-->

math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Vizualni i kratki dokazi - prilog kreativnoj nastavi matematike (3.dio)

Aritmetika Horvatzcka Candidov identitet Fermatova jednakost Fibonaccijevi brojevi vizualni dokazi Vladimir Varičak

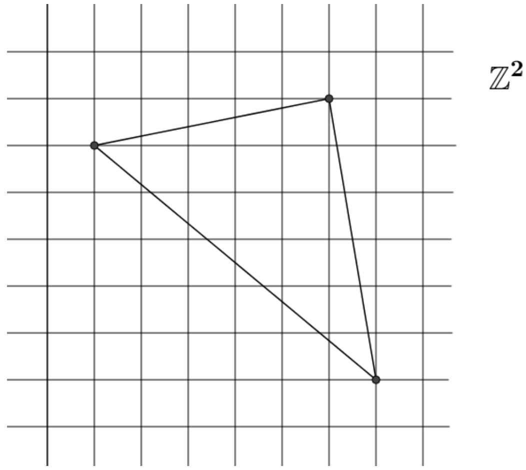
Darko Veljan,
redoviti profesor (u miru) Matematički odsjek PMF-a Sveučilišta u Zagrebu
Ivana Marušić,
Veleučilište u Bjelovaru

Uvod

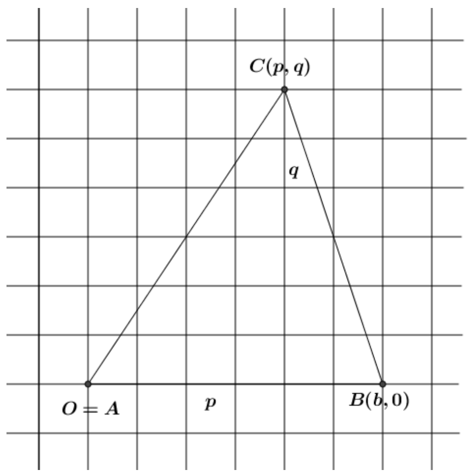
Kao u prethodna dva članka nastavljamo s vizualnim i kratkim dokazima. Ovaj članak, kao i prethodna dva, posvećujemo našim dragim prijateljima, učiteljima i profesorima Borisu Pavkoviću $(1931. - 2006.)$ i akademiku Sibi Mardešiću $(1927. - 2016.)$. Kao njihovi studenti, koautori i kolege znamo da su obojica voljela i cijenila kratke, elegantne i jednostavne dokaze.

1 Jednakostranični trokut na šahovskoj ploči ?

Nema jednakostraničnog trokuta u vrhovima iz šahovske ploče (točnije u vrhovima $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$).



(a)



(b)

Slika 1: Trokut u čvorovima mreže $\mathbb{Z}^2$

Iz slike 1a nije jasno zašto nema jednakostraničnog trokuta u čvorovima mreže $\mathbb{Z}^2$, ali ako pogledamo sliku 1a vidimo da je tangens kuta trokuta kod vrha $O = A$ jednak $\operatorname{tg} A = \frac{q}{p}$, dakle racionalan broj. Nije sasvim jednostavno, ali se može pokazati da vrijedi sljedeći nužan i dovoljan uvjet za postojanje trokuta u cjelobrojnoj mreži. Postoji trokut s vrhovima u $\mathbb{Z}^2$ ako i samo su tangensi svih kutova racionalni brojevi. Kako je tangens jednakostraničnog trokuta iracionalan, ($\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$) slijedi negativan odgovor na upit u naslovu.
Zanimljivo postoji jednakostraničan trokut (s vrhovima) u kubičnoj cjelobrojnoj rešetki $\mathbb{Z}^3$. Recimo, trokut $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ je takav. Zato postoji jednakostraničan trokut u $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{Z}^5 \subset \cdots$. Slično se vidi da ne postoji pravilni tetraedar u $\mathbb{Z}^3$, ali postoji u $\mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{Z}^5 \subset \cdots$. U $\mathbb{Z}^4$ je to npr. $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$. I slično u drugim dimenzijama.
Vratimo se još na sliku 1b i trokut $\triangle ABC$. Kut kod B također ima racionalni tangens, jer je

$$\operatorname{tg} B = \frac{q}{b-p} \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

Zbog $A + B + C = \pi$ slijedi

$$\operatorname{tg} C = \operatorname{tg}(A+B), \tag{2}$$

pa zbog adicijske formule za tangens slijedi da je i

$$\operatorname{tg} C \in \mathbb{Q}. \tag{3}$$

U geometriji rešetaka (zanimljivi su i u fizici) ima još niz otvorenih problema.

