UDK 517.8:331.1
Pregledni članak

Mladen Antunović i Javor Altman
Elektrotehnički fakultet, Osijek
Marijana Zekić
Ekonomski fakultet, Osijek

OPTIMIZACIJA PROIZVODNJE LINEARNIM PROGRAMIRANJEM S OSVRTOM NA RADNO VRIJEME

Optimizacija radnog vremena putem linearnog programiranja značajan je način za povećanje produktivnosti. U radu su matematički razrađeni problemi minimiziranja radnih sati, neiskorištenog radnog vremena i troškova u tri posebna slučaja: 1) kada je proizvodnja jednaka u svim razdobljima, 2) kada proizvodnja nije nužno jednaka, a obavlja se u redovito radno vrijeme uposlenika, i 3) kada se proizvodnja obavlja i u prekovremeno radno vrijeme uposlenika. Problemi su rješavani uz pomoć simplex metode, te je izvršena postoptimalna analiza. Analiza vrijednosti s desnih strana ograničenja pokazuje da postoje veliki intervali u kojima se većina varijabli može kretati bez utjecaja na optimalno rješenje, dok analiza osjetljivosti pokazuje da koeficijenti uz varijablu x u funkciji cilja mogu biti bilo koje pozitivne, odnosno negativne vrijednosti, ovisno o predznaku u funkciji cilja. Predložena su i opisana i neka druga rješenja problema optimizacije putem elipsoidnog i Karmakarovog algoritma za linearno programiranje (1984.), te General Algrebraic Modeling Systema (GAMS).

1. UVOD - OPTIMIZACIJA PROIZVODNJE S EKONOMSKIM ISTRAŽIVANJIMA

Proces traženja optimalnog rješenja prisutan je u svim područjima ekonomske znanosti; na makroekonomskoj razini pronalaženjem optimalnog razmještaja kapaciteta prema granama, djelatnostima i područjima, na razini više tvrtki iste djelatnosti, te na mikroekonomskoj razini u svim dijelovima reprodukcijskog ciklusa i u svim poslovnim funkcijama. Pod uvjetom da su pojedinačni ciljevi poslovnog procesa usklađeni s globalnim ciljem tvrtke, pristupa se optimizaciji pojedinih dijelova poslovnog procesa. Složenost tog procesa determinirana unutrašnjim i vanjskim utjecajima na ciljni rezultat (manifestirana kroz promjenu cijena sirovina, povećanje ili smanjenje kapaciteta, promjenu količina koje se na tržište mogu plasirati, itd.) najbolje je predstavljena sustavskim pristupom [16]. Linearno programiranje danas igra odlučujuću ulogu ne samo u optimiranju već i u ekonomskom i strateškom planiranju, analizi algoritama, kombinatorici, kriptografiji i mnogim drugim područjima. Pri organiziranju proizvodnje jednog proizvoda često je potrebno na osnovi postojećih tržišnih zakonitosti, odgovarajućih ulaznih podataka i unaprijed postavljenog kriterija pronaći odgovore na pitanja kao što su:

- da li organizirati i prekovremeni rad
- da li je profitabilno zapošljavati radnike na neodređeno razdoblje
- da li je prihvatljivo neiskorišteno radno vrijeme, vrijeme u kojem se ne proizvodi, itd.

Sve su to problemi koji se mogu matematički opisati i riješiti metodama linearnog programiranja. Ovim radom želi se konkretnim primjerima iz ekonomske prakse ukazati na način kako se navedeni problemi mogu matematički formalizirati u oblik prikladan za pronalaženje optimalnog rješenja metodama linearnog programiranja uz pomoć osobnog računala i postojeće programske podrške.

Problem matematičkog programiranja je odrediti vektor x^* koji je rješenje problema:

$$\min z(x), \quad g_i(x) \leq 0 \ i = 1, \ldots, n \qquad (1)$$

Ako su funkcije $\{g_i\}$ i z linearne u varijablama x_i riječ je o problemu linearnog programiranja.

Osnovna formulacija linearnog problema optimizacije je dakle:

$$z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \tag{2}$$

gdje je z(**x**) funkcija cilja, **c** vektor poznatih elemenata, **x** vektor varijabli koje treba odrediti, **A** matrica tehnologije, **b** vektor ograničenja. Naći optimalno rješenje podrazumijeva određivanje vektora **x** za koji z(**x**) postiže minimum uz uvjet **Ax≤b**. Autori će se usredotočiti na pronalaženje parametara vektora **c** i **b** i matrice **A**, dok će se pronalaženje vektora **x** obaviti uz pomoć računala.

