UDK 330.6
Prethodno priopćenje

Dr. Dražen Barković
Ekonomski fakultet, Osijek

NEKOLIKO ASPEKATA U FUZZY ODLUČIVANJU

1. UVOD

Bellmanov i Zadehov članak "Decision making in a fuzzy environment", Management science (1970) potakao je značajna istraživanja na polju teorije odlučivanja i njezine primjene.

Postoje brojni problemi odlučivanja u kojima ciljevi i ograničenja nisu dobro definirani zbog njihove kompleksnosti.

U mnogim stvarnim situacijama donositelj odluke nije u mogućnosti točno specificirati funkciju cilja i ograničenja onako kako se to podrazumijeva u klasičnoj teoriji odlučivanja. Ni često deterministički niti stohastički pristup ne izražava točno jezične termine poput: "mnogo veći", "približno", itd. U takvim slučajevima mogla bi pomoći tzv. fuzzy teorija koja se karakterizira kako slijedi:

Dan je

- skup varijabli odlučivanja (alternativa)
- skup ograničenja
- skup ciljeva

pa treba pronaći optimalno rješenje za tu situaciju.

Notacija fuzzy može se uvesti u sve te osnovne elemente. Radi pojednostavljenja ograničitćemo se na "fuzziness" ciljeva i ograničenja. Podrazumijevat ćemo da su varijable odlučivanja determinističke. To znači da samo ciljevi i ograničenja stvaraju klasu čije granice nisu oštro definirane pa se izražavaju fuzzy skupovima. Idejom Bellmana i Zadeha po kojoj se ciljevima i funkcijama pripisuju određene funkcije vjerojatnosti koriste se u matematičkom programiranju mnogobrojni (*Rödder, W., Zimmermann, H.J.* 1975. str. 1-18, *Sommer, G.* 1976, str. 1-24, *Czogala, E., Zimmermann, H.J.* 1986., str. 202-212) autori. Ovdje ćemo pokušati prikazati jedan koncept fuzzy optimiranja koji odstupa od neuobičajenoga klasičnog optimiranja. Ograničit ćemo se na model linearnog programiranja. U principu je moguće proširenje na nelinearne programe.

2. FUZZY LINEARNO PROGRAMIRANJE

Linearno programiranje predstavlja čest oblik problema odlučivanja. Budući da se do njegova rješenja obično dolazi s pomoću matematičkih metoda kao što je to simpleks metoda, blizu smo pomisli da se taj problem može riješiti samo ako je jasno formuliran. Ovdje će se pokazati da to nije pravilo i da se kod linearnog programiranja također zadržava svojstvo fuzzy (nejasnog) formuliranja problema. Klasična fuzzy formulacija linearnog programiranja polazi od uobičajene formulacije linearnog programiranja:

Funkcija cilja: Max $z = c^T x$
Ograničenja: $A\,x \leq b$
$x \geq 0$,

gdje su: c = vektor koeficijenata funkcije cilja
A= matrica koeficijenata
x = vektor varijabli
b = vektor ograničenja.

Ograničenja $a_i^T x \leq b_i$ govori da se vrijednost b_i ne smije prekoračiti niti jednim odabirom vrijednosti za vektor x. Fuzzy logika dopušta, nasuprot tome, **prekoračenje restrikcije** za maksimalno d_{bi} uz sljedeći stav: "ako je moguće" ne prekoračiti b_i, ali ni u kojem slučaju $b_i + d_{bi}$. **Linearna** funkcija pripadnosti granice restrikcije glasi (*Buscher, U., Roland, F.* 1993, str. 313):

$$f_i(a_i^T x) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad a_i^T x \geq b_i + d_{bi} \\ 1 - \frac{a_i^T - b_i}{d_{bi}} & \text{za} \quad b_i < a_i^T x < b_i + d_{bi} \\ 1 & \text{za} \quad a_i^T \leq b_i . \end{cases}$$

Uz navođenje funkcije pripadnosti povezan je cilj da se prekoračenje kapaciteta d_{bi} drži što manjim, tako da od prvih restrikcija postaju **fuzzy funkcije cilja**. Sustav višeciljnog optimiranja koji je nastao na takav način teži da se za svaku novu fuzzy funkciju postigne po mogućnosti što veće **zadovoljstvo**. Problem koji je nastao na taj način sastoji se u međusobnom uspoređivanju različitih ciljeva. Na jednoj se strani pokušava maksimizirati vrijednost prvotne jasno formulirane funkcije cilja z, dok se na drugoj strani želi postići što je moguće veće zadovoljstvo donositelja odluke u pogledu restrikcija.