2 Fibonaccijevi brojevi i Candidov identitet

Jedna od središnjih tema u kombinatorici jest ponavljanje istih postupaka odnosno rekurzivni pozivi tj. rekurzija. Rekurzija kaže kako se unaprijed zadana shema ponavlja na isti način sve u beskraj. Slikovito rečeno to je apstraktni pogon za vrtnju kotača koji uzrokuje napredovanje uz ponavljanje istog postupka (vrtnje) ili zumiranje (što daje fraktale itd.). Suhoparna i izlizana fraza kaže da je rekurzija formula kojom se član niza izražava pomoću prethodnih članova niza. Jedna od najjednostavnijih i najpoznatijih rekurzija je ona koja definira Fibonaccijeve brojeve. O njima postoje brojne knjige, članci, časopisi, internetske stranice itd., a na hrvatskom knjige [11] i [17].
Ukratko, za one koji još ne znaju, Fibonaccijev niz je definiran s $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ te $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Dakle, niz počinje s $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \cdots$.
Omjerima susjednih članova $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ često možemo protumačiti neke pojave u prirodi a limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\ldots, \tag{4}$$

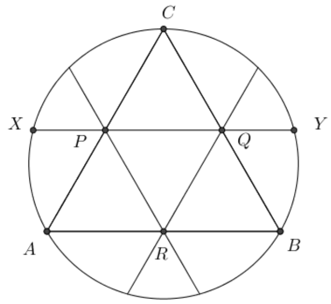
se naziva *zlatni omjer (ili zlatni rez)*. On se dobije iz osnovne rekurzije dijeljenjem s F_n:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \left(\frac{F_n}{F_{n-1}}\right)^{-1}, \tag{5}$$

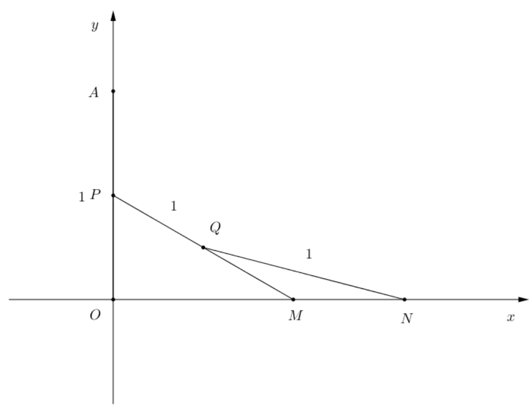
odakle prelaskom na limes slijedi $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ tj. $\varphi^2 = \varphi + 1$. Jedna od formula je

$$F_n = \lceil \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n \rfloor, \tag{6}$$

a kombinatornih značenja je mnoštvo; primjerice nizova 0 i 1 duljine n ali bez susjednih nula ima F_{n+2}. To je važno npr. u računarstvu.
F_{n+1} je broj načina da se n napiše kao uređeni zbroj brojeva 1 i 2. Ne zna se ima li beskonačno prostih Fibonaccijevih brojeva.



Slika 4: Pođemo od jednakostraničnog $\triangle ABC$ i polovišta P, Q, R. Produžimo $\overline{PQ}$ do $\overline{XY}$. Tada je $\frac{|PQ|}{|QY|} = \varphi$; tj. stranica PQ većeg trokuta prema manjem je zlatni omjer.



Slika 5: Najjednostavnija konstrukcija zlatnog reza. Na osi y unesemo točku A, |OA|=1. P je polovište $\overline{OA}$. $|PM| = 1$, M na osi x. Q je polovište $\overline{PM}$. $|QN| = 1$, N na osi x. M dijeli $\overline{ON}$ u zlatnom rezu.

Giacomo Candido ($1871 - 1941$) je dokazao identitet (objavljen tek 1951. godine):

$$\left(F_{n-1}^2 + F_n^2 + F_{n+1}^2\right)^2 = 2\left(F_{n-1}^4 + F_n^4 + F_{n+1}^4\right). \qquad (7)$$

Riječima: kvadrat sume kvadrata tri uzastopna Fibonaccijeva broja je dvostruka suma njihovih četvrtih potencija. Iz osnovne rekurzije

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \qquad (8)$$

slijedi da je trokut čije su duljine stranica ti brojevi degeneriran pa mu je površina 0. Razlika lijeve i desne strane u (1) je prema Heronovoj formuli jednaka nuli. To dokazuje Candidov identitet (1).
Primijetite da iz istih razloga možemo poći od bilo koja dva realna broja a i b i njihovog zbroja $a + b$ i dokazati Candidov identitet (koji vrijedi i u svakom komutativnom prstenu):

$$\left(a^2 + b^2 + (a+b)^2\right)^2 = 2\left(a^4 + b^4 + (a+b)^4\right). \qquad (9)$$

