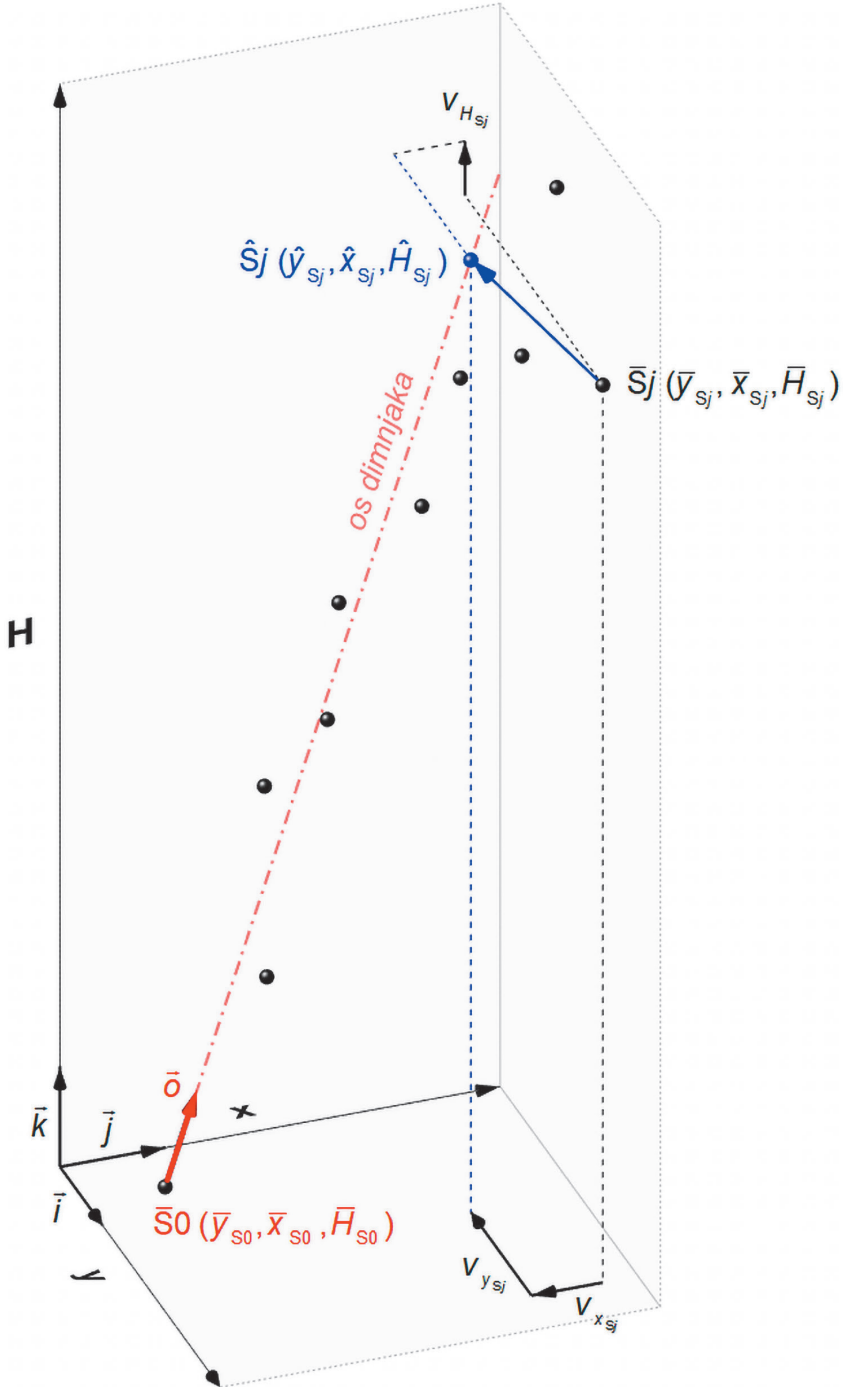
Prema teorijskoj osnovi kombinirane forme izjednačenja s uvjetima nepoznanica (Feil 1989, Rožić 2007) uspostavljaju se eksplicitno definirane, u konkretnom slučaju linearne funkcije posrednih mjerenja i implicitno definirana, u konkretnom slučaju nelinearna funkcija uvjeta nepoznanica. Funkcije posrednih mjerenja za j -tu točku dane su izrazima (Snow i Schaffrin 2016):

$$\begin{aligned}\hat{y}_{S_j} &= \bar{y}_{S_j} + v_{y_{S_j}} = \bar{y}_{S_0} + \vec{t}_j \vec{a} \\ \hat{x}_{S_j} &= \bar{x}_{S_j} + v_{x_{S_j}} = \bar{x}_{S_0} + \vec{t}_j \vec{b}, \\ \hat{H}_{S_j} &= \bar{H}_{S_j} + v_{H_{S_j}} = \bar{H}_{S_0} + \vec{t}_j \vec{c}\end{aligned}\quad (13)$$

gdje su:

$\hat{y}_{S_j}, \hat{x}_{S_j}, \hat{H}_{S_j}$ – izjednačene prostorne koordinate točaka regresijskog pravca (j -tog horizontalnog presjeka dimnjaka),

$\bar{y}_{S_j}, \bar{x}_{S_j}, \bar{H}_{S_j}$ – prostorne koordinate središta regresijske kružnice (j -tog horizontalnog presjeka dimnjaka),



Slika 2. Regresijsko modeliranje prostorne osi dimnjaka.

