math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

O zlatnom rombu

geogebra **geometrijske konstrukcije** **zlatni rez**

Bojan Kovačić i Mirela Katić Žlepalo
Tehničko veleučilište u Zagrebu

1 Sažetak

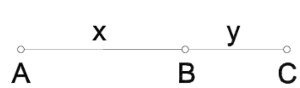
U ovom članku definirat ćemo zlatni romb, objasnit ćemo neka njegova svojstva i pokazati neke konstrukcije vezane uz zlatni romb, a koje se mogu izvesti ravnalom i šestarom.

2 Uvod

Zlatni rez i zlatni pravokutnik su omiljena tema u matematici, odnosno geometriji, a i u umjetnosti. O njima je napisano zaista mnoštvo radova. Poznat je i pojam zlatnog romba, ali se on u literaturi nešto rjeđe spominje. Stoga ćemo u ovom radu definirati zlatni romb, te navesti njegova najvažnija svojstva i načine konstrukcija.

3 O zlatnom rezu

Dužina $(\overline{AC})$ je podijeljena u **zlatnom rezu** ako je omjer većeg dijela dužine $(\overline{AB})$ prema manjem dijelu dužine $(\overline{BC})$ jednak omjeru cijele dužine $(\overline{AC})$ prema većem dijelu dužine $(\overline{AB})$ (vidjeti Sliku 1).



Slika 1: Podjela dužine $\overline{AC}$ u zlatnom rezu

Pokazuje se da je

$$\frac{x}{y} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398875.... \tag{1}$$

Broj φ nazivamo **zlatni broj**. Jednakost (1) može se zapisati i u ekvivalentnom obliku:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.61803398875.... \tag{2}$$

Za pregledne podatke o zlatnom rezu i dvjema osnovnim konstrukcijama vezanima uz zlatni rez zainteresiranoga čitatelja upućujemo na članak [1].

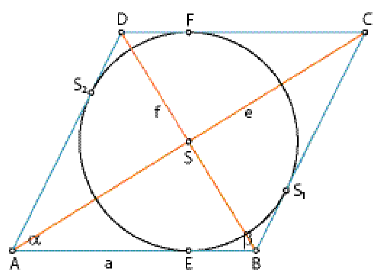
4 Definicija i osnovna svojstva zlatnoga romba

Zlatni romb je romb kojemu je omjer duljine veće dijagonale (*e*) i manje dijagonale (*f*) jednak zlatnom broju φ (vidjeti Sliku 2). Preciznije, vrijede sljedeće jednakosti:

$$\frac{e}{f} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{3}$$

$$\frac{f}{e} = \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{4}$$

Napomena: Ne istaknemo li drugačije, u iskazima i dokazima svih svojstava zlatnoga romba koristimo oznake sa Slike 2.



Slika 2: Zlatni romb

Pokažimo najprije da su svi zlatni rombovi slični. U tu ćemo svrhu najprije izračunati mjere unutrašnjih kutova proizvoljnoga zlatnoga romba.

Propozicija 1. (prema [4]) Mjere (u radijanima) unutrašnjih kutova proizvoljnoga zlatnoga romba dane su izrazima:

$$\alpha = 2arctg(\frac{\sqrt{5}-1}{2})\text{radijana} \approx 63^\circ 26' 6'',$$

$$\beta = 2arcctg(\frac{\sqrt{5}-1}{2})\text{radijana} \approx 116^\circ 33' 54''.$$

Dokaz: Prisjetimo se da je romb četverokut kojemu su dijagonale međusobno okomite, a ujedno su i simetrale unutrašnjih kutova romba (tj. kutova α i β). Promotrimo bilo koji od četiriju pravokutnih trokutova na koje je romb podijeljen svojim dijagonalama. Duljine kateta toga trokuta su $\frac{e}{2}$ i $\frac{f}{2}$, duljina hipotenuze a, a mjere šiljastih kutova $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\beta}{2}$. Primjenom (4) i osnovnih trigonometrijskih relacija u pravokutnom trokutu dobivamo:

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = ctg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\frac{f}{2}}{\frac{e}{2}} = \frac{f}{e} = \frac{1}{\varphi}. \tag{5}$$

Odatle slijedi:

$$\alpha = 2arctg\left(\frac{1}{\varphi}\right) = 2arctg\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right),$$

$$\beta = 2arcctg\left(\frac{1}{\varphi}\right) = 2arcctg\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

što je i trebalo dokazati. (Pretvorbe mjera kutova u stupnjeve prepuštamo čitatelju.) □

Korolar 1. Svi zlatni rombovi su slični.

Dokaz: Prema Propoziciji 1, mjere svih unutrašnjih kutova romba su konstante. Zbog toga tvrdnja korolara izravno slijedi iz definicije sličnosti dvaju mnogokuta (vidjeti npr. [2]). □

Zbog netom dokazanoga svojstva, zlatni romb je potpuno određen zadavanjem jedne od dviju dijagonala ili osnovice romba. Razmotrimo zasebno svaki pojedini slučaj. Radi jasnoće i preglednosti, relacije formuliramo u obliku propozicija.