2. USPOREDBA METODOLOGIJE LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Metodologija za rješavanje problema optimizacije razvijala se počevši od klasične Lagrangeove metode neodređenih multiplikatora, koja se pokazala neefikasnom zbog uvjeta nenegativnosti varijabli X_j u modelu linearnog programiranja, zatim putem Fourierovih metoda za stohastičke probleme optimizacije, dok je prva stvarno upotrebljiva metoda bila Dantzigova simpleks metoda (1940) [6]. Dantzigova simpleks metoda bila je najučinkovitija za rješavanje problema linearnog programiranja sve do 1984. godine kada je objavljivanjem Karmakarovog algoritma započeo novi val istraživanja, što je rezultiralo novim skupom metoda poznatim pod nazivom "interiorpoint" metode. Od njih se nakon deset godina iskristalizirao "primal dual algoritam" kao najvažniji iz skupine Karmakarovih algoritama [17], [9] , [11], objašnjen u odjeljku 4 ovog rada. Brojni su autori razvijali algoritme za poboljšanje simplex metode, kao npr. Shamir, Borgwardt, Adler, Smale [10]. Pokazano je da se simplex metoda može ubrzati uz pomoć prosjeka ukoliko ulazne vrijednosti potječu iz određene distribucije vjerojatnosti, razvijen je oblik simplex metode s primjerima u eksponencijalnom vremenu (Klee, Minty, u [10]), a također su izneseni nedostaci simplex metode u smislu točnosti kod stvarnih problema (Shamir, u [10]).

Unatoč brojnim primjenama linearnog programiranja, optimizacija radnog vremena nije u dovoljnoj mjeri istražena. Budući da su tipični problemi rješavani simplex metodom u području planiranja proizvodnje vezani uz pronalaženje minimalnih troškova proizvodnje s ograničenjima na radnu snagu i količine zaliha, izabrani način promatranja proizvodnje uz minimiziranje radnog vremena potrebnog za proizvodnju predstavlja specifičan pristup još nedovoljno prisutan u literaturi.

3. OPTIMIZACIJA PROIZVODNJE JEDNOG PROIZVODA

Formulacija problema

Prema [15], proizvodnja jednog proizvoda promatra se na sljedeći način:

Vremenski interval u kojem se planira proizvodnja (npr. jedna godina) moguće je podijeliti na T kraćih razdoblja (primjerice mjeseci). Za svako razdoblje t = 1, ..., T definira se:

- d_t - potražnja za proizvodom u razdoblju t, odnosno količina proizvoda prodana na tržištu
- x_t - proizvodnja u razdoblju t
- s_t - količina proizvoda na skladištu na kraju razdoblja t
- s_0 - količina proizvoda na skladištu na početku vremenskog intervala u kojem se planira proizvodnja

Pretpostavlja se da je potražnja d_k poznata za svaki t = 1, ..., T, a procjenjuje se na temelju iskustva i nekih ekonomskih pokazatelja. Slično se procjenjuje i veličina s_0.

Količina proizvoda na skladištu (stanje skladišta) na kraju razdoblja t jednaka je stanju skladišta na kraju prethodnog razdoblja uvećano za proizvodnju u razdoblju t i umanjeno za iznos potražnje u tom razdoblju što se može napisati u obliku sljedeće jednadžbe:

$$s_t = s_{t-1} + x_t - d_t \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3}$$

Pretpostavlja se da se kvaliteta proizvoda ne mijenja zbog dužeg stajanja na skladištu. Treba uočiti da u slučaju kada potražnja d_t premašuje proizvodnju x_t, s_t može biti negativan. Tada je $-s_t$ nestašica, manjak na kraju razdoblja t. U slučaju da se potrebe tržišta moraju odmah podmiriti, nestašica nije dopuštena, dakle postavlja se zahtjev $s_t \geq 0$ za svaki t = 1, ..., T. Izraz (3) može se zapisati u obliku

$$\begin{aligned} s_t &= s_{t-1} + x_t - d_t = (s_{t-2} + x_{t-1} - d_{t-1}) + \\ &+ x_t - d_t = ((s_{t-3} + x_{t-2} - d_{t-2}) + x_{t-1} - d_{t-1}) + \\ &+ x_t - d_t = s_0 + \sum_{k=1}^{t} x_k - \sum_{k=1}^{t} d_k \qquad t = 1, \ldots, T \end{aligned} \tag{4}$$

Budući da se d_t procjenjuje, nije uvijek moguće znati njegov točan iznos, pa će u slučaju dobre procjene u oko 50 % razdoblja stvarna potražnja biti veća od očekivane, tj. neće biti dovoljno proizvoda za pokrivanje potreba tržišta u tih 50 % razdoblja. Ukoliko je ta nestašica neprihvatljiva, potrebno je u svakom razdoblju t stvoriti zalihu σ_t koja će biti na raspolaganju u razdoblju t+1 pa se zahtjev postrožuje s

$$s_t \geq \sigma_t. \qquad (5)$$

Zaliha σ_t se procjenjuje na temelju potražnje u razdoblju t+1

$$\sigma_t = \gamma \cdot d_{t+1} \qquad t = 1, \ldots, T, \qquad (6)$$

gdje parametar γ može biti postotak razdoblja s nestašicom. Pretpostavlja se da je $0 \leq \gamma \leq 1$. Uzimajući posljednji zahtjev u obzir, dolazi do relacije za željenu proizvodnju u prvih t razdoblja zajedno.

$$a_t = \sum_{k=1}^{t} d_k + \sigma_t - s_0 \qquad t = 1, \ldots, T. \qquad (7)$$

Treba uočiti da je a_t poznat broj, jer se računa prema (7) na osnovi poznatih veličina d_k, σ_t i s_0. Ukoliko je $a_t<0$ za neki t, to bi značilo da je početna količina proizvoda na skladištu dovoljno velika da pokrije potrebe tržišta za prvih t razdoblja i zalihu za t+1 razdoblje σ_t. Ukoliko je $a_t \geq 0$, tada je a_t minimalna količina proizvoda koju je potrebno proizvesti u prvih t razdoblja zajedno da ne bi bilo nestašice u razdoblju t i da je osigurana zaliha za iduće razdoblje σ_t.

