UDK 519.8
Pregledni članak

**Dr. sc. Antoaneta Klobučar,**
**prof. dr. Miljenko Crnjac**
**Ekonomski fakultet, Osijek**

# NEKE PRIMJENE TEORIJE GRAFOVA U EKONOMIJI

*U radu je na početku dan uvod u osnove teorije grafova. U nastavku su ukratko objašnjene transportne mreže, mrežno planiranje i određivanje najkraćeg i najdužeg puta.*

## 1. UVOD

Nemoguće je utvrditi kada su se ljudi počeli koristiti grafovima. Matematičari su tek prije dva stoljeća počeli promatrati neke probleme na grafovima, a teorija grafova, kao posebna matematička disciplina stara je tek nekoliko desetljeća.

Teorija grafova omogućava da se brojni problemi, iz vrlo različitih područja, formiraju i rješavaju na jedinstven način.

Velika je primjena teorije grafova u elektronici, teoriji automatskog upravljanja, operacijskom istraživanju, teoriji pouzdanosti prenošenja informacija, kemiji, industriji, biologiji itd.

## 2. GRAFOVI

Opisno govoreći, grafovi su figure sastavljene od točaka koje su povezane crtama. Točke grafa nazivamo vrhovi, a crte koje ih povezuju zovemo bridovi.

Grafovi mogu biti orijentirani i neorijentirani. Ako za svaki brid znamo koji je vrh početni, a koji je krajnji, graf je orijentiran. U suprotnom kažemo da je neorijentiran.

Ako postoji brid koji spaja neki vrh sam sa sobom, kažemo da imamo petlju na grafu. Ukoliko imamo više bridova koji spajaju neka dva vrha, dolazimo do pojma multigrafa. (Graf je specijalan slučaj multigrafa.)

Za dva vrha neorijentiranoga grafa bez petlji kažemo da su susjedni, ako su spojeni bridom. Za brid i vrh kažemo da su susjedni ako se vrh nalazi na danom bridu. Broj susjednih vrhova nekog vrha x naziva se stupanj vrha x.

Najmanji broj vrhova koje je potrebno udaljiti iz grafa $G$ da bi se dobio nepovezani graf ili graf bez bridova naziva se povezanost grafa (ili povezanost grafa u odnosu na vrhove.) U k-povezanom grafu svi su vrhovi stupnja $\geq k$.

Skup vrhova naziva se separirajući skup za vrhove x i y (koji nisu susjedni), ako, kad udaljimo vrhove iz tog skupa, graf postaje nepovezan, a vrhovi x i y se nalaze u raznim komponentama povezanosti.

U vezi sa separirajućim skupom imamo sljedeći teorem (Mengerov teorem): Broj vrhova minimalnog separirajućeg skupa za nesusjedne vrhove x i y povezanoga grafa jednak je maksimalnom broju međusobno disjunktnih puteva u odnosu na vrhove koji povezuju x i y.

## 3. TRANSPORTNE MREŽE

Transportna mreža je konačni orijentirani graf, kod kojeg je svakom bridu $u_i$ pridružen nenegativan broj $C_i = f(u_i)$. Veličine $C_i$ nazivaju se propusne sposobnosti bridova.

Kod transportne mreže postoji vrh a (ulaz mreže) u koji ne ulazi ni jedan brid i vrh b (izlaz mreže) iz kojeg ne izlazi ni jedan brid. Funkcija $\varphi(u_i)$ definirana na bridovima naziva se protok (fluks) ako vrijedi $0 \leq \varphi(u_i) \leq C_i$ i ako za svaki vrh, osim za vrhove a i b vrijedi da je ukupna suma tokova koji ulaze, jednaka ukupnoj sumi tokova koji izlaze.

Cjelokupan protok kroz transportnu mrežu jednak je zbroju protoka što izlaze iz a, odnosno zbroju protoka što ulaze u b.

Kod transportnih mreža možemo promatrati sljedeći problem:

Za danu transportnu mrežu odrediti maksimalni cjelokupni protok. Taj se problem rješava pomoću Ford-Falkelsonovog algoritma. (vidi 3.)

Sljedeća primjena je određivanje najkraćeg i najdužeg puta na grafu.

U mnogim problemima broj pridružen bridu interpretiramo kao dužinu brida. (Normalno da je to uvijek pozitivan broj.) Zadatak određivanja najkraćeg puta sreće se kad stvarno treba odrediti najkraći put, npr. između dva grada po mreži puteva, ili između dvije točke u velikom gradu.

Međutim minimizacija se ne mora raditi samo u odnosu na geometrijsku udaljenost. Može se npr. tražiti put čije prelaženje zahtijeva najmanje goriva, put kojim se najbrže može doći ili najjeftiniji put.

I drugi zadaci koji u prvi tren ni po čemu ne podsjećaju na zadatak određivanja najkraćeg puta svode se upravo na to.

Jedan od algoritama za nalaženje najkraćeg puta dao je Ford. U literaturi je opisano vrlo mnogo takvih algoritama. Svi su oni slični, jedino što se razlikuju u načinu provođenja procedure. Pregled najvažnijih algoritama može se naći u knjizi B. Roya (vidi 2.).

Sljedeće na što možemo primijeniti teoriju grafova je mrežno planiranje. U okviru mrežnog planiranja razrađeni su deterministički i stohastički modeli. U prvom slučaju, vrijeme trajanja pojedine aktivnosti je fiksirano, dok se u drugom uzima u obzir utjecaj slučajnih faktora na vrijeme trajanja aktivnosti.

Slučajni projekt se pregledno predstavlja pomoću tzv. mrežnog dijagrama koji je zapravo jedan neorijentirani graf. Vrhovi grafa predstavljaju događaje, a bridovi grafa aktivnosti, tj. elementarne aktivnosti u projektu.

Događaj predstavljen nekim vrhom nastupa kada su završene sve aktivnosti koje odgovaraju bridovima koji ulaze u taj vrh. Nijedna od aktivnosti koja je predstavljena bridovima koji izlaze iz nekog vrha ne može početi prije nego što se završe sve aktivnosti predstavljene bridovima koji završavaju u tom vrhu.

Početak je projekta predstavljen vrhom koji nema ulazećih bridova, a kraj projekta vrhom iz kojeg ne izlazi ni jedan brid.

Mrežni dijagram ne sadrži konture, jer bi egzistencija konture vodila do zaključka da se neki događaj završio prije i nego što je počeo. Svakom bridu mrežnog planiranja pridružuje se nenegativan broj koji predstavlja dužinu trajanja odgovarajuće aktivnosti.

Ovo je bio samo kratak pregled nekih od mogućih primjena teorije grafova u ekonomiji. Kako se pojedini algoritmi točno izvode, bit će tema nekog sljedećeg članka.

## *LITERATURA*

1. G. Chartrand and L. Lesniak, Graphs & Digraphs, third edition, Chapman & Hall, New York, 1996.

2. B. Roy, Algebre moderne et theorie des graphes, I, II, Paris 1969-1970.

3. D. Veljan, Kombinatorka s teorijom grafova, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

**Antoaneta Klobučar, Ph. D.,**
**Miljenko Crnjac, Ph. D.**

## SOME USES THE GRAPH THEORY IN ECONOMICS

*Summary*

The work begins with the introduction in the theory of graphs. Further on the transpot nets, net planning and determination of the shortest and longest way are briefly explained.