- $v_{y_{Sj}}, v_{x_{Sj}}, v_{H_{Sj}}$ – popravke po pojedinim koordinatnim osima,
 $\bar{y}_{S0}, \bar{x}_{S0}, \bar{H}_{S0}$ – prostorne koordinate središta regresijske kružnice $\bar{S}0$ referentnog (nultog) horizontalnog presjeka dimnjaka,
 \bar{t}_j – udaljenost od središta referentnog horizontalnog presjeka (od točke $\bar{S}0$ do točke $\bar{S}j$),
 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, – izjednačene komponente jediničnog vektora smjera \bar{o} regresijskog pravca,

pri čemu vrijedi da je $j = 1, 2, \dots, k$. Prema tome, uz komponente jediničnog vektora smjera ukupni broj nepoznanica u matematičkog modela izjednačenja uvećava se za k , odnosno broj nepoznatih parametara t , te iznosi $u = 3 + k$.

Implicitno definirana nelinearna funkcija uvjeta nepoznanica dana je izrazom (Snow i Schaffrin 2016):

$$\bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 + 0 \cdot \bar{t}_1 + 0 \cdot \bar{t}_2 + \dots + 0 \cdot \bar{t}_k - 1 = 0. \quad (14)$$

Linearne funkcijske relacije iz izraza (13) uspostavljaju se za k točaka, a temeljem prethodno određenih približnih vrijednosti nepoznanica \mathbf{x}_0 , izraz (16), formira se linearni sustav jednadžbi popravaka posrednih mjerenja (Feil 1989, Rožić 2007):

$$\underset{3k \times 1}{\mathbf{v}} = \underset{3k \times u}{\mathbf{A}} \underset{u \times 1}{\mathbf{x}} - \underset{3k \times 1}{\mathbf{1}}, \quad (15)$$

gdje su:

- \mathbf{v} – vektor popravaka,
 \mathbf{A} – matrica koeficijenata jednadžbi popravaka posrednih mjerenja,
 $\mathbf{x}^T = [a \ b \ c \ t_1 \ \dots \ t_k]^T$ – vektor prikraćenih vrijednosti nepoznanica,
 $\mathbf{1}$ – vektor prikraćenih vrijednosti mjerenja,

pri čemu vrijedi sljedeće (Feil 1989, Rožić 2007):

$$\bar{\mathbf{x}} = \underset{u \times 1}{\mathbf{x}_0} + \underset{u \times 1}{\mathbf{x}}, \quad (16)$$

gdje su:

- $\bar{\mathbf{x}}^T = [\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c} \ \bar{t}_1 \ \dots \ \bar{t}_k]^T$ – vektor izjednačenih vrijednosti nepoznanica,
 $\mathbf{x}_0^T = [a^0 \ b^0 \ c^0 \ t_1^0 \ \dots \ t_k^0]^T$ – vektor približnih vrijednosti nepoznanica.

Nelinearna uvjetna jednadžba nepoznanica iz izraza (14) linearizira se razvojem u Taylorov red te dovodi do formiranja linearnog sustava uvjetnih jednadžbi nepoznanica (Feil 1989, Rožić 2007):

$$\underset{1 \times u}{\mathbf{B}}^T \underset{u \times 1}{\mathbf{x}} + \underset{1 \times 1}{\omega} = \underset{1 \times 1}{\mathbf{0}}, \quad (17)$$

gdje su:

\mathbf{B} – matrica koeficijenata uvjetnih jednadžbi nepoznanica,
 $u \times 1$

ω – nesuglasica uvjetne jednadžbe nepoznanica,
 1×1

Stohastički dio matematičkog modela posrednih mjerenja s uvjetima nepoznanica definiran je matricom težina \mathbf{P} . Pojedini dijagonalni element matrice težina odgovara težini pojedinačne koordinate j -te točke, a određuje se na temelju poznate ocjene točnosti središta pojedine regresijske kružnice prema teorijskoj definiciji težine (Klak 1982, Feil 1989, Rožić 2007).

Temeljni uvjet izjednačenja metode najmanjih kvadrata, izraz (1), i uvjet koji moraju zadovoljiti nepoznanice, izraz (14), objedinjeni su definiranjem funkcije vezanog minimuma, tj. Lagrangeove funkcije (Feil 1989):

$$\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + 2q(\mathbf{B}^T \mathbf{x} + \omega) \rightarrow \text{minimum}, \quad (18)$$

gdje je:

q – korelata.

Postavljanjem nužnog i dovoljnog uvjeta ekstremne vrijednosti funkcije vezanog minimuma, slijedi sustav normalnih jednadžbi kombinirane forme izjednačenja posrednih mjerenja s uvjetima nepoznanica (Feil 1989, Rožić 2007):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B} \\ u \times u & u \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ u \times 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ u \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ u \times 1 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \\ 1 \times u & 1 \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ 1 \times 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\omega \\ 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \times 1 \end{bmatrix},$$

gdje su:

$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ – matrica koeficijenata normalnih jednadžbi posrednih mjerenja,
 $u \times u \quad u \times 3k \quad 3k \times 3k \quad 3k \times u$

$-\mathbf{n} = -\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$ – vektor apsolutnih članova normalnih jednadžbi posrednih mjerenja,
 $u \times 1 \quad u \times 3k \quad 3k \times 3k \quad 3k \times 1$