Ako Candidov identitet primijenimo na Pitagorin poučak $a^2 + b^2 = c^2$, dobivamo:

$$\left(a^4+b^4+c^4\right)^2=2\left(a^8+b^8+c^8\right) \tag{10}$$

ili kratko

$$p_4^2=2p_8, \tag{11}$$

gdje je p_n suma n-tih potencija. Riječima: kvadrat sume četvrtih potencija je dvostruka suma osmih potencija. To je nužan i dovoljan uvjet da je trokut pravokutan.
$\underline{Pascalova\, formula}$ za binomne koeficijente:

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}. \tag{12}$$

Iz Candidovog identiteta dobivamo "zabadava" potpuno simetričan Pascal :

$$\left[\binom{n+1}{k}^2+\binom{n}{k}^2+\binom{n}{k-1}^2\right]^2=2\left[\binom{n+1}{k}^4+\binom{n}{k}^4+\binom{n}{k-1}^4\right]. \tag{13}$$

Još jedan primjer iz kombinatorike je $Padovanov\, niz P_n$:

$$1,1,1,2,2,3,4,5,7,9,12,16,21,\ldots \tag{14}$$

u kojemu je svaki član (osim prva tri) zbroj drugog i trećeg prethodnog člana; dakle

$$P_{n+2}=P_n+P_{n-1}. \tag{15}$$

Iz istih razloga kao kod Fibonaccijevih brojeva i Padovanovi brojevi zadovoljavaju identitet Candidovog tipa.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1}}{P_n}=p, \tag{16}$$

gdje je $p^3=p+1$. Broj p naziva se $plastični\, broj$, $p\approx 1.3247\ldots$, P_n je broj načina da se $n+2$ napiše kao uređeni zbroj od brojeva 2 i 3. Varijanta Candidovog identiteta također se dobiva iz Heronove formule

$$(4S)^2=2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)=e_1\left(4e_1e_2-e_1^3-8e_3\right), \tag{17}$$

gdje su $e_1=a+b+c$, $e_2=ab+bc+ca$, $e_3=abc$ elementarne simetrične funkcije od a, b, c. Dakle, ako je trokut degeneriran, recimo $c=a+b$, onda je površina $S=0$, pa je

$$4e_1e_2-e_1^3-8e_3=0, \tag{18}$$

tj. stavimo li $e_1=2s$, u terminima poluopsega s imamo

$$s^3+e_3=se_2. \tag{19}$$

Uočite da za svaki trokut (običan ili degeneriran) vrijedi

$$s^3+e_3\le se_2, \tag{20}$$

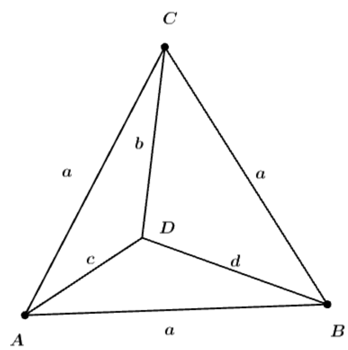
tj.

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3+abc\le\frac{a+b+c}{2}(ab+bc+ca) \tag{21}$$

Dakle,

$$a + b = c \Longrightarrow e_1^3 + 8e_3 = 4e_1e_2. \tag{22}$$

To je *kubni Candidov identitet*.
Metoda "volumen-nula" je izvor za raznovrsne geometrijske identitete i formule.



Slika 6: Jednakostraničan trokut $\triangle ABC$ i u njemu točka D

Primjerice, ako je $\triangle ABC$ na slici 6 jednakostraničan, a D točka $\triangle ABC$ onda dobivamo simetrični identitet nalik Candidovom (uzmimo na slici 8 da je $U = V = W = a$, $u = b$, $v = c$, $w = d$):

$$\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^2 = 3\left(a^4 + b^4 + c^4 + d^4\right). \tag{23}$$

Najmanje netrivijalno cjelobrojno rješenje je $(3, 5, 7, 8)$, a još jedno je $(57, 65, 73, 112)$. Opći identitet tog tipa mogli bismo zvati "3D-Candidov identitet". O brojevno-teorijskim posljedicama Candidovih identiteta i sličnih problema više u [18].
Trokut s cjelobrojnim duljinama stranica (a, b, c) i cjelobrojnim površinama P naziva se *Heronov trokut*; npr."egipatski" $(3, 4, 5)$ pa i svi Pitagorini (vidjeti [2]) jer su oni višekratnici od $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$. Heronov je trokut površine nula i (F_{n-1}, F_n, F_{n+1}). Pravi primjeri su i $(5, 5, 6)$, $(5, 29, 30)$, $(4, 13, 15)$, $(13, 14, 15)$, $(5220, 900, 5400)$ itd. S Heronovim su se trokutima bavili Brahmagupta u 9. st. i Euler i mnogi drugi (a bila je to i omiljena tema prof. dr. sc. Borisa Pavkovića o čemu smo svojedobno pisali). Napominjemo da s Heronovim trokutima ima još mnogo otvorenih pitanja iz teorije brojeva. A još je složenija priča s *Heronovim tetraedrima* i *Heronovim simpleksima*. Od interesa su ne samo u geometriji i teoriji brojeva, nego i u fizici, kemiji i informatici. Npr. Heronov tetraedar je (vidjeti sliku 8):