Najprije iskažimo jednakost koju ćemo često koristiti u nastavku teksta.

Lema 1. Za zlatni broj φ vrijedi jednakost:

$$\varphi^2 = \varphi + 1. \tag{6}$$

Dokaz: Izravnim uvrštavanjem $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ u navedenu jednakost ili uočavanjem da je φ rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$. Detalje prepuštamo čitatelju. □

Propozicija 2. Neka je zadan zlatni romb čija je duljina osnovice a. Tada su:

$$e = \frac{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{5}a, \tag{7}$$

$$f = \frac{\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{5}a. \tag{8}$$

Dokaz: Prema Pitagorinu poučku vrijedi:

$$e^2 + f^2 = 4a^2. \tag{9}$$

Iz (3) slijedi $e = \varphi f$, pa uvrštavanjem te jednakosti u (9) i korištenjem (6) dobivamo:

$$\varphi^2 f^2 + f^2 = 4a^2,$$

$$(\varphi^2 + 1)f^2 = 4a^2,$$

$$((\varphi + 1) + 1)f^2 = 4a^2,$$

$$f^2 = \frac{4a^2}{\varphi + 2},$$

$$f = \frac{2}{\sqrt{\varphi + 2}} a =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2}} a =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} a =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} \frac{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}} a =$$

$$= \frac{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{5} a =$$

$$= \frac{\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{5} a.$$

Iz (4) slijedi $f = \frac{e}{\varphi}$, pa uvrštavanjem te jednakosti u (9) i korištenjem (6) dobivamo:

$$e^2 + \frac{e^2}{\varphi^2} = 4a^2,$$

$$\left(1 + \frac{1}{\varphi^2}\right) e^2 = 4a^2,$$

$$\left(1 + \frac{1}{\varphi + 1}\right) e^2 = 4a^2,$$

$$\frac{\varphi + 2}{\varphi + 1} e^2 = 4a^2,$$

$$e = \frac{2\sqrt{\varphi + 1}}{\sqrt{\varphi + 2}} a =$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1}}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2}} a =$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} a =$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} \frac{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}} a =$$

$$= \frac{\sqrt{5(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}}{5} a =$$

$$= \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{5} a.$$

Time je propozicija dokazana. □

Propozicija 3. Neka je zadan zlatni romb kojemu je duljina veće dijagonale e. Tada su:

$$f = \frac{\sqrt{5}-1}{2} e, \tag{10}$$

$$a = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} e, \tag{11}$$

Dokaz: Prva jednakost odmah slijedi iz (4), a druga iz (7). Detalje prepuštamo čitatelju. □

Propozicija 4. Neka je zadan zlatni romb kojemu je duljina manje dijagonale f. Tada su:

$$e = \frac{\sqrt{5}+1}{2} f, \tag{12}$$

$$a = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} f. \tag{13}$$

Dokaz: Prva jednakost odmah slijedi iz (3), a druga iz (8). Detalje prepuštamo čitatelju. □

Izvedimo sada izraze za površinu zlatnoga romba.

Propozicija 5. Površina zlatnoga romba (P) dana je sljedećim izrazima:

$$P = \frac{\sqrt{5}-1}{4} e^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} f^2 = \frac{2}{5}\sqrt{5} a^2. \tag{14}$$

Dokaz: Romb je četverokut s okomitim dijagonalama, pa se njegova površina može izračunati prema formuli:

$$P = \frac{ef}{2}. \tag{15}$$

Sada prva jednakost odmah slijedi uvrštavanjem (10) u (15), a druga uvrštavanjem (12) u (15). Pomnožimo li jednakosti (11) i (13) i ponovo iskoristimo (15), dobijemo:

$$a^2 = \frac{\sqrt{100-20}}{16} ef = \frac{4\sqrt{5}}{8} \frac{ef}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} P,$$

a odatle izravno slijedi treća jednakost. □

Svakom rombu se može upisati kružnica. Njezin je promjer jednak visini romba. Ekvivalentno, polumjer rombu upisane kružnice jednak je polovici visine romba. Izraze za izračunavanje toga polumjera u slučaju zlatnoga romba navodimo u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 6. Polumjer zlatnom rombu upisane kružnice (r) dan je sljedećim izrazima:

$$r = \frac{\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{20} e = \frac{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{20} f = \frac{\sqrt{5}}{5} a. \tag{16}$$

Dokaz: Neka je v duljina visine romba. Znamo da je $v = 2r$, pa uvrštavanjem toga izraza u formulu za površinu romba $P = av$ dobijemo:

$$P = 2ar,$$

a odatle je

$$r = \frac{P}{2a}. \tag{17}$$

Ako u (17) uvrstimo prvu jednakost iz (14) i jednakost (11), nakon sređivanja dobivamo prvu jednakost u (16).
Ako u (17) uvrstimo drugu jednakost iz (14) i jednakost (13), nakon sređivanja dobivamo drugu jednakost u (16).
Naposljetku, ako u (17) uvrstimo treću jednakost iz (14), odmah dobivamo preostalu, treću jednakost u (16). Detalje prepuštamo čitatelju. □

Napomena: Zlatnom rombu *nije* moguće opisati kružnicu. Podsjetimo, rombu se može opisati kružnica ako i samo ako je romb kvadrat.