Rješavanjem sustava normalnih jednadžbi neodređenom metodom slijedi (Feil 1989, Rožić 2007):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ u \times 1 \\ q \\ 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B} \\ u \times u & u \times 1 \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \\ 1 \times u & 1 \times 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ u \times 1 \\ -\omega \\ 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{xx} & \mathbf{Q}_{xq} \\ u \times u & u \times 1 \\ \mathbf{Q}_{xq}^T & \mathbf{Q}_{qq} \\ 1 \times u & 1 \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ u \times 1 \\ -\omega \\ 1 \times 1 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

gdje su:

\mathbf{Q}_{xx} – matrica kofaktora nepoznanica,
 $u \times u$

\mathbf{Q}_{qq} – kofaktor korelate,
 1×1

Prema algoritmu izjednačenja kombinirane forme posrednih mjerenja s uvjetima nepoznanica (Rožić 2007), točnost nepoznanica iskazuje se standardnim odstupanjem nepoznanica prema općem izrazu:

$$s_{\bar{x}_p} = s_0 \sqrt{q_{x_p} q_{x_p}}, \quad (p = 1, 2, \dots, u), \quad (21)$$

gdje su:

- $s_{\bar{x}_p}$ – standardno odstupanje p -te nepoznanice,
- s_0 – referentno standardno odstupanje,
- $q_{x_p} q_{x_p}$ – kofaktor p -te nepoznanice, p -ti dijagonalni član matrice kofaktora nepoznanica \mathbf{Q}_{xx} iz izraza (20).

Određivanjem vektora popravaka \mathbf{v} , na temelju izraza (15), prema funkcijama posrednih mjerenja, izraz (13), određuju se izjednačene vrijednosti mjerenja, odnosno izjednačene prostorne koordinate točaka regresijskog pravca ($\hat{y}_{Sj}, \hat{x}_{Sj}, \hat{H}_{Sj}$) za $j = 1, 2, \dots, k$. Izjednačene prostorne koordinate jednoznačno određuju prostorni pravac koji definira os dimnjaka.

Temeljem algoritma izjednačenja kombinirane forme posrednih mjerenja s uvjetima nepoznanica (Rožić 2007), ocjena točnosti izjednačenih vrijednosti mjerenja iskazuje se standardnim odstupanjima prema općem izrazu:

$$s_r = s_0 \sqrt{q_r q_r}, \quad (r = 1, 2, \dots, 3k), \quad (22)$$

gdje su:

- s_r – standardno odstupanje r -tog izjednačenog mjerenja,
- s_0 – referentno standardno odstupanje,
- $q_r q_r$ – kofaktor r -tog izjednačenog mjerenja (r -ti dijagonalni član matrice kofaktora $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T$).

Nagib prostorne osi dimnjaka φ u odnosu na vertikalu u točki $\bar{S}0$ određuje se na temelju izjednačenih komponenti jediničnog vektora smjera prostornog pravca $\bar{o} = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ kao kut između jediničnog vektora i radijvektora $\bar{k} = \{0, 0, 1\}$ prema izrazu:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{c}}{\sqrt{\bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2}}. \quad (23)$$

Smjerni kut nagiba dimnjaka ν određuje se prema izrazu:

$$\cos \nu = \frac{\bar{b}}{\sqrt{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}}. \quad (24)$$

Visina H i duljina D dimnjaka određuju se na temelju izjednačenih prostornih koordinata točaka regresijskog pravca prema izrazima:

$$H = \hat{H}_{S_k} - \bar{H}_{S_0}, \quad (25)$$

$$D = \sqrt{(\hat{y}_{S_k} - \bar{y}_{S_0})^2 + (\hat{x}_{S_k} - \bar{x}_{S_0})^2 + (\hat{H}_{S_k} - \bar{H}_{S_0})^2}. \quad (26)$$

Horizontalno odstupanje vrha osi dimnjaka od vertikale određuje se na temelju prethodno određenih nagiba i visine dimnjaka:

$$\Delta = H \tan \varphi. \quad (27)$$

Ocjena točnosti, odnosno standardna odstupanja prethodno izračunatih parametara određuju se dosljednom primjenom algoritma zakona o prirastu varijanci (Klak 1982, Feil 1989, Rožić 2007). Potpuni prikaz svih računskih koraka i kontrola u sklopu algoritma izjednačenja kombinirane forme posrednih mjerenja s uvjetima nepoznanica dan je u Rožić (2007). Prethodno izneseni postupak daje matematičku osnovu za određivanje prostornog regresijskog pravca koji najbolje, u kontekstu metode najmanjih kvadrata, odgovara danom setu od n točaka, odnosno n središta regresijskih kružnica određenih modeliranjem n horizontalnih presjeka dimnjaka. Međutim, točnost konačnog rezultata izjednačenja, tj. komponenata jediničnog vektora smjera pravca te nepoznatih parametara t ovisit će o točnosti određivanja približnih vrijednosti nepoznanica istih. Ako približne vrijednosti nepoznanica nisu dovoljno točno određene, navedeno će imati utjecaj na konačnu kontrolu izjednačenih mjerenja koja neće biti zadovoljena. Prijeko je potrebno ponovno izjednačenje uz uvođenje prethodno dobivenih izjednačenih vrijednosti nepoznanica kao novih približnih vrijednosti nepoznanica, a matematički postupak regresijskog modeliranja obavlja se iterativno do iteracije za koju je kontrola izjednačenih mjerenja zadovoljena i rješenje konvergira (Rožić 2007).

3. Izmjera, obrada mjerenja i analiza rezultata

Prethodno iznesena metodologija ispitivanja i analize vertikalnosti dimnjaka primijenjena je na dimnjaku u Dugoj Resi, koji se nalazi na području nekadašnje tvornice Pamučna industrija Duga Resa. Izgrađen je 1930. godine od opeke, u obliku krnjeg stošca, a visina mu je približno 66 metara (Polović 2019, slika 3).