$$(U, V, W) = (11, 15, 16,), \quad u = w = 11, \quad v = 15. \tag{24}$$

Površine svih strana i volumen su mu cijeli brojevi. Nedavno 2014. godine dokazano je da Heronov tetraedar uvijek možemo smjestiti u 3D prostor $\mathbb{R}^3$ tako da su mu vrhovi u cjelobrojnoj rešetki $\mathbb{Z}^3$.

3 O Fermatovoj jednakosti

Poznatu Fermatovu[1] tvrdnju, poznatu kao "Fermat' s last theorem" (FLT) iz 1637. godine da jednadžba

$$a^n + b^n = c^n \tag{25}$$

nema rješenja za prirodne brojeve a, b, c i $n \geq 3$, dokazana je tek 1995.

godine. Dokaz je dao A. Wiles i za to dobio Abelovu nagradu 2016. godine (v. [27]). Taj je dokaz vrlo zamršen i rabi suvremene alate iz teorije eliptičkih krivulja, algebarske geometrije i drugih područja.
Pogledajmo za početak slučaj $n = 3$ tj.

$$a^3 + b^3 = c^3. \tag{26}$$

FLT je dovoljno dokazati za neparne proste brojeve $n = p$ i $n = 4$. Dokaz za $n = 4$ je jedini slučaj (kao i za tzv. proste brojeve Shopie Germain) za koje je odavno poznat relativno jednostavan elementarni dokaz [2]. Jedna primjedba kaže i da nema "elementarnog dokaza" FLT, jer kad bi postojao, onda bi rabeći samo operacije zbrajanja i množenja to vrijedilo i u komutativnom prstenu tzv. p-adskih brojeva, a tamo je poznato da Fermatova jednadžba ima rješenja za svaki n. No, pokažimo barem u kratkim crtama da Fermatova jednadžba za polinome s potencijama $n \geq 3$ nema (netrivijalnih) rješenja. To je prvi dokazao J. Liuoville oko 1880. godine, ali suvremeniji dokaz je posve drugačiji. Prvo je tu lema Masona iz 1984. godine, a kaže sljedeće: neka su $a = a(x)$, $b = b(x)$ i $c = c(x)$ relativno prosti polinomi s cijelim koeficijentima za koje je $a + b = c$ i koji nisu svi konstante. Tada su stupnjevi $deg\, a$, $deg\, b$, $deg\, c < n_0(abc)$. Pritom za polinom

$$f(x) = a(x - x_1)^{r_1}(x - x_2)^{r_2} \cdots (x - x_k)^{r_k}, \tag{27}$$

broj $n_0(f) = k = deg\, rad(f)$, gdje je $rad(f) = (x - x_1) \cdots (x - x_k)$. tj. $n_0(f)$ je broj različitih korijena (nultočaka) od f. Nadalje, $n_0(const) = 0$ ako je $const \neq 0$, te $n_0(0) = -\infty = deg(0)$. Ako f nema višestrukih korijena onda je $n_0(f) = deg\, f$, a inače $n_0(f) < deg\, f$. Višestruke derivacije detektiraju višestruke korijene polinoma, pa se gledaju derivacije $a' + b' = c'$. Da se dokaže ključna nejednakost

$$deg(a + b) = deg\, c < n_0(abc), \tag{28}$$

u suprotnom bi se dobile kontradikcija tipa "$1 \geq 2$" ili "$-\infty \geq 0$". Nećemo ulaziti u pojedinosti, ali dokaz nije težak (pokušajte indukcijom po $m = deg\, a + \deg\ b \geq 3$). Očito da jednadžba

$$f^n + g^n = h^n. \tag{29}$$

ima rješenja za $n = 1$ i $n = 2$, gdje su f, g, h relativno prosti polinomi. Pretpostavimo da su f, g i h relativno prosti polinomi nad $\mathbb{Z}$ i bar jedan od njih ne konstantan, tako da je

$$f^n + g^n = h^n. \tag{30}$$

Tada je $n \leq 2$. Doista, prema Masonovoj lemi, stupnjevi od f^n, g^n i h^n su najviše

$$\deg\ f + \deg\ g + \deg\ h - 1, \tag{31}$$

a taj je broj ≥ 0. Zbrojimo li tri nejednakosti dobivamo da je

$$n(\deg\ f + \deg\ g + \deg\ h) \leq 3(\deg\ f + \deg\ g + \deg\ h) - 3 \tag{32}$$

Ovo povlači $n \leq 2$.
Vrijedi i općenitije. Diofantska polinomska jednadžba

$$f^k + g^l = h^m. \tag{33}$$

za $2 \leq k \leq l \leq m$ može imati rješenja samo za $(k, l, m) = (2, 2, m)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ i $(2, 3, 5)$.
Dokaz nije težak i slijedi iz Masonove leme. Prepuštamo ga čitatelju.