Iz relacija (4), (5) i (7) slijedi

$$s_0 + \sum_{k=1}^{t} x_k - \sum_{k=1}^{t} d_k \overset{(4)}{=} s_t \overset{(5)}{\geq} \sigma_t$$

$$\sum_{k=1}^{t} x_k \geq \sum_{k=1}^{t} d_k - s_0 + \sigma_t \overset{(7)}{=} a_t \qquad t = 1, \ldots, T \qquad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{t} x_k \geq a_t.$$

Relacija (8) govori da ukupna proizvodnja u prvih t razdoblja treba biti veća ili jednaka željenoj proizvodnji. Pri tom vrijedi:

$$a_t = a_{t-1} + x_t \geq a_{t-1} \qquad t = 1, \ldots, T. \qquad (9)$$

Pretpostavlja se da je $a_T > 0$ jer bi u suprotnome to značilo da ništa nije potrebno proizvesti niti u jednom razdoblju.

Nadalje, definirajmo veličinu w_t kao broj radnih sati potreban za proizvodnju u razdoblju t. Uz pretpostavku da je za svako razdoblje broj radnih sati proporcionalan proizvodnji vrijedi:

$$w_t = \alpha \cdot x_t \qquad t = 1, \ldots, T, \qquad (10)$$

gdje je faktor proporcionalnosti α broj radnih sati po jedinici proizvoda. Više je načina na koje se mogu realizirati potrebni radni sati:

- kroz redovito radno vrijeme stalnih zaposlenika
- kroz redovito i prekovremeno radno vrijeme stalnih zaposlenika
- zapošljavanje honorarnih radnika prema potrebi uz stalne zaposlenike i sl.

a) Optimizacija proizvodnje kada su dovoljni stalni uposlenici i redovito radno vrijeme, uz uvjet da se proizvede ista količina proizvoda u svakom razdoblju

Najprije ćemo riješiti problem proizvodnje (odrediti x_t, t = 1, ..., T) za prvi slučaj: za proizvodnju su dovoljni stalni zaposlenici i redovito radno vrijeme. Pritom se neće uzimati u obzir prekovremeno radno vrijeme, godišnji odmori, bolovanja niti vrijeme bez posla, a također niti ograničenja kapaciteta strojeva. Promatra se u prvom koraku, dakle, jedan krajnje pojednostavljen slučaj u kojem je proizvodnja konstantna tijekom svakog razdoblja i jednaka za svako razdoblje.

$$x_t = x \qquad t = 1, \ldots, T. \qquad (11)$$

Cilj je minimizirati broj radnih sati uz ograničenja dana sa (8). Problem se može formalizirati kako slijedi:

$$\min_{x_t \in R} (\alpha x_t)$$

$$\sum_{k=1}^{t} x_k \geq a_t \qquad t = 1, \ldots, T$$

$$x_t \geq 0$$

Uzimajući u obzir (11), treba naći x za koji vrijedi:

$$\min_{x \in R} (x)$$

$$tx \geq a_t \qquad t = 1, \ldots, T. \qquad (12)$$

$$x \geq 0$$

Optimalno rješenje glasi:

$$x_t = x^* = \max(a_t/t), \qquad t \in \{1, \ldots, T\}, \qquad (13)$$

gdje je x* optimalan iznos proizvodnje.

Ako je poznat broj radnih sati za proizvodnju jedinice proizvoda α, za koji se pretpostavlja da je jednak u svakom razdoblju, moguće je izračunati broj radnika koje treba zaposliti

$$n = \frac{\alpha \cdot x^*}{K}, \tag{14}$$

gdje je K broj radnih sati po jednom radniku u jednom razdoblju (uz pretpostavku da su sva razdoblja jednakog trajanja). Kao primjer navodimo Tablicu 1. u kojoj su t, d_t, σ_t ulazni podaci, uz $s_0 = 140$, $\gamma = 0.2$ i $\alpha = 8$. Vremenski interval u kojem se planira proizvodnja je 1 godina podijeljena na 12 mjeseci.

Tablica 1. Primjer proizvodnje jednog proizvoda

T	d_t	σ_t	a_t	a_t/t	$t \cdot x^*$	$t \cdot x^* - a_t$
1	30	8	−102	−102	29	131
2	40	14	−56	−28	58	114
3	70	12	12	4	87	75
4	60	14	74	18.5	116	42
5	70	8	138	27.6	145	7
6	40	4	174	29	174	0
7	20	4	194	27.7	203	7
8	20	2	212	26.5	232	20
9	10	2	222	24.7	261	39
10	10	4	234	23.4	290	56
11	20	4	254	23.1	319	65
12	20	6	276	23	348	72

Elementi četvrtog stupca (a_t) izračunaju se prema (7). a_t/t daje prosjek mjesečne proizvodnje u prvih t mjeseci. Najveći od njih je optimalno rješenje x*, a postiže se u šestom mjesecu i iznosi 29. Posljednji stupac $t \cdot x^* - a_t = s_t - \sigma_t$ predstavlja višak proizvoda na skladištu. U njega nije uračunata zaliha σ_t potrebna za idući mjesec. U šestom mjesecu višak na skladištu iznosi 0, a na kraju godine 72.