Sva geodetska mjerenja obavljena su geodetskom mjernom stanicom Leica TCRP1201+ R400 (slika 3). Relevantne tehničke specifikacije upotrijebljene mjerne stanice dane su u tablici 1. Prije obavljanja terenske izmjere, preciznosti mjerenja horizontalnih pravaca, zenitnih kutova i duljina mjerne stanice ispitane su prema normama ISO 17123-3:2001 (ISO 2001, Zrinjski i dr. 2011) i ISO 17123-4:2012 (ISO 2012, Barković i dr. 2016). Ispitivanjem je utvrđeno da je geodetska mjerna stanica ispravna te da su zadovoljene specifikacije deklarirane od proizvođača.



Slika 3. Dimnjak te upotrijebljeni instrument (Leica TCRP1201) i pribor (Polović 2019).

Tablica 1. Tehničke specifikacije geodetske mjerne stanice Leica TCRP1201+ R400 (Leica 2006).

Parametar	Vrijednost
<i>Mjerenje kuta (Hz i V)</i>	
Mjerna nesigurnost (ISO 17123-3):	1"
<i>Mjerenje duljina – s reflektorom</i>	
Domet (GPR1):	3000 m
Mjerna nesigurnost (ISO 17123-4):	1 mm + 1,5 ppm
<i>Mjerenje duljina – bez reflektora</i>	
Domet:	400 m
Mjerna nesigurnost (ISO 17123-4):	2 mm + 2 ppm
Povećanje durbina:	30x

Geodetska izmjera dimnjaka obavljena je s točaka geodetske mreže, koja je prethodno uspostavljena u neposrednoj blizini dimnjaka. Primjenom načela geodetskih mreža posebnih namjena, ova je mreža realizirana kao klasična terestrička mikrotriangotrilateracijska mreža oblika geodetskog četverokuta (slika 4). Točke mreže stabilizirane su čeličnim bolcnama u razini tla. Geodetska izmjera horizontalnih pravaca u mreži obavljena je girusnom metodom mjerenjem u tri girusa. Istovremeno s mjerenjem horizontalnih pravaca mjereni su i zenitni kutovi, u tri ponavljanja i dva položaja instrumenta, te kose duljine, u šest ponavljanja. Izmjera kosih duljina u mreži obavljena je metodom dvostrukih mjerenja (mjerenja naprijed i natrag). Geodetska izmjera obavljena je primjenom metode prisilnog centriranja. Za vrijeme mjerenja mjernom stanicom na svakom stajalištu kontinuirano su mjereni i atmosferski parametri meteorološkim mjernim uređajem Lufft XA1000 (URL 1) s preciznom temperaturnom i higrometerskom sondom Lufft 8130.TFF (URL 2). Referentni koordinatni sustav mreže realiziran je kao lokalni trodimenzionalni (3D) koordinatni sustav, neovisan o starom i novom državnom terestričkom i visinskom referentnom koordinatnom sustavu. Geodetska izmjera dimnjaka obavljena je s točaka A i D prethodno uspostavljene mikrotriangotrilateracijske mreže u 14 približno horizontalnih presjeka na međusobnom visinskom razmaku od približno 5 m.

3.1. Računska obrada podataka i izjednačenje geodetske mreže

Prethodna računaska obrada podataka mjerenja uspostavljene mikrotriangotrilateracijske mreže obuhvaća korekciju mjenjenih kosih duljina za meteorološke i atmosferske parametre (Leica 2006, Barković i dr. 2016, Zrinjski i dr. 2019) te računanje srednjih vrijednosti horizontalnih pravaca, zenitnih kutova i kosih duljina iz više ponavljanja mjerenja u 3 girusa. Izjednačenje mikrotriangotrilateracijske mreže obavlja se primjenom Gauss-Markovljeva modela izjednačenja i metode najmanjih kvadrata (Caspary 2000). Datum mreže definiran je kao konvencionalni datum s minimalnom prisilom pri čemu su parametri referentnog lokalnog 3D koordinatnog sustava definirani fiksiranjem približnih koordinata točaka A i D u sklopu izjednačenja.

Tablica 2. Izjednačene koordinate točaka mreže s pripadnom ocjenom točnosti.

Točka	y [m]	x [m]	H [m]	s_y [mm]	s_x [mm]	s_H [mm]
A	1000,000	500,000	50,000	0,0	0,0	0,0
B	1048,022	534,143	50,165	0,5	0,4	0,3
C	1019,119	479,389	49,776	0,5	0,4	0,3
D	1072,135	500,000	49,661	0,0	0,0	0,0

U tablici 2 prikazani su konačni rezultati računaska obrade mreže, tj. izjednačene koordinate točaka s pripadnom ocjenom točnosti. Distribucija položajne točnosti vizualizirana je apsolutnim i relativnim elipsama pouzdanosti koje obuhvaćaju razinu povjerenja od 95% (slika 4).