4 Iz geometrije tetraedra

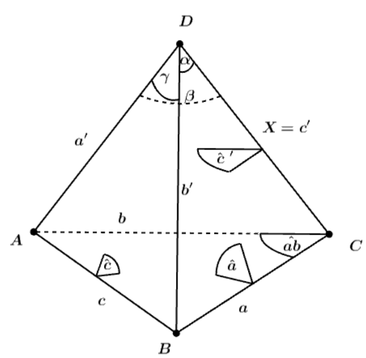
Ono što je trokut u ravnini, to je tetraedar u prostoru. Neka je $T = ABCD$ tetraedar s bazom $\triangle ABC$ i pripadnim stranicama (bridovima) a, b, c i nasuprotnim bridovima a', b' i c' (a' nasuprot a itd.) iz vrha D. Neka su nadalje $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\cdots$, $\widehat{c'}$ diedralni kutovi od T, tj. $\hat{a} = \widehat{BC}$ =kut među ravninama BCA i BCD itd. Nadalje, neka je $\widehat{ab}$ plošni kut između a i b, tj. $\widehat{ab} = \angle BCA$ itd. (vidjeti sliku 7). U geometriji trokuta znamo ako nam je dana baza i dva kuta uz bazu kako izračunati ostale stranice (sinusov i kosinusov poučak). Kako postupiti u analognoj situaciji u tetraedru? Neka nam je zadana baza $\triangle ABC$ od T i diedralni kutovi $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ na tu bazu. Izračunajmo c', vidjeti sliku 7 (pretpostavimo da su svi vrhovi različiti).

Poprečni brid tetraedra pomoću baze i kutova na bazu - "cot zakon".

$$X^2 = \left(\frac{ab}{\sum a\cot(\hat{a})}\right)^2 (\cot^2(\hat{a}) + \cot^2(\hat{b}) + 2\cot(\hat{a})\cot(\hat{b})\cos(\widehat{ab}) + \sin^2(\widehat{ab})), \tag{34}$$

pri tom je

$$\sum a\cot(\hat{a}) = a\cot(\hat{a}) + b\cot(\hat{b}) + c\cot(\hat{c}). \tag{35}$$



Slika 7: Tetraedar $ABCD$

Neka je $V = vol(T)$ i (ABC) =površina$(\triangle ABC)$, h_a visina iz D na $\overline{BC}$ itd., a h visina iz D na ABC. Tada je $h_a \sin(\hat{a}) = h = \frac{3V}{(ABC)}$. Iz

$$\sum \frac{1}{2} a\, h_a \cos(\alpha) = (ABC) \tag{36}$$

slijedi

$$2(ABC)^2 = 3V \sum a\cot(\hat{a}). \tag{37}$$

Odnosno sama tvrdnja. Detalje prepuštamo čitatelju, a ima i drugih izvoda [28]. Ova formula je analogon K-S-K (kut-stranica-kut) pravila, odnosno poučka za trokut.Diedralni kut pomoću ravninskih kutova (ili pomoću bridova).

Izračunajmo diedralni kut $\widehat{c'}$ pomoću ravninskih kutova α, β, γ kod vrha D kao na slici 7.

$$\cot(\widehat{c}) = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta}. \tag{38}$$

Dokaz.

Promatramo jediničnu sferu oko D i i primijenimo sferni kosinusov poučak [2]. Ako želimo sve izraziti pomoću bridova, upotrijebimo obične kosinusove zakone.

Kosinusov poučak za tetraedar (S-K-S pravilo).

Neka su zadani a, b, c, a', b' i diedralni kut $\hat{c}$ nasuprot brida $c\,'$. Riječima, zadano je pet bridova i diedralni kut nasuprot nedostajećem bridu. Tada je nedostajeći brid tetraedra dan s:

$$c\,'^2 = (a')^2 + b^2 - 2a'b\left(\cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos(\hat{c})\right), \tag{39}$$

gdje je $\alpha = \angle BAC$, $\alpha' = \angle DAB$ (tj. $\alpha = \hat{bc}$, $\alpha' = \hat{a'c}$) i vrijedi

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\alpha' = \frac{a'^2 + c^2 - b'^2}{2a'c}. \tag{40}$$

Dokaz.