Postoptimalna analiza

Za optimalno rješenje $x^* = 29$ dostignuta je granica ograničenja za šesto razdoblje (mjesec) po kojemu treba biti $6x \geq 174$. Kod ostalih razdoblja moguće je proizvesti i manje količine u granicama dopuštenog rješenja, ali to ne bi zadovoljavalo uvjet (11).

Provedena je i analiza vrijednosti dopunskih (slack) varijabli i cijena u sjeni (shadow prices) koje ovdje tumačimo kao "proizvodnju u sjeni", ili "troškove u sjeni", budući da se u našem problemu minimiziranje troškova svodi na minimiziranje proizvodnje. Vrijednosti slack varijabli i cijena u sjeni promatranih razdoblja navedene su u Tablici 2.

Tablica 2. Slack vrijednosti i cijene u sjeni za model *a*

	Slacks	Shadow prices
ROW 1	−131.00000	0.00000
ROW 2	−114.00000	0.00000
ROW 3	−75.00000	0.00000
ROW 4	−40.00000	0.00000
ROW 5	−7.00000	0.00000
ROW 6	0.00000	0.16667
ROW 7	−9.00000	0.00000
ROW 8	−20.00000	0.00000
ROW 9	−39.00000	0.00000
ROW 10	−56.00000	0.00000
ROV 11	−65.00000	0.00000
ROW 12	−72.00000	0.00000

Vidljivo je da marginalna cijena (u našem slučaju trošak proizvodnje, odnosno broj radnih sati) šestog razdoblja iznosi 0.16667, što znači da će se funkcija cilja (proizvodnja) smanjiti za taj iznos ako se ograničenje 6 smanji za jednu jedinicu (sa 174 na 173).

Drugim riječima ako bi željena proizvodnja a_6 u šestom razdoblju bila smanjena, tj. ako bi se potražnja u šestom razdoblju d_6 smanjila za jednu jedinicu, funkcija cilja i optimalno rješenje, budući da je funkcija cilja z = x, bili bi umanjeni za 0.16667.

Analiza desnih strana nejednakosti u ograničenjima pokazuje da se ograničenja u svim razdobljima mogu kretati u intervalima od minus beskonačno do vrijednosti u stupcu "Maximum Value" Tablice 3. osim za ograničenje šestog razdoblja, gdje željena proizvodnja mora biti manja od 166.28 da to ograničenje ne bi utjecalo na funkciju cilja. U tom slučaju na funkciju cilja utjecalo bi neko od ostalih ograničenja.

Analiza osjetljivosti pokazuje da se koeficijent uz varijablu x može kretati u svim pozitivnim vrijednostima bez utjecaja na optimalno rješenje, što je logično budući da je funkcija cilja z(x) = x, što bi značilo da bez obzira koliki su troškovi, optimalna proizvodnja u svakom razdoblju ostaje 29 jedinica proizvoda.

Tablica 3. Analiza desnih strana ograničenja za model *a*

RHS ranging			
Constraint	Current Value	Minimum Value	Maximum Value
ROW1	−102.00000	−Infinity	29.00000
ROW2	−56.00000	−Infinity	58.00000
ROW3	12.00000	−Infinity	87.00000
ROW4	76.00000	−Infinity	116.00000
ROW5	138.00000	−Infinity	145.00000
ROW6	174.00000	166.28571	Infinity
ROW7	194.00000	−Infinity	203.00000
ROW8	212.00000	−Infinity	232.00000
ROW9	222.00000	−Infinity	261.00000
ROW10	234.00000	−Infinity	290.00000
ROW11	254.00000	−Infinity	319.00000
ROW12	276.00000	−Infinity	348.00000

b) Optimizacija proizvodnje kada su dovoljni stalni uposlenici i redovito radno vrijeme, uz uvjet da na kraju posljednjeg razdoblja nema viška proizvoda

Razmotrimo sada jedan drugi problem. Ukoliko je $T \cdot x^* > a_T$ (kao u primjeru, $T \cdot x^* = 348$, $a_T = 276$), značilo bi da je u cijelom vremenskom intervalu u kojem se planira proizvodnja bilo proizvedeno više nego što je potrebno. To često nije poželjno, pogotovo zato što a_T sadržava potrebnu zalihu za iduće razdoblje proizvodnje. Ako se postavi zahtjev $T \cdot x^* - a_T = 0$, tada neki radnici ne bi trebali neko vrijeme sudjelovati u proizvodnji, tj. prihvaća se vrijeme bez posla.

Problem koji treba riješiti glasi: Odrediti količinu proizvoda x koja se proizvede onda kada svi radnici rade puno radno vrijeme (a to se svodi na određivanje broja potrebnih radnika) te proizvodnju u svakom pojedinom razdoblju x_t, $t = 1, \ldots, T$ uz uvjet da je vrijeme bez posla minimalno i da na kraju posljednjeg razdoblja T nema viška proizvoda (zaliha za iduće razdoblje ne smatra se viškom). Ne mora biti ispunjeno $x_t = x$ već $x_t \leq x$ (što znači da može postojati vrijeme bez posla).