Propozicija 7. Dirališta zlatnom rombu upisane kružnice dijele stranice romba u omjeru $\varphi : \frac{1}{\varphi}$.

Dokaz: Budući da dijagonale bilo kojega romba dijele romb na četiri sukladna trokuta, tvrdnju propozicije dovoljno je dokazati samo za jednu stranicu romba. Stoga bez smanjenja općenitosti odaberimo stranicu $\overline{AB}$ i diralište E. Iz (5) slijedi

$$\varphi = tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{|\overline{SE}|}{|\overline{BE}|},$$

$$\frac{1}{\varphi} = tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{|\overline{SE}|}{|\overline{AE}|}.$$

Dijeljenjem tih jednakosti odmah dobivamo $|\overline{AE}| : |\overline{BE}| = \varphi : \frac{1}{\varphi}$, što je i trebalo pokazati. □

5 Konstrukcije zlatnoga romba

U prethodnoj smo točki pokazali da je za jednoznačno određivanje zlatnoga romba dovoljno zadati jednu od dijagonala ili osnovicu romba. Zbog toga razlikujemo tri osnovne konstrukcije zlatnoga romba:
1.Konstrukcija ako je zadana duljina osnovice (a).
2.Konstrukcija ako je zadana duljina veće dijagonale (e).

3.Konstrukcija ako je zadana duljina manje dijagonale (f).

Svaka od ovih konstrukcija zasniva se na konstrukciji pravokutnoga trokuta kojemu je omjer duljina kateta jednak zlatnom broju. Stoga ćemo najprije opisati tu konstrukciju.

5.1 Konstrukcije pravokutnoga trokuta kojemu je omjer duljina kateta jednak zlatnom broju

Dokažimo najprije sljedeću propoziciju.

Propozicija 8. Neka je ΔABC pravokutan trokut kojemu su duljine kateta a i b. Pretpostavimo da je $a:b=\varphi$. Tada je ΔABC jednoznačno određen zadavanjem duljine *bilo koje* svoje stranice.

Dokaz: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su kutovi u trokutu ΔABC označeni standardno (tj. nasuprot katete a se nalazi kut α itd.).

Pretpostavimo najprije da je zadana duljina *bilo koje* katete. Tada iz omjera $a:b=\varphi$ najprije izračunamo duljinu preostale katete. Duljinu hipotenuze c potom izračunamo npr. koristeći Pitagorin poučak. Time je dokazana tvrdnja propozicije za ovaj slučaj.

Preostaje razmotriti slučaj kad je zadana duljina hipotenuze c. Iz pretpostavke $a:b=\varphi$ slijedi:

$$tg\alpha = \frac{a}{b} = \varphi, \tag{18}$$

pa primjenom trigonometrijskih relacija u pravokutnom trokutu (vidjeti [3])i relacije (6) dobivamo:

$$a = c\sin\alpha = c\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = c\frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}} = c\frac{\varphi}{\sqrt{\varphi+2}},$$

$$b = c\cos\alpha = c\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = c\frac{1}{\sqrt{\varphi^2+1}} = c\frac{1}{\sqrt{\varphi+2}}.$$

Odatle slijedi da su jednoznačno određene i duljine obiju kateta, što smo i htjeli pokazati. $\square$

Radi jednostavnosti, u nastavku pretpostavljamo da je ΔABC pravokutan trokut kojemu su duljine kateta a i b takve da je $a:b=\varphi$. Analogno kao u dokazu Propozicije 8., pretpostavljamo da su sve ostale oznake veličina u ΔABC standardne.

Pokažimo da se ΔABC može konstruirati ako je zadana duljina bilo koje njegove stranice. Sve konstrukcije izvodimo ravnalom i šestarom. Radi jasnoće i preglednosti izlaganja, svaku od triju mogućih konstrukcija formuliramo u obliku zadatka.

Zadatak 1. Konstruirajte ΔABC ako je zadana duljina katete a.

Rješenje: Iz pretpostavke zadatka i ranije pretpostavke o standardnim oznakama veličina u ΔABC zaključujemo da je zadana dužina $\overline{BC}$ takva da je $|\overline{BC}|=a$. Trokut će biti potpuno konstruiran kad odredimo preostali vrh A. Točka C mora biti vrh pravoga kuta trokuta ΔABC, pa su koraci konstrukcije sljedeći:
Korak 1. Iz točke C uzdignemo okomicu p na polupravac CB. Radi određenosti, u daljnjem smatramo da je p polupravac kojemu je C početna točka.

Korak 2. Nacrtamo kružni luk sa središtem u točki C i polumjerom $r_1=\overline{BC}$. Taj kružni luk siječe polupravac p u točki D.

Korak 3. Odredimo polovište P dužine $\overline{BC}$.

Korak 4. Nacrtamo kružni luk sa središtem u točki P i polumjerom $r_2 = \overline{PD}$. Taj luk siječe pravac CB u točki E.