Neka su $h_C = |CC'|$ i $h_D = |DD'|$ visine iz C i D redom do $|AB|$. Neka je C'' četvrti vrh pravokutnika određenog s $D\,'C\,'C$. Tada je

$$(c')^2 = |CD|^2 = |C'D'|^2 + |DC''|^2. \tag{41}$$

Uočimo

$$|C'D'| = |AC'| - |AD'| = b\cos\alpha - a'\cos\alpha'. \tag{42}$$

Iz kosinusovog poučka u $\triangle DD'C''$ za stranicu DC'' nasuprot kuta $\angle DD'C''$ ($=\hat{c}$, diedralni kut kod $c = \overline{AB}$) imamo

$$|DC''|^2 = (b\cos\alpha)^2 + (a'\sin\alpha')^2 - 2ba'\sin\alpha\sin\alpha'\cos(\hat{c}). \tag{43}$$

Iz ovih dviju formula slijedi tvrdnja.

Volumen tetraedra pomoću bridova.

Heronova formula (iz prvog stoljeća, a navodno već poznata Arhimedu 300 godina ranije) računa površinu trokuta pomoću stranica. Piero della Francesca[2] je u 15. stoljeću poznavao formulu za volumen (obujam) tetraedra pomoću bridova. Ta formula s dokazom se može pronaći u [2]. No mnoge činjenice iz geometrije pronaći ćete također u [26].
Cayley-Mengerova formula računa volumen n-dimenzionalnog simpleksa $vol^2(\Delta^n)$. Formula glasi

$$vol^2(\Delta^n) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \cdot (n!)^2}\, det\, M_0, \tag{44}$$

gdje je blok matrica

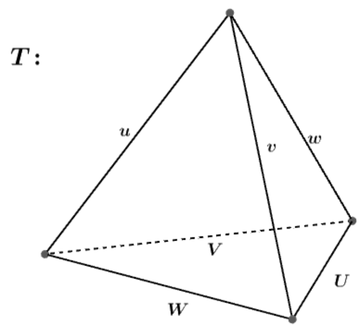
$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & e^T \\ e & M \end{bmatrix}, \tag{45}$$

pri čemu je e stupac od $n+1$ jedinica, e^T transponirana od e, a $M = \left[(a_{ij})^2\right]$, $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n+1$. Pri tome je $\Delta^n = A_0A_1\cdots A_n$ n-simpleks, $a_{ij} = d(A_i, A_j)$ duljina brida $\overline{A_iA_j}$ simpleksa. Dokaz možete naći u[15].
Ako je R radijus opisane kugle tetraedra T, onda je (slika 8)

$$(24\,R\,vol(T))^2 = (uU+vV+wW)\,(-uU+vV+wW)\,(uU-vV+wW)\,(uU+vV-wW)\,.$$

Eulerova formula (iz $1752.$ godine) za volumen tetraedra sa slike 8:

$$\begin{aligned}(12\,vol(T))^2 = {} & (2uvw)^2 - u^2\left(v^2+w^2-U^2\right)^2 - v^2\left(w^2+u^2-V^2\right)^2 - w^2\left(u^2+v^2-W^2\right)^2 + \\ & + \left(v^2+w^2-U^2\right)\left(w^2+u^2-V^2\right)\left(u^2+v^2-W^2\right).\end{aligned}$$



Slika 8: Tetraedar T

Zna se da je taj polinom ireducibilan (kao i u dimenzijama ≥ 3) pa se ne može očekivati neka formula u vidu produkta kao kod Herona.
Međutim, Kahaneova formula ($1985.$ godina) za volumen tetraedra glasi:

$$\begin{aligned} X &= (-U+v+w)\,(U+v+w)\,, \quad x = (U-v+w)\,(U+v-w)\,, \\ Y &= (u-V+w)\,(u+V+w)\,, \quad y = (u+V-w)\,(-u+V+w)\,, \\ Z &= (u+v-W)\,(u+v+W)\,, \quad z = (-u+v+W)\,(u-v+W)\,, \\ a &= \sqrt{xYZ}, \quad b = \sqrt{yXZ}, \quad c = \sqrt{zXY}, \quad d = \sqrt{xyz}. \end{aligned}$$

$$\left(3\cdot 2^6 vol(T)\right)^2 = (-a+b+c+d)\,(a-b+c+d)\,(a+b-c+d)\,(a+b+c-d)\,. \tag{4}$$