Za rješenje tog **konflikta** nudi se mogućnost da se zadovoljstvo donositelja odluke u pogledu različitih vrijednosti funkcije cilja z_j odrazi isto tako s pomoću jedne funkcije pripadnosti. Određivanje tijeka funkcije vrednovanja vrši se na temelju dva stava. Prvo, potrebno je navesti vrijednost funkcije cilja z_{min} ispod koje se ni u kojem slučaju ne smije ići, drugo, treba navesti vrijednost z_{max} koju se ne smije prekoračiti i s kojom bi donositelj odluke morao biti u potpunosti zadovoljan. Do **minimalne vrijednosti** funkcije cilja dolazi se kada u procesu optimiranja ne dolazi niti u jednoj restrikciji do prekoračenja dopuštenog kapaciteta (d_{bi}=0). Na odgovarajući način pronalazi se i maksimalna vrijednost funkcije cilja, kada su u optimiranju moguća prekoračenja potpuno iskorištena.

Funkcija pripadnosti funkcije cilja ima ovaj oblik:

$$f_z(c^T x) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad c^T x \leq z_{\min} \\ \frac{c^T x - z_{\min}}{z_{\max} - z_{\min}} & \text{za} \quad z_{\min} < c^T x < z_{\max} \\ 1 & \text{za} \quad c^T x \geq z_{\max} . \end{cases}$$

Funkcije pripadnosti koje su izvedene iz restrikcija i funkcije cilja su u međusobnom odnosu. Vrijednosti pripadnosti odražavaju stupanj zadovoljstva donositelja odluke. Malo (veliko) prekoračenje prvotnih granica restrikcije b_i i visoko (nisko) vrijednosti funkcije cilja predstavljaju suprotne ciljeve koji se moraju agregirati u jednu novu funkciju. Uzimajući u obzir minimalni operator, taj problem višestrukih ciljeva rješava se **maksimiziranjem ukupnog zadovoljstva σ.**

$$\sigma(x) = \min(f_z(c^T x), f_1(a_1^T x), \ldots, f_m(a_m^T x)) \Rightarrow \max$$

Prema postupku minimalnog operatora σ je najgora vrijednost pripadnosti koja se može pridružiti jednom cilju. **Maksimiziranjem minimalnog zadovoljstva** postiže se da nema rješenja x, koje bi simultano dovelo na višu razinu najmanje zadovoljstvo suprotnih ciljeva.

Taj se stav može izraziti u ovom obliku **optimiranja**:

$$\begin{aligned} &Max\ \sigma \\ &\sigma \leq f_z(c^T x) \\ &\sigma \leq f_i(a_i^T x) \quad \text{za} \quad i = 1, .., m \\ &x \geq 0. \end{aligned}$$

Funkcije pripadnosti koje smo ranije naveli uvrste se u taj novi sustav optimiranja i preoblikuju tako da sve varijable odlučivanja dođu na lijevu stranu.

$$\begin{aligned} &Max\ \sigma \\ &(z_{max} - z_{min})\sigma - c^T x \leq - z_{min} \\ &d_{bi}\sigma + a_i^T x \leq b_i + d_{bi}. \end{aligned}$$

Jednim primjerom opisat ćemo postupak.[1]

Jedno poduzeće proizvodi dva proizvoda 1 i 2 na danim kapacitetima. Proizvod 1 i proizvod 2 ostvaruje

[1] Rödder, W., Zimmermann, H. J.: Analyse, Beschreibung Optimierung von unscharf formulierten Problemen, Zeitschrift Für Operations Research, svezak 21, 1977, str. 14-17.

profit od 0.1 NJ po komadu, odnosno 0,2 NJ/kom respektivno. Proizvod 1 se izvozi te tako ostvaruje prihod u devizama od 10 NJ dok proizvod 2 zahtijeva uvoz sirovine u vrijednosti od 5 NJ po komadu. Važna su dva cilja:

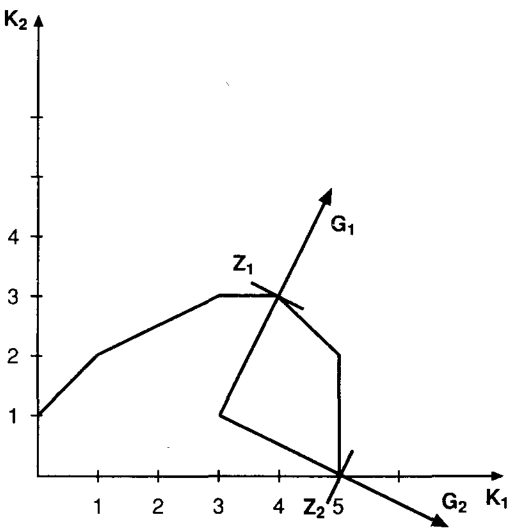
a) Maksimiziranje profita

b) Maksimiziranje pozitivnog utjecaja na platnu bilansu (znači maksimiziranje razlike između izvoza i uvoza).