Korak 5. Nacrtamo kružni luk sa središtem u točki C i polumjerom $r_3 = \overline{CE}$. Taj luk siječe polupravac p u traženoj točki A.
Dokaz konstrukcije: Vidjeti rješenje Zadatka 1 u [1].

Zadatak 2. Konstruirajte ΔABC ako je zadana duljina katete b.

Rješenje: Iz pretpostavke zadatka i ranije pretpostavke o standardnim oznakama veličina u ΔABC zaključujemo da je zadana dužina $\overline{AC}$ takva da je $|\overline{AC}| = b$. Trokut će biti potpuno konstruiran kad odredimo preostali vrh B. Točka C mora biti vrh pravoga kuta trokuta, pa su koraci konstrukcije sljedeći:
Korak 1. Iz točke C uzdignemo okomicu p na polupravac CA. Ponovno radi jednostavnosti i jednoznačnosti rješenja, u daljnjem smatramo da je p polupravac kojemu je C početna točka.

Korak 2. Odredimo polovište P dužine $\overline{AC}$.

Korak 3. Nacrtamo kružni luk sa središtem u točki C i polumjerom $r_1 = \overline{CP}$. Taj luk siječe polupravac p u točki D.

Korak 4. Nacrtamo kružni luk sa središtem u točki D i polumjerom $r_2 = \overline{AD}$. Taj luk siječe polupravac p u traženoj točki B.

Dokaz konstrukcije: Zapravo treba dokazati da je $|\overline{BC}| = a$. Iz Koraka 3 i 4 slijedi $B, D \in p$. Iz Koraka 1 zaključujemo da je p okomit na polupravac CA, pa su trokutovi ABC i ACD pravokutni trokutovi s pravim kutom u vrhu C. Iz Koraka 2 i Koraka 3 slijedi $|\overline{CD}| = |\overline{CP}| = \frac{b}{2}$, dok iz Koraka 4 slijedi $|\overline{BD}| = |\overline{AD}|$.
Primjenom Pitagorina poučka na trokut ACD dobivamo:

$$|\overline{BC}| = |\overline{CD}| + |\overline{BD}| = |\overline{CP}| + |\overline{AD}| = \frac{b}{2} + \sqrt{|\overline{AC}|^2 + |\overline{CD}|^2} = \frac{b}{2} + \sqrt{|\overline{AC}|^2 + |\overline{CP}|^2} =$$

$$= \frac{b}{2} + \sqrt{b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b}{2} + \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{4}} = \frac{b}{2} + \sqrt{5\frac{b^2}{4}} = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{5} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)b = \varphi b.$$

S druge strane, pretpostavka $a : b = \varphi$ je ekvivalentna s $a = \varphi b$, pa iz dobivenih jednakosti zaključujemo da je $|\overline{BC}| = a$, što smo i željeli dokazati. □

Zadatak 3. Konstruirajte ΔABC ako je zadana duljina hipotenuze c.

Rješenje: ΔABC je najbrže i najlakše konstruirati tako da se najprije konstruira zlatni romb čija osnovica ima duljinu c. Ovu konstrukciju izložit ćemo u sljedećoj točki.
Dokaz konstrukcije: Pretpostavimo da smo konstruirali zlatni romb $ABCD$ kojemu je c duljina osnovice. Neka je S sjecište njegovih dijagonala. Tada je traženi trokut npr. ΔABS (ili, općenito, bilo koji trokut određen dvama susjednima vrhovima romba i točkom S). Ispravnost ovoga zaključka slijedi iz definicije zlatnoga romba i činjenice da su dijagonale bilo kojega romba međusobno okomite. Detalje prepuštamo čitatelju. □

5.2 Konstrukcije zlatnoga romba

Već smo ranije istaknuli (vidjeti primjedbu neposredno iza Korolara 1) da je zlatni romb jednoznačno određen zadavanjem bilo koje njegove dijagonale ili njegove osnovice. Stoga ćemo razmotriti konstrukciju romba u svakom od tih slučajeva. Radi jasnoće i preglednosti, konstrukcije ćemo ponovno formulirati u obliku zadataka.

U svim konstrukcijama pretpostavljamo da je $ABCD$ zlatni romb kojemu su $\overline{AC}$ veća dijagonala, $\overline{BD}$ manja dijagonala i S sjecište tih dijagonala.

Zadatak 4. Konstruirajte zlatni romb kojemu je zadana duljina veće dijagonale e.

Rješenje: U skladu s pretpostavkama, zadana nam je $\overline{AC}$ takva da je $|\overline{AC}| = e$. Koraci konstrukcije su sljedeći:

Korak 1. Odredimo polovište P dužine $\overline{AC}$.
Korak 2. Konstrukcijom opisanom u rješenju Zadatka 1 konstruiramo pravokutan trokut APB čija je veća kateta $\overline{AP}$.

Korak 3. Nacrtamo kružni luk sa središtem u točki P i polumjerom $r = \overline{PB}$. Taj luk će presjeći pravac PB u točkama B i D.
Korak 4. Četverokut $ABCD$ je traženi zlatni romb.