Izraz $\sum_{k=1}^{t} x_k \geq a_t$ govori da je željena proizvodnja a_t minimalna proizvodnja u prvih t razdoblja. Za a_t i dalje vrijedi izraz (7).

Zahtjev da nema viška proizvoda na kraju razdoblja T može se zapisati jednadžbom

$$\sum_{k=1}^{T} x_k = a_T. \tag{15}$$

Radno vrijeme bez posla koje treba minimizirati je

$$\alpha \cdot T \cdot x - \alpha \cdot \sum_{k=1}^{T} x_k = \alpha \cdot T \cdot x - \alpha \cdot a_T. \tag{16}$$

To je funkcija cilja z(x). Prema navedenom treba riješiti sljedeći linearni problem.

$$\min(\alpha T x - \alpha a_T), \quad x \in R$$

$$\begin{aligned} & x_1 + \ldots + x_t \geq a_t && t = 1, \ldots, T \\ & x_1 + \ldots + x_T \geq a_T && \\ & 0 \leq x_t \leq x && t = 1, \ldots, T \end{aligned} \tag{17}$$

Za ulazne podatke iz Tablice 1. linearnim programiranjem dolazi se do rješenja:

$$x^* = x_1^* = \ldots = x_9^* = 29,$$

$$x_{10}^* = 15, \qquad x_{11}^* = 0, \qquad x_{12}^* = 0$$

$$z(x^*) = \alpha T x^* - \alpha a_T = 576$$

Broj potrebnih radnika izračuna se prema (14).

Postoptimalna analiza

Za dobivanje optimalnog rješenja potpuno je iskorišteno ograničenje za razdoblje 6 i 12. Cijena u sjeni (granični trošak) za šesto razdoblje je 16, što znači da bi se vrijeme bez posla umanjilo za 16 jedinica ako se željena proizvodnja u šestom razdoblju a_6 smanji za jednu jedinicu (sa 174 na 173). U dvanaestom razdoblju slack varijabla iznosi 0, budući da je u tom razdoblju proizvodnja izjednačena sa željenom proizvodnjom. Kod analize desnih strana nejednadžbi (jednadžbi) ograničenja, situacija je drugačija nego kod prethodnog slučaja. Vrijednosti desnih strana prvih 12 ograničenja su:

Tablica 4. Analiza desnih strana ograničenja za model *b*

RHS ranging			
ROW1	−102.00000	−Infinity	29.00000
ROW2	−56.00000	−Infinity	58.00000
ROW3	12.00000	−Infinity	87.00000
ROW4	74.00000	−Infinity	116.00000
ROW5	138.00000	−Infinity	145.00000
ROW6	174.00000	166.28571	184.00000
ROW7	194.00000	−Infinity	203.00000
ROW8	212.00000	−Infinity	232.00000
ROW9	222.00000	−Infinity	261.00000
ROW10	234.00000	−Infinity	276.00000
ROW11	254.00000	−Infinity	276.00000
ROW12	276.00000	261.00000	290.00000

Dakle, za ograničenje u razdoblju 6 i u razdoblju 12 (gdje je i dostignuta donja granica), postoje intervali unutar kojih ta razdoblja ne utječu na optimalno rješenje. Željena proizvodnja šestog razdoblja može biti manja od 166.28 i veća od 184 da to ograničenje ne utječe na optimalno rješenje i u tom slučaju je optimalno rješenje određeno s nekim od preostalih ograničenja. Takve kritične vrijednosti za razdoblje 12 su 261 i 290. Kod ostalih varijabli postoji samo gornja granica vrijednosti proizvodnje (posljednji stupac u Tablici 4.) do koje se desnostrane vrijednosti ograničenja mogu mijenjati a da to ograničenje ne utječe na optimalno rješenje.

Analiza osjetljivosti i u ovom slučaju pokazuje da koeficijenti uz x mogu biti bilo koje pozitivne vrijednosti, dok su kod ostalih varijabli, iako su one prisutne samo u ograničenjima, navedeni intervali mogućih vrijednosti koje ne bi utjecale na optimalno rješenje. Npr. koeficijenti uz x_1 do x_6 mogu poprimiti vrijednosti od –96 do 19.2, dok koeficijenti uz x_7 do x_9 mogu poprimiti vrijednosti od –96 do 0, uz x_{10} može stajati samo 0, dok koeficijenti uz x_{11} i x_{12} mogu poprimiti bilo koje pozitivne vrijednosti, bez utjecaja na promjenu optimalnog rješenja. Analiza osjetljivosti za koeficijente uz varijable x_1 do x_{12} bila bi korisna u slučaju da se zanemari pretpostavka da je broj radnih sati α potreban za proizvodnju jedinice proizvoda jednak u svakom razdoblju. Radno vrijeme bez posla koje treba minimizirati u tom slučaju bilo bi:

$$x\sum_{k=1}^{T}\alpha_k - \sum_{k=1}^{T}\alpha_k x_k. \qquad (18)$$

c) Problem proizvodnje kada je potrebno redovito i prekovremeno radno vrijeme stalnih uposlenika, uz uvjet da na kraju posljednjeg razdoblja nema viška proizvoda