Problem se može formulirati ovako:

$$\begin{aligned} \max z_1(x) &= 0.1\,x_1 + 0.2\,x_2 \\ \max z_2(x) &= 10\,x_1 - 5\,x_2 \\ -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1 + x_2 &\le 7 \\ x_1 &\le 5 \\ x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Grafički prikaz dopuštenih rješenja dan je na slici 1.



Slika 1

Oba pojedinačna maksimuma za funkcije cilja z_1 i z_2 iznose 1 odnosno 50, i to za rješenja (4, 3), odnosno (5, 0). Rješenje (3, 1) daje za prvu funkciju cilja vrijednost $z_1 = 0{,}5$, a za drugu $z_2 = 25$. To su najniže vrijednosti za obje funkcije cilja, odnosno u svakoj drugoj točki poprima bilo jedna bilo druga vrijednost funkcije cilja veću vrijednost.

Stupanj pripadnosti odnosno zadovoljstva u odnosu na obje funkcije cilja označit ćemo s 0 za najnižu vrijednost (dakle 0,5 odnosno 25), a s 1 za pojedinačne maksimume (dakle 1 i 50).

Osim toga dodat ćemo u čitav sustav još fuzzy ograničenje

$$-x_1 + 2x_2 \lesssim 1$$

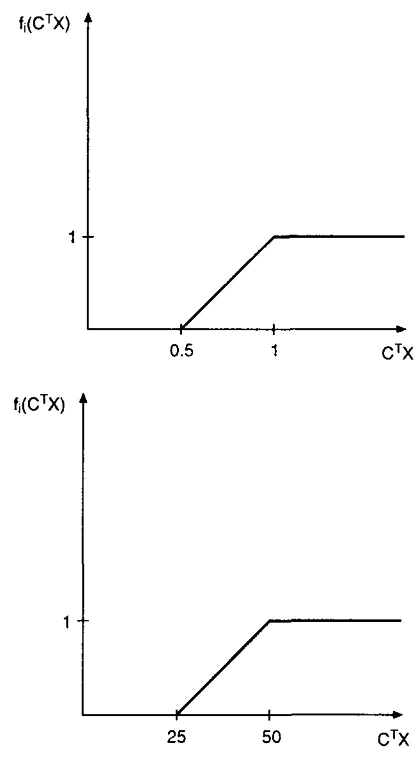
s $db_i = 1$ kao najvećom mogućom "povredom" ograničenja koja se još može prihvatiti.

Formulirajmo i riješimo sada sljedeći problem:

$$\begin{aligned} &\max \sigma \\ &0.5\sigma - 0.1x_1 - 0.2x_2 \le -0.5 \\ &25\sigma - 10x_1 + 5x_2 \le -25 \\ &\sigma - x_1 + 2x_2 \le 3 \\ &-x_1 + x_2 \le 1 \\ &x_1 + x_2 \le 7 \\ &x_1 \le 5 \\ &x_2 \le 3 \\ &x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Rješenje je $x_1 = 5$, $x_2 = 1.66$, $\sigma = 0.666$.

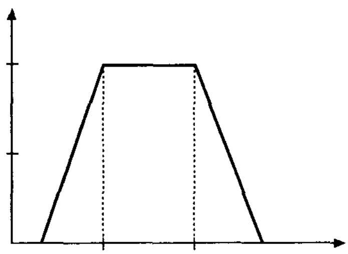
Ilustracije radi, prikažimo grafički funkcije pripadnosti funkcija cilja (slika 2).



Slika 2.

2.1. FUZZY KOEFICIJENTI OGRANIČENJA I KOEFICIJENTI FUNKCIJE CILJA

Ako su vektor ograničenja kao i elementi matrice koeficijenata fuzzy, postoji mogućnost primjene Zadehova principa proširenja. On omogućava direktnu operaciju između više fuzzy veličina, a da ih se prije toga na transformira u jasne veličine. Svaki element matrice koeficijenata i vektora ograničenja može se predstaviti tzv. LR-fuzzy intervalom. Funkcija pripadnosti takvog LR-fuzzy intervala utvrđuje se najprije s dvije točke m_1 i m_2 koje predstavljaju krajnje točke prve razine. Zatim se navodi jedan lijevi λ i jedan desni pomak μ, tako da $(m_1-\lambda)$ i $(m_2+\mu)$ fiksiraju lijevu i desnu granicu intervala na nultoj razini. U skraćenom načinu pisanja fuzzy se interval može označiti izrazom (m_1, m_2, λ, μ). Potpun opis LR-fuzzy intervala može se dati tek uvođenjem funkcija referencije. One pridružuju vrijednosti x određenoj vrijednosti pripadanja. Ilustrirajmo to na slici 3.