S-tetraedar je tetraedar kojemu su strane sukladni trokuti. Tetraedar T sa slike 8 je S-tetraedar $\Longleftrightarrow u=U$, $v=V$, $w=W$ (nasuprotni bridovi jednaki) $\Longleftrightarrow$ sve strane imaju jednake površine $\Longleftrightarrow$ opsezi svih strana jednaki $\Longleftrightarrow$ težište i središte opisane kugle se podudaraju $\Longleftrightarrow$ težište i središte upisane kugle se podudaraju $\Longleftrightarrow$ nasuprotni bridovi imaju jednake diedralne kutove itd.
Evo još malo tema iz geometrije tetraedra (bez dokaza). Prvo postoji sfera koja dodiruje sve bridove tetraedra (T) na slici 8 ako i samo ako su zbrojevi duljina nasuprotnih duljina jednaki ($u+U=v+V=w+W$ na slici 8).
Geometrija simpleksa (trokuti, tetraedri, n-dimenzionalni analogoni) je dakako još složenija (vidjeti [15]) i mnoga pitanja su još nerazjašnjena iako geometrijski dosta jasna. Tako se primjerice niti danas ne zna općenito je li simpleks određen s duljinama nekih bridova (barem jednog) i diedralnim kutovima nasuprot bridova koji ne dostaju ili npr. tek je $2000.$ godine dokazano da ako n-simpleks za $n \geq 4$ ima jednake površine svih 2-strana (trokuta) onda je simpleks pravilan. Godine $2014.$ dokazano je da za $n \geq 4$ kvadrat volumena n-simpleksa zadovoljava (netrivijalnu) polinomsku relaciju čiji koeficijenti ovise o kvadratima površina njegovih 2-strana (za $n=4$, min stupanj 32). Zanimljiva je (odavno poznata) formula za volumen n-simpleksa pomoću niže dimenzionalnih volumena njihovih strana i jednog diedralnog kuta

$$nV_nV_{n-2}^{(ij)} = (n-1)V_{n-1}^{(i)}V_{n-1}^{(j)}\sin\varphi_{ij}. \qquad (48)$$

gdje je V_n volumen n-simpleksa, $V_{n-2}^{(ij)}$ je volumen strane bez dva vrha i, j, $V_{n-1}^{(i)}$ volumen strane bez vrha i (slično $V_{n-1}^{(j)}$), a φ_{ij} diedralni kut uz brid ij.
Iako je volumen simpleksa teško egzaktno izračunati, postoje oštre nejednakosti. Jedna od njih je

$$2^n(n!V)^2 \leq (n+1)\left(\prod_{0\leq i<j\leq n} a_{ij}\right)^{\frac{4}{(n+1)}}, \qquad (49)$$

s jednakošću samo za pravilni simpleks. Volumen pravilnog tetraedra tj. pravilne trostrane piramide brida a je $V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$, dakle oko $11.8\ \%$ volumena kocke brida a.

Zaključak

Nakon ove kraće šetnje kroz odabrane matematičke teme, kažimo da je matematika - "kraljica znanosti" (kako ju je zvao Gauss, a njega su zvali "princ od matematike "), danas vrlo "živa i zdrava" i primjenjiva sve više i više. Brojne su i nagrade za doprinose novim spoznajama, a najprestižnija je već spomenuta $Abelova\ nagrada$ koja se dodjeljuje od $2002.$ godine. Ona je jednako vrijedna Nobelovoj nagradi u drugim znanostima i umjetnosti. O Abelovoj nagradi više u [16], [19] i [20] te [27] . Vrlo je prestižna i $Fieldsova\ medalja$ koja se dodjeljuje svake četvrte godine prilikom međunarodnih matematičkih kongresa, a dobitnici moraju biti mlađi od 40 godina. Prvi je put dodijeljena $1932.$ godine.
I hrvatska matematika je živahna što pokazuje i $6.$ Kongres hrvatskih matematičara, Zagreb, 14.-16. lipnja 2016. Ali hrvatska matematika je bila živahna i u davna doba, što pokazuje i bogati riječnik koji su rabili "naši stari". U to se možemo uvjeriti i uvidom u potrazi za nazivima, primjerice u rječniku latinsko-horvatskom iz $1835.$ godine jezikoslovca Ivana Belostenca. Predloženo je u to doba da se riječ matematika (koja dolazi od starogrčke riječi mathema - saznanje, dakle naprosto znanost) prevede kao oloslovlje prema staroj riječi olina - količina, veličina. Kasniji prijedlog je bio velkoumjenje. No, oba su prijedloga očito propala. Triangolo je preveo kao trojvugel, parni i neparni brojevi su tahi i lihi, kvadrat je četvorina itd. Neki od starijih hrvatskih naziva su još: parabola-hitnica, elipsa-pakružnica, hiperbola-kosatica, eksponent-izložitelj, logaritam-omjerobroj, tetraedar-četverostran, permutacija-premjestica itd. Mnogi su od tih naziva već uključeni u knjigu $Aritmetika\ Horvatzcka$ iz $1758.$ godine. A neke je od tih pojmova na prijelazu $19.$ u $20.$ st. rabio i hrvatski matematičar Vladimir Varićak $(1865.-1942.)$, v. [21], koji je među prvima uočio kako se Einsteinove formule iz teorije relativnosti mogu tumačiti i zapisati u terminima hiperboličke geometrije. S Einsteinom je razmijenio desetke pisama.
I naš dragi prijatelj i koautor Boris Pavković je bio "sladokusac" starohrvatskih matematičkih naziva. O tome i njegovim postignućima i šarmantnim i duhovitim dosjetkama - drugom prilikom.
Spomenimo i preporučimo na kraju knjigu na hrvatskom jeziku o popularnoj i svagdašnjoj matematici [22] te jednu suvremenu knjigu o "trojveugelima" [23].
Na kraju navodimo i nedavno izašli pregledni i povijesni prekrasan članak [24] Johna Milnora, dobitnika Abelove nagrade 2011. godine i Fieldsove medalje $1962.$ godine ([16]). Milnorove smo radove i knjige iz topologije