Dokaz konstrukcije: Prema Koracima 1 i 3, P je zajedničko polovište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. To znači da je četverokut $ABCD$ paralelogram. Prema Koraku 2, trokut APB je pravokutan trokut, pa su dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ četverokuta $ABCD$ okomite. Odatle slijedi da je četverokut $ABCD$ romb. Prema konstrukciji iz Koraka 2 vrijedi omjer $|\overline{AP}| : |\overline{BP}| = \varphi$. Budući da su $|\overline{AP}| = \frac{e}{2}$ i $|\overline{BP}| = \frac{f}{2}$, zaključujemo da je $\varphi = |\overline{AP}| : |\overline{BP}| = \frac{e}{2} : \frac{f}{2} = e : f$, pa je $ABCD$ zlatni romb. □

Zadatak 5. Konstruirajte zlatni romb kojemu je zadana duljina manje dijagonale f.

Rješenje: U skladu s pretpostavkama, zadana nam je $\overline{BD}$ takva da je $|\overline{BD}| = f$. Koraci konstrukcije su sljedeći:

Korak 1. Odredimo polovište P dužine $\overline{BD}$.
Korak 2. Konstrukcijom opisanom u rješenju Zadatka 2 konstruiramo pravokutan trokut APB čija je manja kateta $\overline{BP}$.

Korak 3. Nacrtamo kružni luk sa središtem u točki P i polumjerom $r = \overline{AP}$. Taj luk će presjeći pravac AP u točkama A i C.
Korak 4. Četverokut $ABCD$ je traženi zlatni romb.
Dokaz konstrukcije: Jednak je dokazu konstrukcije iz Zadatka 4, pa ga izostavljamo. □

Preostalo je razmotriti slučaj konstrukcije zlatnoga romba u slučaju kad je zadana duljina osnovice romba. U tu ćemo svrhu najprije riješiti sljedeći zadatak.

Zadatak 6. (prilagođeno prema [5]) Konstruirajte zlatni romb čija je duljina osnovice $\sqrt{5}$ (jedinica duljine).

Rješenje: Promotrimo pravokutnik $A_1B_1C_1D_1$ čije su duljine stranica 4 i 2. Radi određenosti, zapišimo:

$$|\overline{A_1B_1}| = |\overline{C_1D_1}| = 4, |\overline{B_1C_1}| = |\overline{D_1A_1}| = 2.$$

U taj pravokutnik upišimo kružnicu k polumjera 1 čije je središte u sjecištu dijagonala pravokutnika.

Dijagonala $\overline{B_1D_1}$ siječe kružnicu k u točkama S_1 i S_2. U tim točkama povucimo tangente t_1 i t_2 na kružnicu k. Neka su:

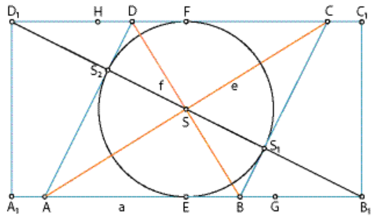
$$A := t_2 \cap \overline{A_1B_1},$$

$$B := t_1 \cap \overline{A_1B_1},$$

$$C := t_1 \cap \overline{C_1D_1},$$

$$D := t_2 \cap \overline{C_1D_1}.$$

Tada je četverokut $ABCD$ traženi zlatni romb (vidjeti Sliku 3).



Slika 3: Zlatni romb čija je duljina osnovice $\sqrt{5}$

Dokaz konstrukcije I. Naznačit ćemo samo glavne korake dokaza, a detalje prepuštamo čitatelju. Smjestimo pravokutnik $A_1B_1C_1D_1$ u pravokutni koordinatni sustav u ravnini tako da središte pravokutnika, tj. sjecište S njegovih dijagonala bude u ishodištu koordinatnoga sustava. Neka su vrhovi pravokutnika $A_1 = (-2, -1), B_1 = (2, -1), C_1 = (2, 1), D_1 = (-2, 1)$. Jednadžba kružnice k sa središtem u $S = (0, 0)$ i polumjerom $r = 1$ je $x^2 + y^2 = 1$. Jednadžba pravca na kojemu leži dijagonala $\overline{B_1D_1}$ je $y = -\frac{1}{2}x$. Taj pravac siječe kružnicu k u točkama $S_1 = \left(\frac{2}{5}\sqrt{5}, -\frac{1}{5}\sqrt{5}\right)$ i $S_2 = \left(-\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5}\right)$. Jednadžba tangente povučene na kružnicu k u točki S_1 je $t_1 \ldots y = 2x - \sqrt{5}$, a jednadžba tangente povučene na kružnicu k u točki S_2 je $t_2 \ldots y = 2x + \sqrt{5}$. Presiječemo li pravce t_1 i t_2 s pravcima $y = -1$ (pravac na kojemu leži stranica $\overline{A_1B_1}$) i $y = 1$ (pravac na kojemu leži stranica $\overline{C_1D_1}$), uz oznake definirane u opisu konstrukcije dobit ćemo:

$$A = \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -1\right), B = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -1\right), C = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right), D = \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right).$$

Sada se lako provjeri da je $ABCD$ romb čija osnovica ima duljinu $\sqrt{5}$. Preostaje provjeriti da je $ABCD$ zlatni romb. Sjecište dijagonala romba je također točka S, odnosno ishodište. Lako izračunamo:

$$e = |\overline{AC}| = 2|\overline{AS}| = 2\sqrt{\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{2}},$$

$$f = |\overline{BD}| = 2|\overline{BS}| = 2\sqrt{\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2}},$$

pa je:

$$\frac{e}{f} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi,$$

što smo i željeli pokazati. $\square$

Dokaz konstrukcije II. Ovaj dokaz je elegantniji od prvoga jer ne koristi koordinatizaciju. Zbog toga ćemo u potpunosti obrazložiti svaki njegov korak. Koristimo oznake sa Slike 3 i iz konstrukcije. Pritom napominjemo da je točka E polovište stranice $\overline{A_1B_1}$, a točka F polovište stranice $\overline{C_1D_1}$.