Na temelju pokazatelja ocjene točnosti izjednačenih nepoznanica, odnosno izjednačenih koordinata točaka mreže te pripadnih elemenata apsolutnih i relativnih elipsi položajne točnosti vidljiva je iznimno visoka položajna točnost. Distribuciju položajne točnosti na pojedinim točkama determinira primarno konfiguracija mreže te vrsta obavljenih mjerenja što je evidentno iz orijentacija elipsi. Analizom vizualizacije apsolutnih i relativnih elipsi pouzdanosti, točnost mreže ocjenjuje se kao približno izotropna te homogena. Sve to upućuje na nepostojanje grubih pogrešaka i sustavnih utjecaja u mjerenjima. Konačan rezultat izjednačenja mreže uz definiciju konvencionalnog datuma ocjenjuje se kao iznimno kvalitetan i zadovoljavajući.

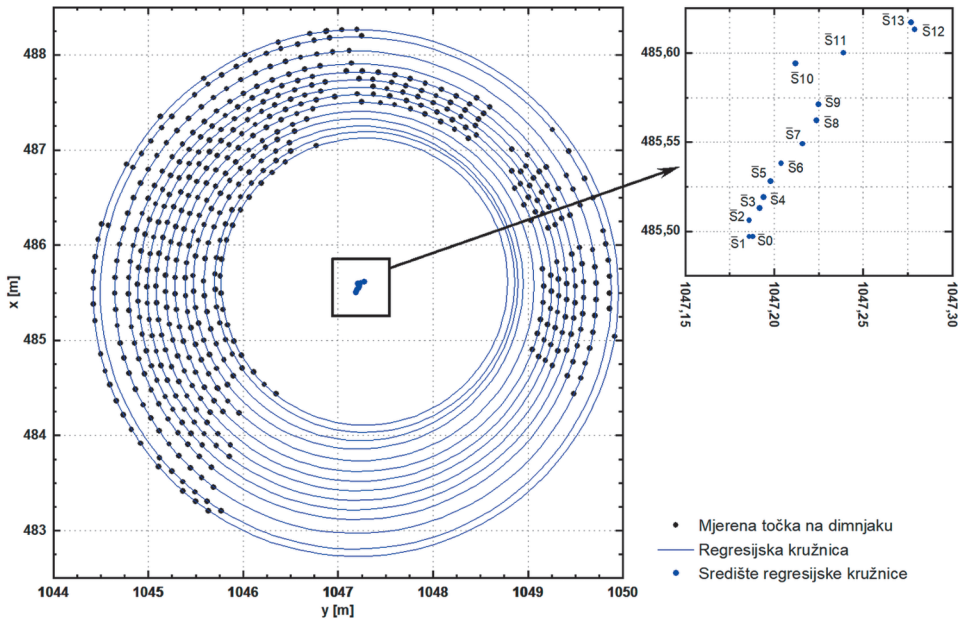
3.2. Određivanje koordinata točaka dimnjaka i modeliranje horizontalnih presjeka

Geodetska izmjera dimnjaka s točaka A i D mikrotriangotrilateracijske mreže po 14 približno horizontalnih presjeka rezultirala je skupom od 497 detaljnih točaka. Prostorne koordinate izmjerenih točaka dimnjaka određene su tahimetrijskom metodom izmjere na temelju izjednačenih vrijednosti koordinata točaka uspostavljene geodetske mreže. Gustoća i raspored detaljnih točaka na dimnjaku vizualizirani su na slikama 5 i 6. Položajna točnost svake mjerene točke određena je dosljednom primjenom algoritma zakona o prirastu varijanci (Rožić 2007), a na temelju poznate položajne točnosti točaka geodetske osnove i tehničkih specifikacija upotrijebljene geodetske mjerne stanice.

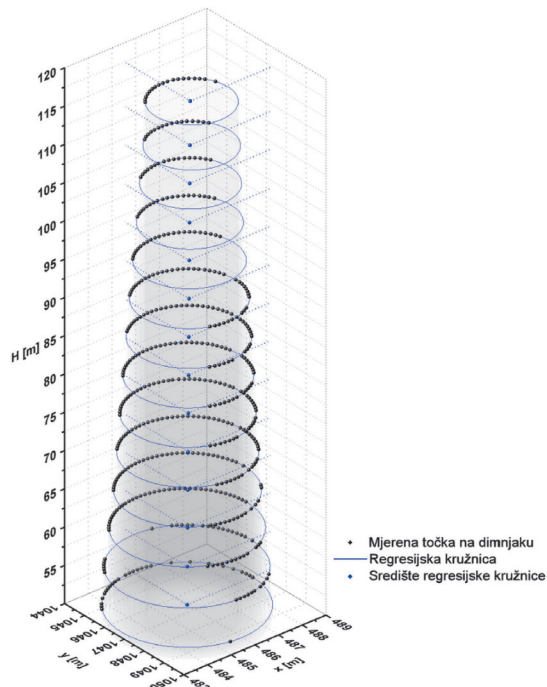
U potpunosti dosljedno matematičkom modelu modeliranja (potpoglavlje 2.1) određene su regresijske kružnice svakoga pojedinačnog horizontalnog presjeka dimnjaka. Rezultati regresijskog modeliranja prikazani su u tablici 4. Dvodimenzionalna i trodimenzionalna vizualizacija izmjerenih točaka i pripadnih regresijskih kružnica po horizontalnim presjecima dimnjaka dani su na slikama 5 i 6. Središta 14 regresijskih kružnica osnova su za modeliranje prostorne osi dimnjaka.

Tablica 4. Rezultati regresijskog modeliranja horizontalnih presjeka dimnjaka.