čitali , proučavali i učili iz njih mnogi od nas: Mardešić, Pavković i drugi. I na samom koncu, svaki naš diplomirani matematičar morao bi pročitati prekrasnu i nadasve zanimljivu knjigu akademika Sibe Mardešića [25]. Iz nje ćete naučiti ne samo o njegovoj matematici, nego i o umjetnosti, mudrostima, prirodnim i društvenim fenomenima i mnogo čemu ostalome.

Bibliografija

[1] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[2] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1995.

[3] I. N. Bronštejn, suradnici: *Matematički priručnik*, Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[4] S. Mardešić: *Sjećanje na profesora Borisa Pavkovića (1931.-2006.)*, Glasnik Matematički, 41 (61) (P) (2006.), 414-415.

[5] V. Volenec: *Popis i opis znanstvenih radova prof. dr. sc. Borisa Pavkovića*, Glasnik Matematički, 41 (61) (P) (2006.), 411-413.

[6] D. Veljan: *The 2500-year -old-pythagorean theorem*, Mathematics Magazine, 73 No. 4 (2000.), 259-272.

[7] D. Veljan: *The AM-GM inequality from different viewpoints*, Elem. Math. 72 (2017), 24-34.

[8] D. Svrtan, D. Veljan: *Non-Euclidean versions of some classical triangle inequalities*, Forum Geometricorum, 12 (2012.), 197-209.

[9] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya: *Inequalities*, 2nd. ed. , Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

[10] J. M. Steele: *The Cauchy-Schwarz Master Class, MAA*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[11] D. Veljan: *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[12] D. Veljan: *Čarobne četvorine (iliti magični kvadrati)*, Poučak,15 (57) (2014.), 12-23.

[13] C. A. Pickover: *Wonders of Numbers*, Oxford University Press, New York, 2002.

[14] C. A. Pickover: *The Math Book*, Sterling, New York, 2009.

[15] M. Fiedler: *Matrices and Graphs in Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[16] D. Veljan: *John Milnor - dobitnik Abelove nagrade za 2011. godinu*, Matematičko-fizički list, 62(2011.), 172-176.

[17] A. Dujella: *Fibonaccijevi brojevi*, HMD, Zagreb, 2000.

[18] T. Koshy: *Pell and Pell–Lucas Numbers with Applications*, Springer, New York, 2014.

[19] D. Veljan, *J. Nash* i *L. Nirenberg*: *Abelovci za 2015. godinu*, Matematičko fizički list, 66 (2015.), 31-36.

[20] M. Raussen, C. Skau : *Interview with Abel Laureate John F. Nash Jr.*, Notices of the AMS, 63 (5),(2016.), 486-491.

[21] D. Veljan : *Matematičar i teorijski fizičar, akademik Vladimir Varićak*, Prirodoslovlje 16(2016.), 125-152.

[22] D. Klobučar : *Matematika naša svagdašnja I, II*, Element , Zagreb, 2014.

[23] B. J. McCartin: *Mysteries of the Equilateral Triangle*, (javno dostupno na: http://www.m-hikari.com/mccartin-2.pdf, 7.2.2017.)

[24] J. Milnor : *Topology through the centuries: Low dimensional manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (4) (2015.), 545-584.

[25] S. Mardešić : *Kako sam postao i ostao matematičar*, Hrvatska sveučilišna naklada, Zagreb, 2016.

[26] D. Veljan, V. Volenec: *Matematika 3*, Školska knjiga, Zagreb, 1998.

[27] I. Gusić: *Andrew Wiles dobio Abelovu nagradu*, Matematičko-fizički list, 67(2016.), 7-13.

[28] D. Svrtan, D. Veljan: *Side lengths of Morley triangles and tetrahedra*, Forum geometricorum, 17(2017), 123-142.

---

[1]Pierre de Fermat ($1601. - 1665.$) bio je francuski matematičar i pravnik. Uz Descartesa najznačajniji matematičar $17.$ stoljeća.
[2]($1412. - 1492$) bio je talijanski slikar, matematičar i pisac rane renesanse.

ISSN 1334-6083