Pokažimo najprije da je četverokut $ABCD$ paralelogram. Prema konstrukciji, pravac na kojemu leži dijagonala

$\overline{BD}$ prolazi središtem kružnice k, pa je dužina $\overline{S_1S_2}$ promjer kružnice k. Pravci t_1 i t_2 su tangente na kružnicu k, pa su okomiti na dužinu $\overline{S_1S_2}$, a time i na dijagonalu $\overline{BD}$. To znači da su pravci t_1 i t_2 usporedni (okomiti su na istu dužinu $\overline{S_1S_2}$). Odatle slijedi da je stranica $\overline{BC}$ četverokuta $ABCD$ usporedna sa stranicom $\overline{AD}$. Usporednost stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ slijedi izravno iz usporednosti stranica $\overline{A_1B_1}$ i $\overline{C_1D_1}$ koja vrijedi jer je $A_1B_1C_1D_1$ pravokutnik. Time smo pokazali da je četverokut $ABCD$ paralelogram.

Pokažimo da je paralelogram $ABCD$ romb. U tu je svrhu dovoljno dokazati da je $|\overline{AB}| = |\overline{AD}|$. Površina paralelograma $ABCD$ dana je izrazima $P_{ABCD} = |\overline{AB}|v_1 = |\overline{AD}|v_2$, gdje su v_1 i v_2 duljine visina povučenih na stranicu $\overline{AB}$, odnosno $\overline{AD}$. Primijetimo da je dužina $\overline{EF}$ visina na stranicu $\overline{AB}$ (jer sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ zatvara pravi kut), te da je iz analognoga razloga dužina $\overline{S_1S_2}$ visina na stranicu $\overline{AD}$. No, $|\overline{EF}| = |\overline{S_1S_2}| = 2$ jer su te dužine promjeri kružnice k. Dakle, vrijedi jednakost $v_1 = v_2$, pa sada iz $|\overline{AB}|v_1 = |\overline{AD}|v_2$ izravno slijedi $|\overline{AB}| = |\overline{AD}|$.

Izračunajmo duljinu stranice romba $ABCD$. Uočimo da je $\Delta EBS \cong \Delta SS_2D$. Oba trokuta su pravokutna (prvi ima pravi kut kod vrha E, a drugi kod vrha S_2) i imaju dva para međusobno sukladnih stranica ($|\overline{BS}| = |\overline{SD}| = \frac{f}{2}$ i $|\overline{SE}| = |\overline{SS_2}| = 2$), pa primjenom Pitagorina poučka zaključujemo da je i preostali par stranica međusobno sukladan. Preciznije, vrijedi jednakost:

$$|\overline{S_2D}| = |\overline{S_1B}|. \tag{19}$$

Nadalje, uočimo da je $\Delta EB_1S \sim \Delta S_1BB_1$. Oba trokuta su pravokutna i imaju zajednički (šiljasti) kut kod vrha B_1, pa su i preostala dva kuta tih trokutova sukladna. Stoga navedena sličnost slijedi iz poučka K-K o sličnosti trokutova (vidjeti npr. [2]). Tako dobivamo razmjer:

$$|\overline{SE}| : |\overline{EB_1}| = |\overline{S_1B}| : |\overline{S_1B_1}|.$$

U taj razmjer uvrstimo:

$$|\overline{SE}| = 1, \, |\overline{EB_1}| = \frac{1}{2}4 = 2,$$

$$|\overline{S_1B_1}| = |\overline{SB_1}| - |\overline{SS_1}| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 2^2} - 1 = \frac{1}{2}\sqrt{20} - 1 = \frac{1}{2}2\sqrt{5} - 1 = \sqrt{5} - 1,$$

pa dobijemo:

$$|\overline{S_1B}| = \frac{|\overline{SE}|\,|\overline{S_1B_1}|}{|\overline{EB_1}|} = \frac{1(\sqrt{5} - 1)}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \tag{20}$$

Naposljetku, uočimo da je $\Delta EB_1S \sim \Delta S_2AB_1$ iz istih razloga kao i $\Delta EB_1S \sim \Delta S_1BB_1$. Tako dobivamo razmjer:

$$|\overline{SE}| : |\overline{EB_1}| = |\overline{S_2A}| : |\overline{S_2B_1}|.$$