Presjek	y [m]	x [m]	H [m]	R [m]	s_y [mm]	s_x [mm]	s_H [mm]	s_R [mm]
\bar{S}_0	1047,188	485,497	51,556	2,767	2,0	1,2	1,1	1,4
\bar{S}_1	1047,186	485,497	56,544	2,690	2,0	1,8	2,7	1,5
\bar{S}_2	1047,186	485,506	61,596	2,536	0,4	0,4	7,1	0,3
\bar{S}_3	1047,192	485,513	66,524	2,396	0,7	0,8	1,9	0,6
\bar{S}_4	1047,194	485,519	71,496	2,301	1,1	1,4	1,1	1,1
\bar{S}_5	1047,198	485,528	76,545	2,209	1,0	1,2	2,2	0,9
\bar{S}_6	1047,204	485,538	81,506	2,119	1,1	1,4	2,1	1,0
\bar{S}_7	1047,216	485,549	86,502	2,031	1,3	1,7	6,9	1,3
\bar{S}_8	1047,224	485,562	91,500	1,941	1,0	1,3	3,3	1,0
\bar{S}_9	1047,225	485,571	96,493	1,837	3,9	1,5	2,0	3,1
\bar{S}_{10}	1047,212	485,594	101,422	1,735	5,5	2,3	3,5	4,8
\bar{S}_{11}	1047,239	485,600	106,538	1,653	7,0	2,7	1,4	6,2
\bar{S}_{12}	1047,279	485,613	111,519	1,580	7,8	2,8	2,2	6,9
\bar{S}_{13}	1047,277	485,617	117,275	1,509	8,3	2,9	1,7	6,4



Slika 5. Tlocrtni (2D) prikaz izmjerenih točaka i pripadnih regresijskih kružnica.

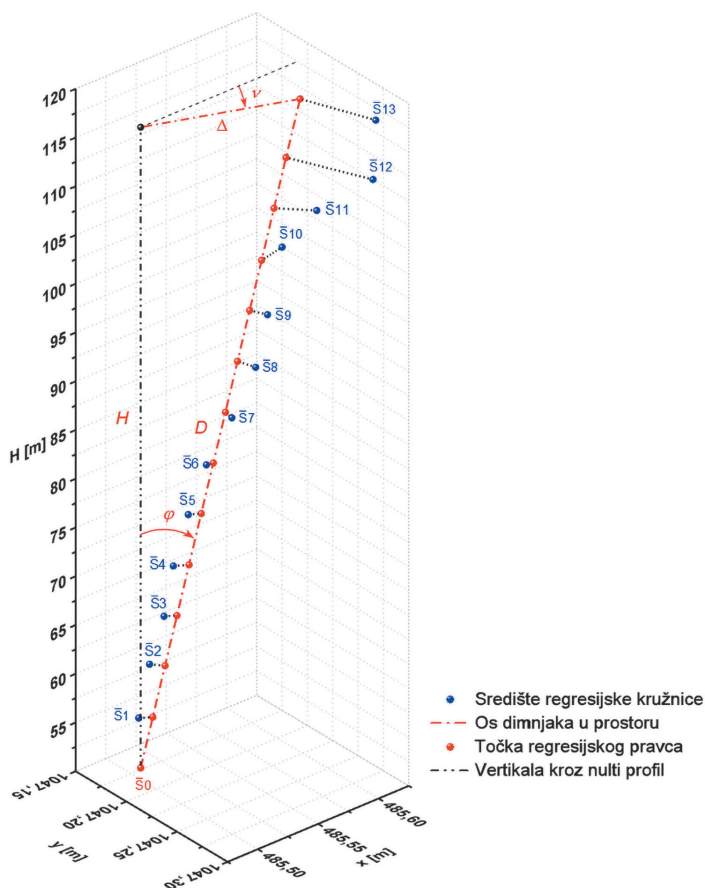


Slika 6. 3D prikaz izmjerenih točaka i pripadnih regresijskih kružnica.

Na temelju rezultata regresijskog modeliranja kružnica po pojedinim horizontalnim presjecima dimnjaka utvrđen je nagib dimnjaka, i to na decimetarskoj razini (slika 5). Analizom kriterija točnosti parametara regresijskih kružnica (tablica 4) vidljiva je iznimno visoka ostvarena točnost. Distribucija točnosti pojedinih horizontalnih presjeka u skladu je s očekivanjima i primarno je uvjetovana visinom presjeka, točnošću mjerenja te brojem mjerenih točaka po pojedinom presjeku (slika 5).

3.3. Određivanje parametara vertikalnosti i regresijsko modeliranje osi

U konačnici, dosljednom primjenom matematičkog algoritma (potpoglavlje 2.2) određena je prostorna os dimnjaka modeliranjem 3D regresijskog pravca. Rezultati regresijskog modeliranja prikazani su u tablici 5. Trodimenzionalna vizualizacija središta regresijskih kružnica, prostorne osi dimnjaka i ključnih parametara za određivanje vertikalnosti dana je na slici 7. Točnost parametara nagiba dimnjaka određena je dosljednom primjenom zakona o prirastu varijanci (Rožić 2007).



Slika 7. 3D prikaz rezultata regresijskog modeliranja osi dimnjaka.