Pogledajmo naposljetku slučaj kada se potreban broj radnih sati realizira kroz redovito i prekovremeno radno vrijeme svih stalnih zaposlenika. Cilj će biti minimizirati troškove rada i prema tom kriteriju odrediti optimalnu proizvodnju x^*, x_t^*, $t = 1, \ldots, T$

x	količina proizvoda koja se proizvede u svakom razdoblju kada svi radnici rade puno radno vrijeme
x_t	količina proizvoda koja se proizvede u razdoblju t
$x_t \geq x$	zahtjev da tijekom redovitog radnog vremena nema vremena bez posla
$x_t - x$	količina proizvoda koja se proizvede tijekom prekovremenog radnog vremena
c	cijena jednog radnog sata po jednom zaposlenom za redovito radno vrijeme
$2c$	cijena jednog radnog sata po jednom zaposlenom za prekovremeno radno vrijeme
$c\alpha x$	troškovi plaća za redovito radno vrijeme u jednom razdoblju
$c\alpha xT$	troškovi plaća za redovito radno vrijeme za svih T razdoblja
$2c\alpha(x_t - x)$	troškovi plaća za prekovremeno radno vrijeme u razdoblju t
$\sum_{t=1}^{T} 2c\alpha(x_t - x)$	troškovi plaća za prekovremeno radno vrijeme za svih T razdoblja

Ukupni troškovi rada za svih T razdoblja $c\alpha xT + \sum_{t=1}^{T} 2c\alpha(x_t - x)$ mogu se zapisati u drugom obliku koristeći uvjet $x_1 + \ldots + x_T = a_T$ koji govori da na kraju razdoblja T ne smije biti viška proizvoda.

$$z = c\alpha xT + \sum_{t=1}^{T} 2c\alpha(x_t - x) = c\alpha xT + 2c\alpha \left[\sum_{t=1}^{T} x_t - x\sum_{t=1}^{T} 1\right] = c\alpha xT + 2c\alpha a_T - 2c\alpha xT =$$
$$= 2c\alpha a_T - 2c\alpha xT.$$

Problem se može formalizirati kako slijedi:

$$\begin{aligned} &\min_{x\in R}(2c\alpha a_T - c\alpha xT) \\ &x_1 + \ldots + x_t \geq a_t \qquad t = 1, \ldots, T \\ &x_1 + \ldots + x_T = a_T \\ &0 \leq x \leq x_t \qquad t = 1, \ldots, T. \end{aligned} \qquad (19)$$

Linearnim programiranjem za ulazne podatke iz Tablice 1. uz $c = 10$, $\alpha = 8$ dobije se optimalno rješenje:

$x^* = 16$, $x_1^* = 100$,

$x_2^* = \ldots = x_{12}^* = 16$, $z = 28800$.

Prema optimalnom rješenju ukupni prekovremeni posao potrebno je odraditi u prvom razdoblju. Ako to nije moguće realizirati s prekovremenim radom stalnih zaposlenika (jer dan ima 24 sata), kao opcija preostaje zapošljavanje honorarnih radnika u prvom mjesecu (uz cijenu radnog sata 2c).

Postoptimalna analiza

Dopunske (slack) varijable potrebne su za sva razdoblja osim za razdoblje 8 i 12, gdje je proizvodnja na željenoj razini. Troškovi proizvodnje bili bi smanjeni za 240 jedinica ukoliko bi proizvodnja u osmom razdoblju bila smanjena za jednu jedinicu. U ostalim razdobljima ograničenje nije dostignuto, a vrijednosti suviška su prikazane u drugom stupcu Tablice 5.

Tablica 5. Slack varijable i cijene u sjeni za model *c*

	Slacks	Shadow prices
ROW1	-202.00000	0.00000
ROW2	-172.00000	0.00000
ROW3	-120.00000	0.00000
ROW4	-74.00000	0.00000
ROW5	-26.00000	0.00000
ROW6	-6.00000	0.00000
ROW7	-2.00000	0.00000
ROW8	0.00000	240.00000
ROW9	-6.00000	0.00000
ROW10	-10.00000	0.00000
ROV11	-6.00000	0.00000
ROW12	0.00000	240.00000

Rezultati pokazuju da je desnostranim vrijednostima u ograničenjima 1 do 7, te 9 do 11 dopušteno kretanje do gornjih granica 100, 116, 132, itd. da bi optimalno rješenje ostalo nepromijenjeno. Ako desna strana ograničenja u nejednadžbi 8 ima vrijednost između 210.4 i 276, optimalno rješenje će biti određeno upravo tim ograničenjem. Isto vrijedi i za ograničenje 12 koje može biti minimalno 268 a maksimalno 284 (vidi Tablicu 6.).