Slika 3: Trapezoidni LR-fuzzy interval,

gdje se kao funkcija referencije bira max [0 ; 1-l yl] tako da se pojavljuje trapezoidasti tijek funkcije pripadnosti.

Ako dva po volji odabrana LR-fuzzy intervala $M = (m_1, m_2, \lambda, \mu)$ i $N = (n_1, n_2, \tau, \upsilon)$ imaju istu funkciju referencije, može doći do adicije (koja je značajna za nejasne linearne modele s pomoću formule:

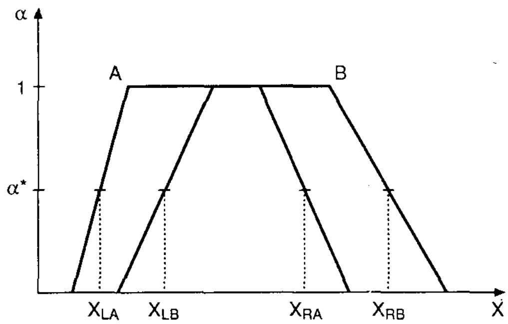
$$(m_1,m_2,\lambda,\mu) + (n_1,n_2,\tau,\upsilon) = (m_1+n_1, m_2+n_2, \lambda+\tau, \mu+\upsilon).$$

Ako m_1 i m_2 padaju u istu točku, javlja se triangularna funkcija pripadnosti kao LR-fuzzy broj. To je poseban slučaj jednog LR-fuzzy intervala.

Pored povezivanja u pogledu fuzzy linearnog optimiranja poželjna je i usporedba fuzzy veličina. Jedna je mogućnost da se u međusobni odnos stave lijeva i desna grana intervala. Ako su zadana dva LR-fuzzy intervala A i B, onda vrijedi $A \leq B$, ako je za svaku α razinu ($\alpha \in [0,1]$),

(a) pripadna vrijednost x na lijevoj grani skupa (za $\alpha^* = x_{LA}$) manja od one za skup (za $\alpha^* = x_{LB}$) i

(b) pripadna vrijednost na desnoj strani skupa (za $\alpha^* = x_{RA}$) manja od one za skup (za $\alpha^* = x_{RB}$) kako se to vidi na slici 4.



Slika 4: LR-fuzzy interval: uspoređivanje

To uspoređivanje skupova za nejasna ograničenja može se iskoristiti u linearnom optimiranju tako da se nejasni koeficijenti "važu" s varijablama i sažmu u nejasni skup.

3. UMJESTO ZAKLJUČKA

Istraživanja na polju primjene matematičkih metoda i modela u opisivanju, analizi i rješavanju realnih ali fuzzy problema obećavaju značajan napredak. Potrebno je upotpuniti zatvoreni aksiomatski sustav, razviti empirijske radove u kojima bi se identificirale funkcije pripadnosti te razviti algoritme koji bi bili u stanju pronaći za fuzzy probleme i modele takva rješenja koja bi se mogla ekonomski interpretirati.

LITERATURA

1. Bellman, R., Zadeh, L. A.: Decision making in a fuzzy environment, Management Science 17, 1970.

2. Czogala, E., Zimmermann, H. J.: Decision making in uncertain environments, European Journal of Operational Research 23, 1986.

3. Sommer, G: Lineare Ersatzprogramme für unscharfe Entscheidungsprobleme zur Optimumbestimmung bei unscharfer Problembeschreibung, Zeitschrift für Operations Research, svezak 22, 1978.

4. Rödder, W., Zimmermann, H. J.: Analysse, Beschreibung und Optimierung von unscharf formulierten Problemen, Zeitschrift für Operations Research, svezak 21, 1977.

Dražen Barković, Ph. D.

SEVERAL ASPECTS IN FUZZY DECISION-MAKING

Summary

Researches in the field of mathematics methods and models application in the description, analysis and solution of real but fuzzy issues - promise a significant progress. It is necessary to complete the closed axiomatic system, develop empirical work in which the functions of belonging would develop, and to develop algorithm which will be able to find out the models of such solution for fuzzy issues which could be interpreted in an economic manner.