Tablica 5. *Konačni rezultati ispitivanja vertikalnosti dimnjaka.*

<i>Položaj osi na referentnom presjeku</i>		
y [m]; s_y [mm]	1047,1880	2,00
x [m]; s_x [mm]	485,4970	1,20
H [m]; s_H [mm]	51,5560	1,10
<i>Parametri smjera osi dimnjaka</i>		
\bar{a} ; $s_{\bar{a}}$	0,0005699	0,0001061
\bar{b} ; $s_{\bar{b}}$	0,0015294	0,0001000
\bar{c} ; $s_{\bar{c}}$	0,9999987	0,0000002
<i>Položaj horizontalnih presjeka</i>		
\bar{t}_1 [m]; $s_{\bar{t}_1}$ [mm]	4,9880	21,26
\bar{t}_2 [m]; $s_{\bar{t}_2}$ [mm]	10,0356	55,88
\bar{t}_3 [m]; $s_{\bar{t}_3}$ [mm]	14,9679	14,96
\bar{t}_4 [m]; $s_{\bar{t}_4}$ [mm]	19,9400	8,66
\bar{t}_5 [m]; $s_{\bar{t}_5}$ [mm]	24,9890	17,32
\bar{t}_6 [m]; $s_{\bar{t}_6}$ [mm]	29,9500	16,53
\bar{t}_7 [m]; $s_{\bar{t}_7}$ [mm]	34,9461	54,32
\bar{t}_8 [m]; $s_{\bar{t}_8}$ [mm]	39,9442	25,98
\bar{t}_9 [m]; $s_{\bar{t}_9}$ [mm]	44,9371	15,75
\bar{t}_{10} [m]; $s_{\bar{t}_{10}}$ [mm]	49,8661	27,56
\bar{t}_{11} [m]; $s_{\bar{t}_{11}}$ [mm]	54,9821	11,02
\bar{t}_{12} [m]; $s_{\bar{t}_{12}}$ [mm]	59,9631	17,32
\bar{t}_{13} [m]; $s_{\bar{t}_{13}}$ [mm]	65,7191	13,38
<i>Nagib osi dimnjaka</i>		
φ [° ' "]; s_{φ} ["]	0° 5' 37"	20,8"
<i>Smjerni kut nagiba osi dimnjaka</i>		
ν [° ' "]; s_{ν} [° ' "]	20° 26' 13"	3° 41' 58,9"
<i>Visina dimnjaka</i>		
H [m]; s_H [mm]	65,7190	13,43
<i>Duljina dimnjaka</i>		
D [m]; s_D [mm]	65,7191	13,43
<i>Horizontalno odstupanje vrha osi dimnjaka od vertikale</i>		
Δ [m]; s_{Δ} [mm]	0,1073	6,62

Na temelju rezultata regresijskog modeliranja slijedi jednadžba prostorne osi dimnjak u parametarskom obliku:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 1047,188 + 0,0005699 \cdot t \\ x = 485,497 + 0,0015294 \cdot t \\ H = 51,556 + 0,9999987 \cdot t \end{array} \right\}, \quad t \in [0 \text{ m}, 65,7191 \text{ m}], \quad (28)$$

gdje su:

y, x, H – prostorne koordinate točke osi dimnjaka,
 t – udaljenost točke od referentnog presjeka ($\bar{S}0$).

Dosljednom primjenom prethodno iznesene metodologije modeliranja prostorne osi dimnjaka određen je kut nagiba osi dimnjaka od vertikale i iznosi $\varphi = 0^\circ 5' 37''$ s pripadnim standardnim odstupanjem $s_\varphi = 20,8''$ (tablica 5). Podatak o nagibu dimnjaka iznimno je važan u pogledu sigurnosti i stabilnosti građevine, stoga je vrlo važno uspoređivanje dobivenih vrijednosti s dopuštenim iznosom. Međunarodna norma EN 1996-1-1:2005 (CEN 2005) određuje dopušteno kutno odstupanje zidanih građevina od vertikale, ovisno o njezinoj visini, prema izrazu:

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{100\sqrt{H}}, \quad (29)$$

gdje su:

φ_{\max} – dopušteno kutno odstupanje građevine od vertikale u radianima,
 H – visina građevine u metrima.

Prema navedenom izrazu, dopušteno kutno odstupanje vrha osi dimnjaka od vertikale iznosi $\varphi_{\max} = 0^\circ 4' 14''$. Nagib osi dimnjaka u Dugoj Resi određen geodetskim mjerenjima premašuje dopuštenu vrijednost.

4. Zaključak

Metoda ispitivanja vertikalnosti dimnjaka prikazana u ovom radu temelji se na geodetskoj izmjeri detaljnih točaka na plaštu dimnjaka po približno horizontalnim presjecima primjenom geodetske mjerne stanice.

Osnova za geodetsku izmjeru i računanje koordinata mjerenih točaka na plaštu dimnjaka geodetska je mreža, koja je uspostavljena u skladu sa svim načelima mreža posebnih namjena. Izjednačenje mikrotriangotrilateracijske mreže obavljeno je primjenom Gauss-Markovljeva modela izjednačenja i metode najmanjih kvadrata uz definiciju konvencionalnog datuma s minimalnom prisilom te realizacijom lokalnog trodimenzionalnoga koordinatnog sustava.

Radi određivanja središta izmjerenih horizontalnih presjeka dimnjaka obavljeno je modeliranje presjeka kružnicama. To je provedeno primjenom regresijskog modeliranja pomoću algoritma regularnog izjednačenja posrednih mjerenja različitih točnosti i metode najmanjih kvadrata. Središta regresijskih kružnica definiraju realan položaj osi dimnjaka u prostoru.

U svrhu definiranja osi dimnjaka jednoznačnom matematičkom funkcijom obavljeno je modeliranje prostornog pravca primjenom trodimenzionalne linearne regresije. To je provedeno pomoću matematičkog modela posrednih mjerenja s uvjetima nepoznanica i metode najmanjih kvadrata. Ključan je korak prikazane metode određivanje ocjene točnosti u svim koracima računске obrade, dosljednom primjenom zakona o prirastu pogrešaka.