Tablica 6. Analiza desnih strana ograničenja za model *c*

RHS ranging			
Constraint	Current Value	Minimum Value	Maximum Value
ROW1	-102.00000	-Infinity	100.00000
ROW2	-56.00000	-Infinity	116.00000
ROW3	12.00000	-Infinity	132.00000
ROW4	74.00000	-Infinity	148.00000
ROW5	138.00000	-Infinity	164.00000
ROW6	174.00000	-Infinity	180.00000
ROW7	194.00000	-Infinity	196.00000
ROW8	212.00000	210.40000	276.00000
ROW9	222.00000	-Infinity	228.00000
ROW10	234.00000	-Infinity	244.00000
ROW11	254.00000	-Infinity	260.00000
ROW12	276.00000	268.00000	284.00000

Analiza osjetljivosti na ovom modelu daje gotovo jednake intervale za većinu koeficijenata uz varijable funkcije cilja. Varijable $x_2, \ldots, x_8$ mogu imati koeficijente (troškove rada) od minimalno 0 do maksimalno 960, koeficijenti uz varijable $x_9, \ldots, x_{12}$ mogu se kretati od –320 do 969, dok uz varijablu x_1 koeficijenti (troškovi) mogu biti samo između –87.27 i 0. Varijabla x ima dopuštene bilo koje negativne koeficijente (troškove), a da to ne utječe na optimalno rješenje. Utjecaj koeficijenata $x_1, \ldots, x_{12}$ imao bi značaja u slučaju da te varijable uđu u funkciju cilja, odnosno kada bismo, kao u modelu *b*, zanemarili pretpostavku da broj radnih sati potreban za proizvodnju jednog proizvoda bude isti u svakom razdoblju, ali i u slučaju da cijena radnog sata po zaposlenom (c) nije ista u svakom razdoblju. Tablica 7. prikazuje ispis rezultata analize osjetljivosti funkcije cilja na koeficijente uz varijable $x_1, \ldots, x_{12}$.

Tablica 7. Analiza osjetljivosti za model *c*

Cost coefficient ranging			
Coef.	Current Value	Minimum Value	Maximum Value
x1	0.00000	-87.27273	-0.00000
x2	0.00000	-0.00000	960.00000
x3	0.00000	-0.00000	960.00000
x4	0.00000	-0.00000	960.00000
x5	0.00000	-0.00000	960.00000
x6	0.00000	-0.00000	960.00000
x7	0.00000	-0.00000	960.00000
x8	0.00000	-0.00000	960.00000
x9	0.00000	-320.00000	960.00000
x10	0.00000	-320.00000	960.00000
x11	0.00000	-320.00000	960.00000
x12	0.00000	-320.00000	960.00000
x	960.00000	-Infinity	-0.00000

Iako navedene analize u znatnoj mjeri olakšavaju planiranje proizvodnje uz minimalan utrošak radnog vremena, linearno programiranje još uvijek prikazuje optimalno rješenje bez uzimanja u obzir još nekih značajnih varijabli, kao npr. razni zastoji u proizvodnji zbog kvarova, godišnji remonti, pauze, itd., koje bi umnogome učinile modele složenijima.

4. DRUGE METODE OPTIMIZACIJE LINEARNIM PROGRAMIRANJEM

Simplex metoda pogodna je za manje probleme linearnog programiranja, dok je kod većih problema (npr. oko 40000 i više varijabli) njezino izvršavanje predugačko i neefikasno. Broj iteracija koje u najgorem slučaju treba izvršiti da se dođe do rješenja problema simpleks metodom iznosi

$$\frac{m!}{n!(m-n)!}, \tag{20}$$

gdje je n broj varijabli, a m broj ograničenja u modelu. Iako je pri velikom n i m između najgoreg i prosječnog slučaja velika razlika, ne može se isključiti mogućnost pojave najgoreg slučaja. Stoga je razvoj alternativnih metoda od ključnog značaja za primjenu linearnog programiranja kod većih problema. Neke od njih opisane su u nastavku.

Elipsoidni algoritam (Khachiyan, 1979, u [10]) prvi je od algoritama za linearno programiranje potpuno različit od simplex metode. Iako direktno ne rješava problem linearnog programiranja, uvodi princip rješavanja pomoću finih transformacija i elipsoida koji se upotrebljava kod kasnijih algoritama kao njihova osnova i dovodi do rješenja u polinominalnom vremenu.

Karmakarov algoritam (Karmakar, 1984, u [5]) za rješavanje problema linearnog programiranja složeniji je od simplex metode, no omogućuje upotrebu velikog broja varijabli. Temelji se na elipsoidnom algoritmu, pomoćnim funkcijama i "interior-point" pretraživanju, upotrebljavajući multidimenzionalni prostor. Za razliku od simplex metode koja ispituje svaku točku na vanjskoj granici površine dopuštenog rješenja tražeći optimalno rješenje, Karmakarov algoritam "putuje" iznutra. Umjesto da počinje od početnog rješenja gdje su sve varijable jednake nuli, ovaj algoritam počinje u nekoj točki A unutar područja dopuštenog rješenja. Daljnji postupak pronalaženja optimalnog rješenja mogao bi se opisati na sljedeći način:

- konstruirati oval oko točke A koji također leži unutar dopuštenog područja,
- pronaći maksimum (odnosno minimum) unutar konstruiranog ovala (točka B),
- točka B sada postaje polazna točka za konstruiranje novog ovala oko te točke,
- pronaći maksimum (odnosno minimum) unutar konstruiranog ovala (točka C),

itd. sve dok se ne postigne optimalno rješenje. Kao najučinkovitiji pristup pokazalo se konstruiranje kruga oko svake točke, gdje je svaka iduća točka centar kruga. Pri pronalaženju optimuma točka se pomiče od centra kruga u smjeru profita, sve dok se ne dostigne izo-profitna linija (linija funkcije cilja). Dokazano je da je Karmakarov algoritam pogodan za velike i srednje velike probleme, dok je simplex metoda efikasnija kod malih problema, s malim brojem varijabli.