Budući da su

$$|\overline{SE}| = 1,\ |\overline{EB_1}| = 2,$$

$$|\overline{S_2B_1}| = |\overline{S_2S_1}| + |\overline{S_1B_1}| = 2 + (\sqrt{5} - 1) = \sqrt{5} + 1,$$

slijedi:

$$|\overline{S_2A}| = \frac{|\overline{SE}|\,|\overline{S_2B_1}|}{|\overline{EB_1}|} = \frac{1(\sqrt{5} + 1)}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}. \tag{21}$$

Tako iz (19), (20) i (21) dobivamo:

$$a = |\overline{AD}| = |\overline{AS_2}| + |\overline{S_2D}| = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sqrt{5}.$$

Preostaje pokazati da je $ABCD$ zlatni romb. Uočimo da je $\Delta ASD \sim \Delta ASS_2$. Oba trokuta su pravokutna i imaju zajednički kut kod vrha A, pa sličnost ponovno slijedi iz poučka K-K o sličnosti trokutova. Tako dobivamo razmjer:

$$|\overline{AS}| : |\overline{SD}| = |\overline{AS_2}| : |\overline{SS_2}|, \tag{22}$$

pa zbog $|\overline{SS_2}| = 1$, (21) i (22) slijedi

$$e : f = |\overline{AC}| : |\overline{BD}| = (2|\overline{AS}|) : (2|\overline{SD}|) = |\overline{AS}| : |\overline{SD}| =$$

$$= |\overline{AS_2}| : |\overline{SS_2}| = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} : 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi,$$

što smo i htjeli pokazati. Time je dokaz završen. □

Zadatak 7. Konstruirajte zlatni romb kojemu je zadana duljina osnovice a.

Rješenje: Koristimo rješenje Zadatka 6. Koraci konstrukcije su sljedeći:
Korak 1. Postupkom opisanim u rješenju Zadatka 6 konstruiramo zlatni romb $ABCD$ čija osnovica ima duljinu $\sqrt{5}$.
Korak 2. U šestar uzmemo dužinu duljine a. Zabodemo šestar u vrh A i presiječemo polupravce AB i AD. Tako dobivamo točke $P \in AB$ i $T \in AD$.
Korak 3. Zabodemo šestar u vrh P i nacrtamo kružnicu polumjera a sa središtem u P. Potom zabodemo šestar u vrh T i nacrtamo kružnicu polumjera a sa središtem u T. Nacrtane kružnice se sijeku u točkama A (koju znamo otprije) i R. Četverokut $APRT$ je traženi zlatni romb.
Dokaz konstrukcije: Prema Korolaru 1, svi zlatni rombovi su slični. Stoga je dovoljno dokazati da su rombovi $ABCD$ i $APRT$ slični, odnosno da su im odgovarajući kutovi sukladni. Oba romba imaju zajednički (šiljasti) kut α kod vrha A, pa i njihovi tupi kutovi moraju biti sukladni (mjera tih kutova jednaka je $\pi - \alpha$ radijana). □

Konstrukcija zlatnoga romba opisana u rješenju Zadatka 6 ima neke zanimljive posljedice. Naime, u toj smo konstrukciji, osim zlatnoga romba, konstruirali i dužinu $\overline{AS_2}$ čija je duljina jednaka φ, te dužinu $\overline{DS_2}$ čija je duljina jednaka $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, odnosno zbog (4), $\frac{1}{\varphi}$. Osim tih dviju dužina, pomoću opisane konstrukcije moguće je jednostavno konstruirati i dužine čije su duljine φ^2 i $\frac{1}{\varphi^2}$. Preciznije, vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 9. (prema [5]) Neka su $G \in \overline{EB_1}$ i $H \in \overline{FD_1}$ takve da je $|\overline{EG}| = |\overline{FH}| = 1$ (vidjeti Sliku 3). Tada su:

$$|\overline{BG}| = \frac{1}{\varphi^2}, \ |\overline{CH}| = \varphi^2.$$

Dokaz: Radi kratkoće zapisa, označimo $x := |\overline{AE}|, y := |\overline{BE}|, z := |\overline{BG}|, w := |\overline{CH}|$. Uočimo da vrijede relacije:

$$\Delta AES \cong \Delta ASS_2, \Delta BES \cong \Delta DSS_2.$$

Zbog njih, te zbog (3) i (4), vrijede jednakosti:

$$x = |\overline{AS_2}| = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi,$$

$$y = |\overline{DS_2}| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi}.$$

Pokažimo da je $z = \frac{1}{\varphi^2}$. Prema pretpostavci je $|\overline{EG}| = 1$, pa koristeći Lemu 1 imamo:

$$z = 1 - y = 1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi - 1}{\varphi} = \frac{\varphi^2 - \varphi}{\varphi^2} = \frac{(\varphi + 1) - \varphi}{\varphi^2} = \frac{1}{\varphi^2}.$$

Preostaje pokazati da je $w = \varphi^2$. Uočimo da je $\Delta FDS \cong \Delta SEB$. To znači da je $|\overline{FD}| = |\overline{EB}| = y = \frac{1}{\varphi}$. Prema pretpostavci je $|\overline{FH}| = 1$, pa slijedi:

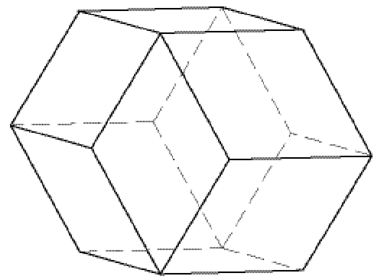
$$|\overline{DH}| = |\overline{FH}| - |\overline{FD}| = 1 - y = z.$$

Tako ponovno koristeći Lemu 1 dobivamo:

$$w = |\overline{CD}| + |\overline{DH}| = \sqrt{5} + z = \sqrt{5} + \frac{1}{\varphi^2} = x + y + 1 - y = x + 1 = \varphi + 1 = \varphi^2,$$

što je i trebalo pokazati. Detalje prepuštamo čitatelju. □

Spomenimo zaključno i posebnu zanimljivost vezanu uz zlatni romb. On se pojavljuje usko vezan uz *dodekaedar Bilinskoga* (vidjeti Sliku 4). Taj dodekaedar je 1960. otkrio hrvatski matematičar Stanko Bilinski (1909. - 1998.) i nazvao ga *rompski dodekaedar druge vrste*. Riječ je o konveksnom poliedru kojemu su svih 12 strana sukladni zlatni rombovi. Tim je otkrićem profesor Bilinski pokazao da postoji i rompski dodekaedar kojemu je omjer dijagonala bilo koje strane različit od $\sqrt{2}$. Dotad se, naime, smatralo da su strane svakoga rompskoga dodekaedra rombovi kojima je omjer dijagonala $\sqrt{2} : 1$. Zbog toga je novootkriveni rompski dodekaedar nazvan prema profesoru Bilinskom, čime je svjetska matematička zajednica dala (još jedno) zasluženo priznanje istaknutim hrvatskim matematičarima. Zainteresiranoga čitatelja upućujemo na članak [6].



Slika 4: Dodekaedar Bilinskoga

6 Zlatni romb - konstrukcije u GeoGebri

Konstrukcije koje su opisane u ovom članku jednostavno je izvesti u GeoGebri. Primjeri koje su izradili autori članka dostupni su na Internetu zajedno s uputama namijenjenima korisnicima, i to:
1) Primjer za pravokutni trokut kojemu je omjer duljina kateta jednak zlatnom broju, odnosno konstrukciju opisanu u Zadatku 2:
https://www.geogebra.org/m/WnUqk86T
2) Primjer za zlatni romb kojemu je zadana duljina veće dijagonale, odnosno konstrukciju opisanu u Zadatku 4:
https://www.geogebra.org/m/X6eSRuMQ
3) Primjer za zlatni romb kojemu je zadana duljina manje dijagonale, odnosno konstrukciju opisanu u Zadatku 5:
https://www.geogebra.org/m/tqAUNwM6
4) Primjer za zlatni romb kojemu je zadana duljina stranice, odnosno konstrukciju opisanu u Zadatku 7:
https://www.geogebra.org/m/rsksFeGv
U istom primjeru pokazana je i konstrukcija zlatnoga romba kojemu je duljina stranice $\sqrt{5}$ jediničnih dužina, odnosno konstrukcija opisana u Zadatku 6.

7 Zaključak

U ovom smo članku izložili još jednu od mnogobrojnih primjena zlatnoga reza u geometriji. Definirali smo pojam zlatnoga romba, naveli njegova osnovna svojstva i detaljno opisali moguće načine njegova konstruiranja. Pritom treba posebno istaknuti da su sve opisane konstrukcije izvodljive samo ravnalom i šestarom, a za dokazivanje njihove valjanosti posve je dovoljno poznavanje elementarne (srednjoškolske) geometrije.

I ovim radom nastojali smo dati svoj doprinos nastojanjima da se potpuno neopravdano zanemarene geometrijske teme uvrste u nastavne programe matematičkih predmeta na tehničkim stručnim studijima koji se izvode na našim veleučilištima i samostalnim visokim školama. Uvjereni smo da bi takve teme vrlo pozitivno utjecale na zanimljivost tih predmeta, a samim time i na popularizaciju matematike, odnosno nastavak "razbijanja" tradicionalnih stereotipa o matematici kao "bauku".

Bibliografija

[1] M. Katić Žlepalo, B. Kovačić: O zlatnom trokutu, Math.e, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2017.

[2] B. Pavković, D. Veljan: Elementarna matematika 1, školska knjiga, Zagreb, 2004.

[3] B. Pavković, D. Veljan: Elementarna matematika 2, školska knjiga, Zagreb, 1994.

[4] E. W. Weisstein: Golden Rhombus, (javno dostupno na: http://mathworld.wolfram.com/GoldenRhombus.html 15.8.2017.)

[5] A. Bogomolny: Golden Ratio via Golden Rhombus (javno dostupno na: http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatioMolokach.shtml, 15.8.2017.)

[6] B. Gruenbaum: The Bilinski dodecahedron and assorted parallelohedra, zonohedra, monohedra, isozonohedra, and otherhedra, The Mathematical Intelligencer, 32 (4), 2010.

ISSN 1334-6083