U konačnici, određen je kut nagiba osi dimnjaka u Dugoj Resi u odnosu na vertikalnu te iznosi $0^{\circ}5'37''$ s pripadnim standardnim odstupanjem od $20,8''$. Taj iznos nagiba uspoređen je s dopuštenom vrijednošću od $0^{\circ}4'14''$ definiranom međunarodnom normom. Zaključuje se da je izračunati nagib osi dimnjaka veći za $0^{\circ}1'23''$, tj. za 33% od dopuštene vrijednosti.

Razmatrajući neodržavanje dimnjaka, njegovo današnje stanje, oštećenja iz Domo-vinskog rata te rezultate obavljenih mjerenja može se upozoriti na opasnost od pojave trajnih deformacija strukture dimnjaka pa i njegova rušenja.

Literatura

- Barazzetti, L., Previtali, M., Roncoroni, F. (2019): The Use of Terrestrial Laser Scanning Techniques to Evaluate Industrial Masonry Chimney Verticality, Conference Proceedings, ISPRS Archives Volume XLII-2/W11, GEORES 2019 – 2nd International Conference of Geomatics and Restoration, Milan, Italy, 173–178.
- Barković, Đ., Zrinjski, M., Baričević, S. (2016): Automatizacija ispitivanja preciznosti elektrooptičkih daljinomjera na kalibracijskoj bazi, Geodetski list, 70 (93), 4, 311–336.
- Casparly, W. F. (2000): Concepts of Network and Deformation Analysis, School of Geomatic Engineering, The University of New South Wales, Australia.
- CEN (2005): EN 1996-1-1:2005 – Eurocode 6 – Design of masonry structures – Part 1-1: General rules for reinforced and unreinforced masonry structures, European Committee for Standardization, Brussels, Belgium.
- Feil, L. (1989): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja – prvi dio, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- ISO (2001): ISO 17123-3:2001 – Optics and optical instruments – Field procedures for testing geodetic and surveying instruments – Part 3: Theodolites, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland.
- ISO (2012): ISO 17123-4:2012 – Optics and optical instruments – Field procedures for testing geodetic and surveying instruments – Part 4: Electro-optical distance meters (EDM measurements to reflectors), International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland.
- Klak, S. (1982): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb.
- Kregar, K., Ambrožič, T., Kogoj, D., Vežočanik, R., Marjetič, A. (2015): Determining the inclination of tall chimneys using the TPS and TLS approach, Measurement, Vol. 75, 354–363.
- Leica (2006): Leica TPS12000 User Manual – Version 5.0, Leica Geosystems AG, Heerbrugg, Switzerland.
- Marjetič, A., Ambrožič, T., Kogoj, D. (2011): Determination of the Nonverticality of High Chimneys, Geodetski vestnik, Vol. 50, No. 4, 701–712.
- Polović, A. (2019): Ispitivanje i analiza vertikalnosti dimnjaka, diplomski rad, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

- Rožić, N. (2007): Računska obrada geodetskih mjerenja, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Snow, K., Schaffrin, B. (2016): Line fitting in Euclidean 3D space, *Studia Geophysica et Geodaetica*, Vol. 60, No. 2, 210–227.
- Zheng, S., Ma, D., Zhang, Z., Hu, H., Gui, L. (2012): A novel measurement method based on silhouette for chimney quasi-static deformation monitoring, *Measurement*, Vol. 45, 226–234.
- Zrinjski, M., Barković, Đ., Tir, M. (2011): Automatizacija ispitivanja preciznosti teodolita prema normi HRN ISO 17123-3:2004, *Geodetski list*, 65 (88), 2, 123–144.
- Zrinjski, M., Barković, Đ., Baričević, S. (2019): Precise Determination of Calibration Baseline Distances, *Journal of Surveying Engineering*, 145, 4, 05019005, 1–9, DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)SU.1943-5428.0000288](https://doi.org/10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000288).

Mrežne adrese

URL 1: Lufft XA1000,

<https://www.lufft.com/download/manual-lufft-handheld-xa1000-xp200-xp400-en/>, (30. 7. 2019.).

URL 2: Lufft T/H sonda 8130.TFF,

<https://www.lufft.com/products/accessories-310/temperature-humidity-sensor-for-reference-measurements-1881/productAction/outputAsPdf/>, (30. 7. 2019.).

Testing and Analysis of Chimney Verticality

ABSTRACT. In a chimney life cycle, due to its age, wind and other atmospheric conditions, tectonic activity, construction flaws, and the change of physical and mechanical properties of construction materials, significant chimney deformations and inclinations are plausible and catastrophic collapses can occur. Therefore, it is necessary to periodically analyze the stability of high industrial chimneys, whereby one of the fundamental inspection parameters being the inclination of the chimney axis. Many classical and modern methods for determination and analysis of chimney inclination have been developed. This paper describes a method of testing and analyzing the chimney inclination based on the measurement of the horizontal chimney cross section based on the preestablished geodetic reference network. Circular chimney cross sections are modeled by method of circular regression, and finally the spatial chimney axis is derived by 3D linear regression. In this paper a practical example of the testing and analysis of the inclination of a masonry chimney in the area of the former Duga Resa Cotton Industry in Duga Resa, Croatia, has been given.

Keywords: chimney, geodetic network, circle regression, inclination of chimney axis, 3D linear regression.

Primljeno / Received: 2019-08-02

Prihvaćeno / Accepted: 2019-09-20