Istraživanja pokazuju brojne napretke u pojednostavljivanju metoda linearnog programiranja na način da se razvijaju sustavi koji automatiziraju upisivanje jednakosti ili nejednakosti kod ograničenja, kao npr. **General Algrebraic Modeling System** (GAMS) (Kedrick, Meeraus, 1985, u [5]), što umnogome štedi vrijeme potrebno za optimizaciju. U nedostatku odgovarajućih programskih alata koji podržavaju ostale metode, one nisu primjenjene na promatranom problemu optimizacije proizvodnje uz minimiziranje radnog vremena. Jedan je od razloga i što ispitivani problemi nisu u tolikoj mjeri opsežni, pa je i sama simplex metoda dovoljno brza i efikasna u njihovu rješavanju (prosječno vrijeme dolaženja do optimalnog rješenja je 0.05 sekundi). Ispitivanje i usporedba njihove efikasnosti u odnosu na simplex metodu ostaje kao smjernica za daljnja istraživanja, uz nadopunu s dodatnim varijablama koje utječu na promatrani problem.

5. ZAKLJUČAK

U radu je pokazano da simplex metoda ima mogućnosti ponuditi rješenja i za detaljnije razvijene probleme troškova proizvodnje, kao što su slučajevi s jednakom proizvodnjom tokom razdoblja, s različitom proizvodnjom uz redovito radno vrijeme, te uz prekovremeno radno vrijeme, uzimajući u obzir očekivanu potražnju, pretpostavljeno početno stanje proizvoda na skladištu, stupanj očekivanja nestašice i druge parametre. Analiza osjetljivosti, cijena (troškova, odnosno radnog vremena) u sjeni, te desnih strana ograničenja pokazuje da linearno programiranje može biti podloga za poslovno odlučivanje u ovom području. Daljnja istraživanja moguće je usmjeriti na uključivanje više značajnih varijabli u model, te stoga upotrebu Karmakarovog ili drugih algoritama koji omogućuju efikasno rukovanje s većim brojem varijabli. Provedene analize u radu mogu koristiti kako istraživačima u području primjene kvantitativnih metoda u poslovnom planiranju, tako i upravljačkoj strukturi proizvodnih subjekata.

LITERATURA

[1] Arrow, K. J., Hurwicz, L. Uzawc, Studies in Linear and Nonlinear Programming, Stanford University Press, Stanford, California, 1958.

[2] Barković, D., Operacijska istraživanja, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Ekonomski fakultet Osijek, 1997.

[3] Charnes, A., Cooper, W. W., Henderson, A., An Introduction to Linear Programming, Wiley, New York, 1953.

[4] Charnes, A., Cooper, W. W., Menagement Models and Industrial Applications of Linear Programming, Wiley, New York, 1961.

[5] Chase, R. B., Aquilano, N. J., Production and Operations Management, A Life Cycle Approach, Irwin, 1989.

[6] Dantzig, G., Linear Programming and Extension, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1963.

[7] Fiacco, A. V., McCarmick, G. P., Nonlinear Programming, George Washington University, Philadelphia, 1990.

[8] Gass, S. I., Linear Programming: Methods of Applications, Mc Grow-Hill, New York 1958.

[9] Greenbaum, A., Iterative Methods for Solving Linear Systems, Philadelphia, 1997.

[10] Karloff, H., Linear Programming, Geschenk vom Verlag, Birkhaeuser, 1991.

[11] Kelley, C. T., Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations, Philadelphia, 1997.

[12] Lotfi, V., Pegels, C. C., Decision Support Systems for Production and Operations Management, Irwin, 1986.

[13] Mangasarian, O. L., Nonlinear Programming, Philadelphia, 1994.

[14] Riley, V., Gass S. I., Linear Programming and Asociated Techniques, John Hopkins Press, Baltimore, 1958.

[15] Sierksma, G., Linear and Integer Programming, Marcel Dekker, New York, 1996.

[16] Zekić, M., Optimalizacija proizvodnje primjenom električnog računala, diplomski rad, Sveučilište u Osijeku, Ekonomski fakultet Osijek, 1990.

[17] Wright, S. J., Primal - Dual Interior - Point Methods, Philadelphia, 1997.

Mladen Antunović,
Javor Altman,
Mirjana Zekić

LINEAR PROGRAMMING PRODUCTION OPTIMISATION REGARDING WORKING TIME

Summary

Optimisation of working time using linear programming is one of the important ways to improve efficiency of production. The paper deals with mathematical analysis of minimisation of working hours, idle working time, and costs in three special cases: (1) when the production is equal in all periods, (2) when the productions is not necessarily equal in all periods, but is performed in regular working time, and (3) when the production is performed in overtime, too. The problems are solved with simplex method and postoptimal analysis is conducted. Analyses of right hand sides of constraints show that there are large intervals of allowed values that do not change the optimal solution. Sensitivity analysis shows that cost coefficients of the variable x in the objective function can have any positive or respectively negative values, depending on the sign of the x variable in the objective function. The paper also suggests some other methods of linear programming for optimisation problems such as Ellipsoid algorithm, Karmakar's algorithm, and General Algrebraic Modelling System (GAMS).